THE UNIVERSITY
OF ILLINOIS
LIBRARY
515
~~517~~
C126
V. 1
MATHEMATICS

Return this book on or before the
Latest Date stamped below.

University of Illinois Library

July 28-59

L161—H41

515
C126
v.1

PROF. CESARE ARZELÀ

25253
4.12

SULL' INTEGRAZIONE PER SOSTITUZIONE

NOTA

letta alla R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna nell' Adunanza del 25 Marzo 1900.

BOLOGNA
TIPOGRAFIA GAMBERINI E PARMEGGIANI
1900

Estratto dal *Rendiconto delle Sessioni della R. Accademia delle Scienze dell' Istituto di Bologna.* — Anno accademico 1899-1900

Si tratta qui di una osservazione relativa al metodo di integrazione per sostituzione: argomento che appartiene agli elementi del Calcolo e questa mia nota non ha invero che un semplice scopo didattico.

Sia da trovare l'integrale indefinito

$$\int f(u)du\,.$$

Uno dei metodi più in uso è quello di porre in posto di u una funzione di una nuova variabile $u(x)$ continua e avente derivata, almeno nei casi ordinari, generalmente continua.

Quell'integrale si trasforma così nell'altro

$$\int f(u(x))\,.\,u'(x)dx$$

e nelle ipotesi poste, il prodotto $f(u(x))\,.\,u'(x)$ essendo funzione di x finita e continua o generalmente continua, è certamente integrabile.

Si riesca a determinare l'integrale indefinito

$$\int f(u(x))\,.\,u'(x)dx = \psi(x)\,.$$

Se si tratta solamente di calcolare un'integrale definito

$$\int_c^d f(u)du\,,$$

595515

si può far ciò, prendendo

$$\psi(a) - \psi(b)$$

essendo $u(a) = c$ e $u(b) = d$: vale a dire, è

$$a) \qquad \int_c^d f(u)du = \int_a^b f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \psi(b) - \psi(a) \quad (*)$$

purchè la $u(x)$ sia in $a \ldots b$ continua anche con massimi e minimi, e la $u'(x)$ generalmente continua. (Questo è almeno il caso ordinario).

Ma se trovato $\psi(x)$, da questo si vuole, ponendovi la $x = x(u)$ inversa di $u = u(x)$, trarre l'integrale indefinito

$$\int f(u)du\,,$$

allora si suole esprimere come condizione esenziale quella, che la $u = u(x)$ sia invertibile; ovvero sia la $u(x)$ sempre crescente o sempre decrescente nell' intervallo, in cui la $u(x)$ medesima si considera.

Una siffatta condizione della invertibilità unica della $u = u(x)$, che è pure enunciata in molti libri è *superflua*, precisamente come lo è per il calcolo dell'integrale definito $a)$.

Suppongasi dunque trovato l'integrale indefinito

$$\int f(u(x)) \cdot u'(x)dx = \psi(x)\,.$$

Dalla $u = u(x)$ si tragga $x = x(u)$ funzione a più valori: funzione cioè che per i valori u in un certo tratto ha p. es. un valore unico, per i valori u in un altro tratto ha due valori, e così in un'altro tratto, ne ha tre o più; sempre però, un numero finito.

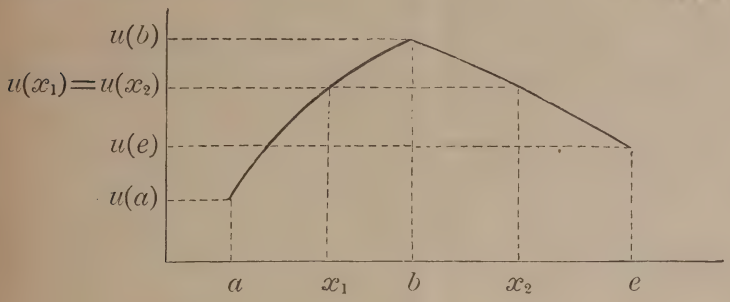
Ad ogni u tra c e c_1, corrisponda ad es. il valore $x_1 = x_1(u)$: ad ogni u tra c_1 e c_2, corrispondano i valori $x_1 = x_1(u)$ e $x_2 = x_2(u)$, $x_3 = x_3(u)$, ad ogni u tra

---

(*) Veggansi ad es. *I Fondamenti etc.* del Dini.

c_2 e c_3, corrisponda ad es. per un certo tratto ivi $c_2 \ldots c_2'$ il valore $x_3 = x_3(u)$, per un'altro $c_2' \ldots c_3$, $x_3 = x_3(u)$, $x_4 = x_4(u)$, $x_5 = x_5(u)$ e così via.

Per fissare le idee, suppongasi precisamente che p. es. da a a b la $u(x)$ cresca: da b ad e decresca come vedesi in figura.



Sia $u(e) > u(a)$: ad ogni punto u compreso tra $u(a)$ e $u(e)$ corrisponde un unico valore di x, $x_1(u)$: ad ogni u compreso tra $u(e)$ e $u(b)$ ne corrispondono due che indicheremo con $x_1(u)$ e $x_2(u)$: questi due divengono uguali per $u = b$: e il valore $u(b)$ è un massimo per la $u(x)$.

Ciò presupposto, sia

$$x = x(u)$$

l'espressione generica che si ricava risolvendo in x la data equazione

$$u = u(x)$$

la quale $x(u)$ non sarà dunque funzione ad un'unico valore per ogni u.

Si sostituisca in $\psi(x)$, che diverrà così $\psi(x(u))$.

Vuolsi mostrare che l'espressione $\psi(x(u))$, che così si ottiene, è funzione di u, *ad un sol* valore per ogni u, è continua e ha per derivata $f(u)$.

Che è ad un solo valore per ogni u, basta vederlo per quegli u ai quali corrispondono più valori x: giac-

chè se ad u corrisponde un'unico x, allora, essendo $\psi(x)$ funzione univoca e continua di x, e $x(u)$ essendolo pure di u, è evidente che lo è anche $\psi(x(u))$.

Ad un u corrispondano x_1 e x_2: si deve far vedere che è

$$\psi(x_1(u)) = \psi(x_2(u)) .$$

Occorre osservare che in questo caso tra x_1 e x_2 vi è sicuramente un punto b in cui la $u(x)$ ha il massimo assoluto ovvero il minimo.

Si ha, in generale

$$\psi(x) = \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

donde

$$\psi(x_1) - \psi(a) = \int_a^{x_1} f(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

$$\psi(x_2) - \psi(a) = \int_a^{x_2} f(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

e di qui

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(u(x)) \cdot u'(x) dx .$$

Ma, è

$$\int_{x_1}^{x_2} f(u(x)) u'(x) dx = \int_{x_1}^{b} f(u(x)) u'(x) dx + \int_{b}^{x_2} f(u(x)) u'(x) dx$$

$$= \int_{u(x_1)}^{u(b)} f(u) du + \int_{u(b)}^{u(x_2)} f(u) du$$

il tratto di valori u, $u(x_1) \ldots u(b)$ coincide col tratto $u(x_2) \ldots u(b)$: ivi per ogni u la $f(u)$ è data come funzione ad un valore e quindi

$$\psi(x_2) - \psi(x_1) = 0 .$$

La $\psi(u(x))$ è dunque ad un valore per ogni u, anche se a tale valore corrispondono due valori di x. È poi continua.

Siano u e $u+h$ due valori di u: deve

$$\psi(x(u+h)) - \psi(x(u))$$

tendere a zero con h, *qualunque* siano i valori x che si vogliano intendere corrispondenti ad u e ad $u+h$. Poichè dalle

$$\psi(x_1(u+h)) = \psi(x_2(u+h))$$
$$\psi(x_1(u)) = \psi(x_2(u))$$

si trae

$$\psi(x_1(u+h)) - \psi(x_1(u)) = \psi(x_1(u+h)) - \psi(x_2(u)) =$$
$$= \psi(x_2(u+h)) - \psi(x_1(h)) = \psi(x_2(u+h)) - \psi(x_2(h))$$

e $x_1(u)$ come funzione di u, nel tratto in cui esiste, è continua, così si vede che sarà

$$\lim_{h=0} \{\psi(x(u+h)) - \psi(x(u)\} = 0 .$$

Ha poi per derivata $f(u)$: si consideri

$$\frac{\psi(x(u+h)) - \psi(x(u))}{h} :$$

esso può assumere, a seconda del valore che s'intenda per x, una delle forme

$$\frac{\psi(x_1(u+h) - \psi(x_1(u))}{h}, \quad \frac{\psi(x_1(u+h)) - \psi(x_2(u))}{h},$$
$$\frac{\psi(x_2(u+h)) - \psi(x_2(u))}{h}, \quad \frac{\psi(x_2(u+h)) - \psi(x_2(u))}{h},$$

le quali coincidono per tutti quegli u, pei quali x_1 e x_2 coesistono. Ma la derivata di

$$\psi(x) = \int f(u(x) \cdot u'(x) dx$$

se per x s'intende ad es. sostituita $x_1(u)$, è

$$f(u(x)) \cdot u'(x) \cdot \frac{1}{u'(x)} = f(u) ;$$

e così, da tutto ciò segue, quanto si è enunciato, e cioè che trovato

$$\psi(x) = \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx$$

se in esso in posto di x si mette l'espressione $x(u)$, che si ottiene risolvendo la $u = u(x)$: o anche s'intende con $x(u)$ una funzione che per ogni u ha uno o l'altro (è indifferente) dei valori x soddisfacenti alle $u = u(x)$, sicuramente la $\psi(x(u))$ che così resulta è l'integrale indefinito

$$\int f(u) du .$$

Si conclude che, quando si applica a un integrale indefinito

$$\int f(u) du$$

un cangiamento di variabile, mediante la posizione $u = u(x)$, e si trova

$$\psi(x) = \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx ,$$

la condizione che la $u = u(x)$ sia invertibile è superflua pel passaggio dalla $\psi(x)$ alla $\psi(x(u)) = \int f(u) du$.

Osservazione. — Qualche volta invece che prendere $u = u(x)$, per la determinazione dell'integrale $\int f(u) du$, si presta opportuna la posizione $x = x(u)$: se $x = x(u)$ ammette una funzione inversa $u = u(x)$ ad un solo valore e allora le considerazioni già esposte ci dicono senz'altro che è

$$\int f(u) du = \int f(u(x)) \cdot u'(x) dx = \int \left(\frac{f(u)}{x'(u)} \right)_{u = u(x)} \cdot dx$$

e se quest'ultimo è $\psi(x)$, sarà $\psi(x(u))$ l'integrale cercato; — e può servire al calcolo di qualsiasi integrale definito, in intervalli opportuni.

Ma se la $x = x(u)$ non è invertibile in modo unico, e ad es. ammette, almeno per un certo tratto di va-

lori x, due funzioni inverse $u = u_1(x)$ e $u = u_2(x)$, non si potrà asserire che è

$$\int f(u)du = \int \left(\frac{f(u)}{x'(u)}\right)_{u=\substack{u_1(x)\\u_2(x)}} dx$$

quando nel secondo integrale si intenda posta per u, indifferentemente, l'una o l'altra delle funzioni inverse anzidette, giacchè la $f(u)$, che per dato ha un'unico valore per ogni u, non lo avrà in generale del pari per ambedue i valori u_1 e u_2 che corrispondono a uno stesso x; bisognerà in questo caso adoperare, a seconda dell'intervallo, o l'una o l'altra delle due inverse.

È bene notare che se si considerano ad es. le due inverse $u = u_1(x)$, $u = u_2(x)$ nell'intervallo $x_1 \ldots x_2$ per la x, i valori u che, in corrispondenza, la $u_1(x)$ prende saranno tutti quelli di un certo tratto $U_1 \ldots U_2$: e quelli che prende la $u_2(x)$ saranno tutti quelli di un tratto $U_2' \ldots U_3$: che non ha alcun valore comune col precedente: giacchè, se uno ve ne fosse, a questo corrisponderebbero due valori della x mentre la x è data come funzione ad un valore della u: se però ad es. il punto x_2 è per la $x = x(u)$, un valore massimo, allora sarà $u_1(x_2) = u_2(x_2) = U_2 = U_2'$, e i valori della $u_1(x)$ si riattacano con quelli della $u_2(x)$: dimodocchè, dovendosi ad es., calcolare $\int_c^d f(u)du$, dove $U_1 < c < U_2$ e $U_2 < d < U_3$, si avrà

$$\int_c^d f(u)du = \int_{x(c)}^{x(u_2)} f(u_1(x)) \cdot u_1'(x)dx + \int_{x(u_2)}^{x(d)} f(u_2(x)) \cdot u_2'(x)dx$$

cioè

$$\int_c^d f(u)du = \int_{x(c)}^{x(u_2)} \left(\frac{f(u)}{x'(u)}\right)_{u=u_1(x)} dx + \int_{x(u_2)}^{x(d)} \left(\frac{f(u)}{x'(u)}\right)_{u=u_2(x)} dx$$

e potrebbe essere erroneo scrivere

$$\int_c^d = \int_{x(c)}^{x(d)}$$

come è manifesto.

Se ad es. fosse $x(c) = x(d)$, questa ultima eguaglianza porterebbe alla conseguenza

$$\int_c^d = 0 :$$

che può benissimo non essere.

A spiegar meglio la cosa, si considerino due funzioni $u = u_1(x)$ e $u = u_2(x)$ aventi nello stesso intervallo di valori x, una stessa inversa $x = x(u)$.

Si potrà cangiar la variabile nell' integrale

$$\int f(u)du$$

valendosi della $u = u_1(x)$, ovvero dell'altrà $u = u_2(x)$.

Nel primo caso si avrà

$$\int f(u)du = \int f(u_1(x)) \cdot u_1'(x)dx = \psi_1(x)$$

nel secondo

$$\int f(u) \cdot du = \int f(u_2(x)) \cdot u_2'(x)dx = \psi_2(x) :$$

se in ciascuna delle due $\psi_1(x)$ e $\psi_2(x)$ si pone $x(u)$ in posto di x, si ottengono le due

$$\psi_1(x(u)) \qquad \text{e} \qquad \psi_2(x(u))$$

che manifestamente non si possono ritenere eguali.

Ad essere precisi, bisognerebbe scrivere nella prima $x(u_1)$ invece di $x(u)$: nella seconda $x(u_2)$: allora si avrebbero le altre

$$\psi_1(x(u_1)) \qquad \text{e} \qquad \psi_2(x(u_2)) :$$

quella coinciderà con $\int f(u)du$ per un certo tratto di valori u; questa, per un' altro tratto.

Osservazione II. — Se la $u(x)$, che si prende in posto di u, ha la derivata, inferiore per un certo in-

tervallo a un numero finito A, si potrà quando si voglia, renderla sempre crescente aggiungendole Ax: e allora, se si cangia variabile, ponendo in posto di u,

$$u(x) + Ax$$

si avrà

$$\begin{aligned}\int f(u)du &= \int f(u(x) + Ax)(u'(x) + A)dx \\ &= \int f(u(x) + Ax)u'(x)dx + A\int f(u(x) + Ax)dx \\ &= \psi(x);\end{aligned}$$

e la $u(x) + Ax$ è sicuramente invertibile in modo unico.

Behandlung einiger Aufgaben

aus der

Integral-Rechnung

von

Prof. Dr. K. L. Bauer,

Lehrer der Physik und Mathematik am Realgymnasium in Karlsruhe.

Karlsruhe.

Druck von Malsch & Vogel.

1871.

I.

Welchem Grenzwerthe nähert sich das bestimmte Integral:

$$\int_0^1 \frac{x^{2p+1} - x^{4p}}{1-x^2}\, dx,$$

wenn p ins Unendliche wächst?

§. 1.

Zu obiger Frage kann folgende Untersuchung veranlassen. Setzt man in der Gleichung

$$\lg(1+x) = \frac{1}{1}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots$$

$$-1 < x \leqq 1,$$

deren rechte Seite unter der angegebenen Bedingung convergiert, und worin — wie hier immer — das Zeichen lg den natürlichen Logarithmus bedeutet, die Veränderliche $x = 1$, so wird speciell:

$$\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

Weil die unendliche Reihe rechts vom Gleichheitszeichen sich in eine divergente (die sog. harmonische Reihe) verwandelt, wenn die Glieder sämmtlich im absoluten Sinne genommen werden, so ist es nicht erlaubt, die Ordnung der Glieder zu ändern. Thut man es trotzdem, so entsteht eine neue Reihe, die zwar auch convergieren kann, deren Werth aber mit $\lg 2$ nicht übereinstimmt; in andern Fällen tritt sogar Divergenz ein, wie Schlömilch in seiner Zeitschrift (Jahrgang 1862 S. 283), vorher aber am nämlichen Beispiel schon Stern in seiner 1860 erschienenen Algebraischen Analysis S. 335 gezeigt hat.

Bildet man aus der Reihe für $\lg 2$ durch andere Anordnung der Glieder die neue konvergente Reihe:

$$S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{4p-3} + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2p} + \cdots,$$

so lässt sich durch Anwendung gewisser Kunstgriffe (vergl. III) auf elementarem Wege nachweisen, dass

$$S = \frac{3}{2}\lg 2.$$

Um aber, von vornherein wenigstens, jeden Kunstgriff zu vermeiden, kann man die Summation der Reihe S mit Anwendung bestimmter Integrale zu bewerkstelligen suchen. Als solche eignen sich

$$\int_0^1 x^{n-1}\,dx = \int_0^\infty e^{-nx}\,dx = \frac{1}{n}.$$

Wenn wir uns die Reihe S zunächst endlich, nämlich mit dem Glied $-\frac{1}{2p}$ abgebrochen denken (Reihe S'), so dürfen wir alle positiven und dann auch alle negativen Glieder zusammenfassen, ohne darum zwei divergente Klammerausdrücke zu erhalten, was bei unbegrenzter Zahl der Glieder allerdings der Fall und daher bedenklich wäre:

$$S' = \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{4p-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2p}\right).$$

Und wenn jetzt auf jedes Glied von dem ersten der angeführten zwei Integrale Gebrauch gemacht wird, so ergibt sich:

$$S' = \int_0^1 \left|\begin{matrix}(1+x^2+x^4+\cdots+x^{4p+2})\\ -(x+x^3+\cdots+x^{2p-1})\end{matrix}\right| dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1-x^{4p}}{1-x^2}-\frac{x-x^{2p+1}}{1-x^2}\right) dx$$

$$= \int_0^1 \frac{dx}{1+x} + \int_0^1 \frac{x^{2p+1}-x^{4p}}{1-x^2}\,dx$$

$$= \lg 2 + \int_0^1 \frac{x^{2p+1}-x^{4p}}{1-x^2}\,dx.$$

Bei einem unendlichen Wachsthum von p nähert sich der Werth der endlichen Reihe S' offenbar dem Werthe der unendlichen Reihe S als seinem Grenzwerthe. Man wird demnach den Grenzwerth S von S' gefunden haben, sobald die zu Anfang gestellte Frage beantwortet ist; und da, wie oben bemerkt, $S = \frac{3}{2}\lg 2$, so muss die richtige Lösung des von uns gewählten Problemes sein:

$$\int_0^1 \frac{x^{2p+1}-x^{4p}}{1-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\lg 2, \text{ wenn } p=\infty.$$

Dieses Resultat soll jetzt abgeleitet werden.

§. 2.

Die Function $\frac{x^{2p+1}-x^{4p}}{1-x^2} = x^{2p+1}\cdot\frac{1-x^{2p-1}}{1-x^2}$ von x erhält in dem Falle $x = 1$ die Form $\frac{0}{0}$, aber den wahren Werth $\frac{2p-1}{2} = p-\frac{1}{2}$,

welcher für $p = \infty$ ebenfalls unendlich gross ist. So lange hingegen x ein echter, wenn auch der Eins ganz nahe gelegener Bruch ist, wird der Werth der genannten Function, bei unendlich grossem p, identisch Null. Erinnert man sich nun an die geometrische Bedeutung eines bestimmten Integrales, so erkennt man gleich, dass in dem von uns zu behandelnden, zwischen den Grenzen 0 und 1 genommenen Integrale, einzig und allein die in unmittelbarer Nähe der obern Grenze befindlichen Werthe von x in Betracht kommen. Würden wir mit ε einen der Eins beliebig nahen echten Bruch bezeichnen und eine Zerlegung des zu untersuchenden Integrales vornehmen nach dem Schema:

$$\int_0^1 = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^1,$$

so dürften wir unbedenklich das erste der Theilintegrale ganz bei Seite lassen.

Nach dieser Betrachtung ist vorerst die Substitution $x = 1 - \xi$ indiciert; in dem neuen Integrale

$$\int_0^1 \frac{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}}{2\xi - \xi^2}\, d\xi$$

kommt es dann nämlich bloss auf die in unmittelbarer Nähe der untern Grenze befindlichen Werthe von ξ an, und mit diesen ganz kleinen echten Brüchen ist hier leichter zu operieren.

Das jetzige Integral lässt sich durch Weglassung des Gliedes $-\xi^2$ vereinfachen, weil der dadurch begangene Fehler:

$$\int_0^1 \frac{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}}{2\xi - \xi^2}\, d\xi - \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}}{2\xi}\, d\xi$$

$$= \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}}{2(2-\xi)}\, d\xi$$

bei unendlich wachsendem p sich dem Grenzwerthe Null nähert. Dies tritt selbst bei dem grössern Ausdrucke ein, den wir erhalten, indem der Nenner $2(2-\xi)$ durch die höchstens halb so grosse Zahl 1 ersetzt wird, da:

$$\int_0^1 \left\{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}\right\} d\xi = -\left[\frac{(1-\xi)^{2p+2}}{2p+2}\right]_0^1 + \left[\frac{(1-\xi)^{4p+1}}{4p+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1^{2p+2}}{2p+2} - \frac{1^{4p+1}}{4p+1}$$

$$= 0, \text{ wenn } p = \infty.$$

Macht man jetzt weiter in dem vereinfachten Integrale:

$$\frac{1}{2}\int_0^1 \frac{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}}{\xi}\, d\xi$$

die neue Substitution $1 - \xi = e^{-z}$, so erhält es die Gestalt:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-(2p+2)z} - e^{-(4p+1)z}}{1-e^{-z}}\,dz,$$

wo indessen statt der obern Grenze auch die sehr kleine $-\lg\varepsilon$ gesetzt werden dürfte (die Bedeutung von ε wie oben). Bedenkt man diess und setzt:

$$1-e^{-z} = 1-\left(1-\frac{z}{1}+\frac{z^2}{1\cdot 2}-\frac{z^3}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdot\cdot\right)$$

$$= \frac{z}{1}-\frac{z^2}{1\cdot 2}+\cdot\cdot,$$

so ist der Versuch einer nochmaligen Vereinfachung nahe gelegt, darin bestehend, dass man den Nenner $1 - e^{-z}$ durch z ersetzt. Der begangene Fehler würde sein:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-(2p+2)z} - e^{-(4p+1)z}}{1-e^{-z}}\,dz - \int_0^\infty \frac{e^{-(2p+2)z} - e^{-(4p+1)z}}{z}\,dz.$$

Und in der That lässt sich zeigen, dass derselbe von ganz ähnlicher Art ist, wie der bereits früher begangene, der bei unendlich wachsendem p den Grenzwerth Null hatte und gerade aus diesem Grunde statthaft war. Machen wir nämlich in dem Ausdrucke für den gegenwärtig in Frage stehenden Fehler die Rücksubstitution $e^{-z} = 1 - \xi$, so verwandelt er sich zunächst in:

$$\int_0^1 \frac{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}}{\xi}\,d\xi - \int_0^1 \frac{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}}{-\lg(1-\xi)}\,d\xi.$$

Da hier die obere Grenze auch durch die beliebig kleine $1-\varepsilon$ ersetzt werden darf, so kann in der Entwicklung

$$-\lg(1-\xi) = \frac{\xi}{1}+\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{3}+\cdot\cdot$$

durch geeignete Wahl von ε bewirkt werden, dass selbst für den obern Grenzwerth $1-\varepsilon$ von ξ die Summe der unendlich vielen auf $\frac{\xi}{1}$ folgenden Glieder kleiner als ξ^2 ausfällt, dass also im ganzen Grenzenintervall:

$$-\lg(1-\xi) < \xi + \xi^2.$$

Vergrössern wir nun den Ausdruck für den Fehler dadurch, dass wir für den Nenner $-\lg(1-\xi)$ des zweiten Integrales den grössern Werth $\xi+\xi^2$ substituiren, so ergibt sich durch Zusammenziehung beider Integrale:

$$\int_0^1 \left\{(1-\xi)^{2p+1} - (1-\xi)^{4p}\right\} \frac{\xi}{1+\xi^2}\,d\xi.$$

Und wenn dieser Ausdruck eine nochmalige Vergrösserung erfährt, indem der Factor $\frac{\xi}{1+\xi^2}$ durch den grösseren Werth 1 ersetzt wird, so haben wir den jetzigen Fehler auf das nämliche Integral wie den ersten zurückgeführt.

Es ist hiernach klar, dass die Lösung des ursprünglichen Problems gleichbedeutend ist mit der Ermittelung des Integrales:

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-(2p+2)z} - e^{-(4p+1)z}}{z}\, dz.$$

Den Werth eines Integrales dieser Art leitet man aber sehr rasch in folgender Weise ab:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-az} - e^{-bz}}{z}\, dz = \int_0^\infty \left\{ \int_a^b e^{-zy}\, dy \right\} dz.$$

$$= \int_a^b dy \int_0^\infty e^{-yz}\, dz$$

$$= \int_a^b \frac{dy}{y}$$

$$= \lg \frac{b}{a}$$

Wenden wir dieses Resultat auf unsern Fall an, so wird

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-(2p+2)z} - e^{-(4p+1)z}}{z}\, dz = \frac{1}{2} \lg \frac{4p+1}{2p+2}$$

$$= \frac{1}{2} \lg \frac{4+1:p}{2+2:p}$$

$$= \frac{1}{2} \lg 2, \text{ wenn } p = \infty,$$

was zu beweisen war.

Wäre oben in §. 1 die wichtige Vorsicht unterlassen worden, den Werth S als Grenzwerth der aus zwei endlichen Reihen gebildeten Differenz S′ aufzufassen, hätte man sich vielmehr erlaubt, ohne Weiteres S als Differenz zweier unendlicher divergenter Reihen darzustellen, und die Glieder der alsdann unter dem Integralzeichen zu summierenden unendlichen geometrischen Reihen als unendlich abnehmend zu betrachten, obgleich diess für Einen Werth von x, nämlich für die obere Grenze 1 offenbar nicht der Fall ist, so wäre einem das von uns $= \frac{1}{2} \lg 2$ gefundene Integral völlig entgangen, und das falsche Resultat $S = \lg 2$ zum Vorschein gekommen.

Allerdings kann es auch geschehen, dass eine Unvorsichtigkeit der obigen Art sich einmal ungestraft begehen lässt, nämlich immer dann, wenn der Grenzwerth des von Rechtswegen einer besondern Untersuchung zu würdigenden Integrales identisch Null ist. Ein solches Beispiel soll durch Abänderung der benutzten Summationsmethode jetzt vorgeführt werden; irgend welche Berechtigung zu bequemer Nachlässigkeit aber verleihen Fälle dieser Art durchaus nicht.

II.

Eine zweite Methode zur Summierung der unendlichen Reihe:

$$S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4p-3} + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2p} + \cdots,$$

gleichfalls auf der Anwendung bestimmter Integrale beruhend.

Setzt man in der Gleichung:

$$\operatorname{arc\,tg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$
$$-1 \leqq x \leqq +1$$

die Variabele $x = 1$, so erhält man die bekannte, langsam convergierende Leibnitz'sche (unabhängig auch von Newton aufgestellte) Reihe:

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$

Setzt man diese Entwicklung unter die Reihe S, so dass die Glieder von gleichem absolutem Werthe unter einander zu stehen kommen und summiert, so findet man:

$$S + \frac{\pi}{4} = 2\left(1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{4p-3} - \frac{1}{4p} + \cdots\right).$$

Diese neue Reihe hat zum Mindesten insofern ein besseres Aussehen, als ihre Glieder beständig abnehmen, was in der Reihe S nicht der Fall ist. Bei der weiteren Behandlung denken wir uns die neue Reihe zunächst wieder endlich, nämlich mit dem Gliede $-\frac{1}{4p}$ abgebrochen und setzen, indem wir die positiven Glieder sowohl, als auch die negativen, für sich zusammenfassen:

$$S' = \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{4p-3}\right) - \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{4p}\right).$$

Liessen wir p ins Unendliche wachsen, statt es einstweilen als endlich zu betrachten, so erschiene S' als eine Differenz zweier divergenter Reihen. Wenn wir nun diessmal das Integral

$$\int_0^\infty e^{-nx}\, dx = \frac{1}{n}$$

zur Summation benutzen, so wird:

$$S' = \int_0^\infty \left| -\begin{pmatrix} e^{-x} + e^{-5x} + \cdots + e^{-(4p-3)x} \\ e^{-4x} + e^{-8x} + \cdots + e^{-4px} \end{pmatrix} \right| dx$$

$$= \int_0^\infty \left\{ \frac{e^{-x} - e^{-(4p+1)x}}{1 - e^{-4x}} - \frac{e^{-4x} - e^{-(4p+4)x}}{1 - e^{-4x}} \right\} dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{e^{-x}(1 - e^{-3x})}{1 - e^{-4x}} dx - \int_0^\infty \frac{e^{-(4p+1)x} - e^{-(4p+4)x}}{1 - e^{-4x}} dx.$$

Jetzt wäre zunächst der Werth des ersten Integrales aufzusuchen, und sodann zu erforschen, welchem Grenzwerthe sich das zweite Integral nähert, wenn p ins Unendliche wächst. Erledigen wir die zweite Aufgabe zuerst!

Weil der Zähler des unter dem zweiten Integralzeichen befindlichen Quotienten bei unendlich grossem p im Bereich der Grenzen beständig gleich Null ist, so kommen nur die in unmittelbarer Nähe der untern Grenze liegenden Werthe von x in Betracht. Bloss für $x = 0$ verschwinden Zähler und Nenner des genannten Quotienten gleichzeitig; um für diesen Fall den wahren Werth desselben zu erkennen, genügt es, ihn unter der Form darzustellen:

$$\frac{e^{-(4p+1)x} - e^{-(4p+4)x}}{1 - e^{-4x}} = e^{-(4p+1)x} \cdot \frac{1 - e^{-3x}}{1 - e^{-4x}}$$

$$= e^{-(4p+1)x} \cdot \frac{\frac{3x}{1} - \frac{(3x)^2}{1 \cdot 2} + \cdots}{\frac{4x}{1} - \frac{(4x)^2}{1 \cdot 2} + \cdots}$$

$$= \frac{3}{4}, \text{ wenn } x = 0,$$

während bei der entsprechenden Untersuchung in I sich ein unendlich grosser Werth ergeben hatte. Da nun für beliebig kleine positive Werthe von x, auf die es allein hier ankommt, der Werth von $(1 - e^{-3x}) : (1 - e^{-4x})$ dem echten Bruche 3:4 beliebig nahe kommt, so ist das zweite der obigen Integrale von geringerem Betrage, als das einfachere:

$$\int_0^\infty e^{-(4p+1)x} dx = \left[\frac{e^{-(4p+1)x}}{-(4p+1)} \right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{4p+1}.$$

Aber selbst dieser Werth sinkt bei unendlich wachsendem p unter jeden endlichen Betrag herab. Es ist somit klar, dass wir bei dem gegenwärtig eingeschlagenen Verfahren ungestraft die am Schlusse von 1 angedeutete Unvorsichtigkeit hätten begehen dürfen, indem das zweite der in Frage stehenden Integrale für $p = \infty$ sich dem Grenzwerthe Null nähert, und Dank diesem besondern Umstande die genaue Gleichung besteht:

$$S+\frac{\pi}{4}=2\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{-3x})}{1-e^{-4x}}\,dx.$$

Um die noch bleibende Integration zu bewerkstelligen, transformieren wir das Integral zunächst durch Einführung einer neuen Variabeln $z = e^{-x}$ und ersetzen hierauf $\frac{\pi}{4}$ durch ein Integral von gleicher Begrenzung; dann wird:

$$S=2\int_0^1 \frac{1-z^3}{1-z^4}\,dz-\frac{\pi}{4}$$

$$=2\int_0^1 \frac{1-z^2}{1-z^4}\,dz-\int_0^1 \frac{dz}{1+z^2}$$

$$=\int_0^1 \frac{1+z^2-2z^3}{1-z^4}\,dz$$

Die so erhaltene Function unter dem Integralzeichen zerlegt sich sehr einfach; es ist nämlich identisch:

$$\frac{1+z^2-2z^3}{1-z^4}=\frac{1}{1+z}+\frac{z}{1+z^2},$$

und daher zum Schlusse:

$$S=\int_0^1 \frac{dz}{1+z}+\int_0^1 \frac{z\,dz}{1+z^2}$$

$$=\Big[\lg(1+z)\Big]+\frac{1}{2}\Big[\lg(1+z^2)\Big]$$

$$=\lg 2+\frac{1}{2}\lg 2$$

$$=\frac{3}{2}\lg 2.$$

Auch geht aus dieser Untersuchung noch hervor, dass

$$\int_0^1 \frac{1-z^3}{1-z^4}\,dz=\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{-3x})}{1-e^{-4x}}\,dx=\frac{3}{4}\lg 2+\frac{\pi}{8},$$

während das sehr ähnliche Integral:

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}(1-e^{-3x})}{4x}\,dx=\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-4x}}{4x}\,dx$$

den Werth $\frac{1}{4}\lg\frac{4}{1}=\frac{1}{2}\lg 2$ besitzt.

III.

Zwei elementare Methoden zur Summation der Reihe:

$$S = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{4p-3} + \frac{1}{4p-1} - \frac{1}{2p} + \cdots,$$

als Vervollständigung des Vorausgehenden.

§. 1.

Erste Methode.

Dieselbe beruht auf dem Vergleiche der Reihe S mit der bekannten andern:

$$\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2p-1} - \frac{1}{2p} + \cdots$$

Denkt man sich die Reihen beide mit dem Gliede $-\frac{1}{2p}$ abgebrochen, so wird die Differenz S — lg 2 derselben durch eine Summe aus p Gliedern dargestellt, deren Werth für $p = \infty$ zwischen den echten Brüchen $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{2}$ liegt, da:

$$\left\{\frac{1}{2p+1} + \frac{1}{2p+3} + \cdots + \frac{1}{4p-1}\right\} \begin{matrix} > p \cdot \frac{1}{4p-1} = 0{,}25 \\ < p \cdot \frac{1}{2p+1} = 0{,}5 \end{matrix} \Bigg\} \text{ wenn } p = \infty.$$

Der genaue Werth $\frac{1}{2}$ lg nat. 2 = 0,34 . . des genannten Unterschiedes kann durch folgenden Kunstgriff gefunden werden.

Bildet man aus der Reihe S eine neue Reihe, indem immer drei aufeinanderfolgende Glieder von S zu einem einzigen Gliede vereinigt werden, so wird das $(n+1)^{te}$ Glied sein:

$$\frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2}.$$

Geschieht eine ähnliche Vereinigung, immer von vier aufeinanderfolgenden Gliedern, in der Reihe für lg 2, so entsteht eine neue, deren $(n+1)^{tes}$ Glied sein wird:

$$\frac{1}{4n+1} - \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{4n+4}$$

Bildet man jetzt die Differenz beider $(n+1)^{ten}$ Glieder, so erhält man:

$$\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+4}-\frac{1}{2n+2}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right).$$

Legen wir schliesslich n nacheinander die Werthe 0, 1, 2, . . bei und summieren alles, so wird:

$$S-\lg 2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdot\cdot\right)$$

$$=\frac{1}{2}\lg 2.$$

§. 2.

Zweite Methode.

Diese beruht ebenfalls auf dem Vergleiche der Reihe S mit einer andern, deren Werth leicht zu ermitteln ist:

$$S'=1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdot\cdot+\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{4p-2}-\frac{1}{4p}+\cdot\cdot$$

Fasst man nämlich von immer drei aufeinanderfolgenden Gliedern dieser Reihe die beiden ersten zusammen, während das dritte Glied jedesmal ungeändert stehen bleibt, so verwandelt sich das aus drei Brüchen bestehende allgemeine Glied in $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2p-1}-\frac{1}{2p}\right)$, und die ganze Reihe in:

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdot\cdot\right)=\frac{1}{2}\lg 2.$$

Aendern wir aber die Reihen für S und S' dadurch ab, dass wir in beiden immer d r e i aufeinanderfolgende Glieder zu einem einzigen vereinigen, so werden die $(n+1)^{ten}$ Glieder sein:

$$\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}, \text{ und}$$

$$\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}-\frac{1}{4n+4}.$$

Durch Addition derselben und Summation von $n=0$ bis $n=\infty$ ergibt sich:

$$S+S'=\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n+2}\right\}$$

$$+\sum_{n=0}^{n=\infty}\left\{\frac{1}{4n+1}-\frac{1}{4n+2}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{4n+4}\right\}$$

$$= \lg 2 + \lg 2$$
$$= 2 \lg 2,$$

worauf noch für S' der bereits gefundene Werth $\frac{1}{2} \lg 2$ zu setzen ist.

IV.

Zwei kurze Beweise der Formel $e^{xi} = \cos x + i \sin x$, als Uebung in der Integration ganz einfacher Differentialgleichungen geeignet.

§. 1.

Erster Beweis.

Auf die Normalform gebracht, wird

$$e^{xi} = u + iv$$

sein; die reellen Ausdrücke u und v, welche nur Functionen von x sein können, sind zu ermitteln. — Differenziert man beiderseits in Bezug auf x, so folgt:

$$i(u + iv) = \frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx},$$

und diese Gleichung zerfällt in die zwei andern:

$$\frac{du}{dx} = -v; \quad \frac{dv}{dx} = u.$$

Daraus folgt weiter:

$$u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = 0$$

$$\frac{d(u^2 + v^2)}{dx} = 0$$

$$u^2 + v^2 = \text{Const.}$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich leicht; für $x = 0$ ist wegen der Beziehung $e^{xi} = u + iv$ gleichzeitig $u = 1$ und $v = 0$, die Integrationsconstante daher $= 1$, und genauer:

$$u^2 + v^2 = 1; \quad u = \sqrt{1 - v^2}.$$

Die Differentialgleichung $\frac{dv}{dx} = u$ gestattet jetzt die Trennung der Variabeln und die Integration:

$$\frac{dv}{\sqrt{1-v^2}} = dx; \quad \arcsin v = x + \text{Const.}$$

$$v = \sin(x + \text{Const.})$$

$$\sqrt{1-v^2} = u = \cos(x + \text{Const.}).$$

Die Integrationsconstante bestimmt sich wie vorher durch die Annahme $x = 0$, also durch die zwei Gleichungen:

$$\sin(\text{Const.}) = 0; \quad \cos(\text{Const.}) = 1, \text{ woraus folgt:}$$

$$\text{Const.} = 2m\pi,$$

d. h. gleich einem ganzen, positiven oder negativen, Vielfachen der Kreisperipherie.

§. 2.

Zweiter Beweis.

Wird die Gleichung $e^{xi} = u + iv$ zuerst logarithmiert:

$$xi = \lg(u + iv),$$

und jetzt erst differenziert, so folgt:

$$i = \frac{1}{u+iv}\left\{\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right\}, \text{ oder}$$

$$(u^2+v^2)\,i = (u-iv)\left\{\frac{du}{dx} + i\frac{dv}{dx}\right\},$$

welches Resultat in die zwei Differentialgleichungen zerfällt:

$$u\frac{du}{dx} + v\frac{dv}{dx} = 0,$$

$$u^2 + v^2 = u\frac{dv}{dx} - v\frac{du}{dx};$$

diese Beziehungen lassen sich beide leicht auch aus den in §. 1 erhaltenen: $\frac{dv}{dx} = u$ und $\frac{du}{dx} = -v$ ableiten. Einfacher dargestellt heissen sie:

$$\frac{d(u^2+v^2)}{dx} = 0,$$

$$dx = \frac{d\left(\frac{v}{u}\right)}{1+\left(\frac{v}{u}\right)^2}.$$

Die jetzt sofort ausführbare Integration ergibt:

$$u^2 + v^2 = \text{Const.}$$

$$x + \text{Const.} = \text{arc tg } \frac{v}{u}.$$

Die Integrationsconstanten findet man, wie oben, mit Benutzung der zusammengehörigen Werthe $x = 0$, $u = 1$, $v = 0$, wonach genauer:

$$u^2 + v^2 = 1,$$

$$\text{tg } (x + n\,\pi) = \frac{v}{u};$$

diese beiden Gleichungen bestimmen die Unbekannten u und v.

Sitzung vom 3. Juli 1875.

Mathematisch-physikalische Classe.

Herr Bauer theilt mit:

„Bemerkungen über Reihen nach Kugelfunktionen und insbesondere auch über Reihen, welche nach Produkten oder Quadraten von Kugelfunktionen fortschreiten, mit Anwendung auf Cylinderfunktionen.

Bei den vielfachen Untersuchungen, welche in den letzten Jahren über die Bessel'schen oder Cylinder-Funktionen angestellt wurden, haben sich unter anderen auch sehr elegante Entwicklungen ergeben, welche nach Produkten oder Quadraten dieser Funktionen fortschreiten. *) Es lag daher nahe, auch bei den verwandten Kugelfunktionen nach Entwicklungen dieser Art sich umzusehen. Einzelnes, was sich mir unter diesem Gesichtspunkte dargeboten, findet sich in Folgendem zusammengestellt.

*) Lommel, „Studien über die Bessel'schen Funktionen." Leipzig 1868. § 12 u. 15.

C. Neumann, „Theorie der Bessel'schen Funktionen." Leipzig 1867. Letzterer hat diesem Gegenstand noch einen besonderen Aufsatz gewidmet, „Ueber die Entwicklung einer Funktion nach Quadraten und Produkten der Fourier-Bessel'schen Funktionen." Ber. d. kgl. sächs. Ges. d. Wiss. 1869, abgedruckt in den math. Anm. d. III. (1871). S. 531.

Die n^{te} Kugelfunktion von $x = \cos \Theta$ sei bezeichnet durch $P_n(x)$ oder $P_n(\cos \Theta)$ oder kurz durch P_n. Ebenso bezeichne Q_n die n^{te} Kugelfunktion 2te Art von x, so ist

$$Q_n = \frac{1}{2} P_n \log \frac{x+1}{x-1} - R_n$$

In diesem Ausdruck bezeichnet R_n ein Polynom von x vom Grade $n-1$, welches sich durch die Polynome P_n in der Form darstellen lässt

$$R_n = \frac{2n-1}{1 \cdot n} P_{n-1} + \frac{2n-5}{3(n-1)} P_{n-3} + \frac{2n-5}{5(n-2)} P_{n-5} + \cdots$$

die Reihe bis P_0 oder P_1 incl. fortgesetzt.

Es lässt sich aber noch eine andere Formel für R_n gewinnen, welche aus Produkten von je zwei P zusammengesetzt ist. Man findet nämlich für die erzeugende Funktion von R_n, d. i. die Summe $\sum R_n r^n$ den Ausdruck

$$\sum R_n r^n = (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} \int_0^r (1 - 2rx + r^2)^{-\frac{1}{2}} \delta r .$$

Setzt man hierin für $(1-2rx+r^2)^{-\frac{1}{2}}$ die Reihe $\sum P_n r^n$ ein, so erhält man sofort die Gleichung *)

$$R_n = \frac{1}{n} P_0 P_{n-1} + \frac{1}{n-1} P_1 P_{n-2} + \frac{1}{n-2} P_2 P_{n-3} + \cdots + 1 \cdot P_{n-1} P_0$$

*) Diese Entwicklung von R_n ist, wie ich nachträglich bemerkte, schon in einer allgemeineren Formel von Herrn Christoffel, „Ueber die Gauss'sche Quadratur" Journ. v. Borchardt, Bd. 55 (1858) S. 72 inbegriffen, während die Formel für $\sum R_n r^n$, aus welcher sich diese Entwicklung unmittelbar ergibt, bereits in meiner Abhandlung „Von den Integralen gewisser Differentialgleichungen etc." München 1857. S. 13 sich findet, in welcher überhaupt mehrere von den Resultaten, zu welchen Herr Christoffel in seiner eben erwähnten Abhandlung gelangte, wie z. B. die Formel für die Coefficienten der Gauss'schen Quadratur (Gl. 37, S. 69 der Abh.) und ebenso auch die von Herrn Mehler in seinen „Be-

Diese Formel für R_n lässt sich nun benützen zur Bestimmung des Werthes des Integrals

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n P_p \, dx,$$

womit dann zugleich die Entwicklung des Produkts von zwei Kugelfunktionen $P_m P_n$ in eine Reihe von Kugelfunktionen gegeben ist.

Aus der ersten Formel für R_n folgt nach dem bekannten Gesetze von Reihenentwicklungen dieser Art, dass

$$\int_{-1}^{+1} R_n P_m \, dx = \frac{4}{(n-m)(n+m+1)}$$

wenn $m < n$ und m, n ungleichartig sind, während

$$\int_{-1}^{+1} R_n P_m \, dx = 0$$

wenn $m \geqq n$ oder m, n gleichartig sind. Multiplicirt man demnach die zweite Gleichung für R_n nach und nach mit P_{n-1}, P_{n-3}, $\cdots$ und integrirt zwischen den Grenzen ± 1, so erhält man eine Reihe von Gleichungen zwischen Integralen obiger Form. Mit Hilfe dieser Gleichungen in Verbindung mit der bekannten Relation, welche drei aufeinanderfolgende P aneinander knüpft

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1) + P_n + nP_{n-1} = 0,$$

ergibt sich vom spezielleren Falle zum allgemeineren aufsteigend, folgender Werth für obiges allgemeine Integral:

---

merkungen zur Theorie der mechanischen Quadratur" Journ. v. Borch. Bd. 63 (1864) S. 156 gefundene Entwicklung von R_n nach Potenzen von $\frac{x+1}{x-1}$, sowie dessen Darstellung von $P_n \log \frac{x+1}{x-1} - R_n$ als n^{ter} Differentialcoefficient von $(x^2-1)^n \log \frac{x+1}{x-1}$ bereits enthalten sind.

$$\int_{-1}^{+1} P_m P_n P_p \, dx =$$

$$2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot k}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \cdot 2k+1} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot 2k-2m-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot k-m} \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k-2n-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots k-n}$$

$$\cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2k-2p-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot \quad k-p}$$

wo k die halbe Summe der Indices, also $m + n + p = 2k$ ist. Hiebei ist vorausgesetzt, dass die Summe der Indices eine gerade Zahl ist, und keiner der Indices grösser ist, als die Summe der beiden anderen. Ist die Summe $m + n + p$ ungerade, so ist der Werth des Integrals selbstverständlich $= o$ und ebenso ist das Integral $= o$, sowie ein Index grösser ist, als die Summe der zwei anderen; denn denkt man sich $P_m P_n$ in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt, so ist das höchste Glied der Entwicklung P_{m+n} und das Integral muss mithin verschwinden, sowie $p > m + n$ ist, da bekanntlich $\int_{-1}^{+1} P_r P_s \, dx = o$ ist, ausser wenn $r = s$.

Setzt man $m = n$, $p = 2s$, so reducirt sich das Integral auf

$$\int_{-1}^{+1} P^2_n P_{2s} dx = 2\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdot 2s-1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdot s}\right)^2 \cdot \frac{n-s+1 \cdot n-s+2 \cdots n+s}{2n-2s+1 \cdot 2n-2s+3 \cdot \cdot 2n+2s+1}$$

Mittelst dieser Integrale lassen sich nun die Produkte und Quadrate dieser Polynome P in eine Reihe solcher Polynome entwickeln und man hat z. B.

$$P^2_n = \frac{1}{2n+1} P_o + 5 \cdot \frac{n(n+1)}{2n-1 \cdot 2n+1 \cdot 2n+3} \cdot P_2 + \cdots$$

$$+ (4n+1)\left(\frac{1 \cdot 3 \cdot \cdot 2n-1}{1 \cdot 2 \cdot \cdot n}\right)^2 \cdot \frac{1 \cdot 2 \cdot \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \cdot 4n+1} P_{2n} .$$

Man ersieht indessen, dass diese Entwicklungen für Produkte und Quadrate von Kugelfunktionen sich nicht

einfach genug gestalten, um eine allgemeinere Anwendung zu gestatten und ich beschränkte mich desshalb auch in Bezug auf die Herleitung obigen Integrals auf die gegebenen Andeutungen, zumal diese Herleitung selbst keineswegs sehr einfach ist.

Immerhin kann obiges Integral dazu dienen, wenn für eine Funktion f(x) eine Entwicklung nach Produkten oder Quadraten von Kugelfunktionen P gefunden wurde, hieraus die Entwicklung derselben Funktion nach den Kugelfunktionen P selbst zu finden: denn es ist dann auch das Integral $\int_{-1}^{+1} f(x)\, P_n\, dx$ in Reihenform gegeben und somit die Coefficienten dieser Entwicklung bestimmt.

§ 2

Man kann nun aber auf anderem Wege sehr leicht aus einer gegebenen Entwicklung nach Kugelfunktionen P eine andere in gewissem Sinne allgemeinere Entwicklung derselben Art ableiten, welche nebenbei auch zu Entwicklungen nach Quadraten von Kugelfunktionen führt.

Ist $\cos\gamma = \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos(\varphi - \varphi')$ mithin

$$(1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum P_n(\cos\gamma)\cdot\alpha^n$$

und Y_n irgend eine Kugelfunktion erster Art und n^{ter} Ordnung von den zwei Winkeln Θ, φ, so ist bekanntlich

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n P_m(\cos\gamma)\sin\Theta d\Theta d\varphi = 0$$

wenn $m \gtrless n$, hingegen, wenn $m = n$

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n P_n(\cos\gamma)\sin\Theta d\Theta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} Y'_n$$

wo Y'_n das ist, was Y_n wird, wenn man darin Θ', φ' statt Θ, φ setzt. Ist mithin $f(\cos\Theta)$ irgend eine Funktion von $\cos\Theta$, für welche die Entwicklung statt hat

$$f(\cos\Theta) = \sum A_n P_n(\cos\Theta),$$

so hat man

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n f(\cos\gamma)\sin\Theta d\Theta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} A_n Y'$$

Nun gehört zu den Kugelfunktionen Y_n auch als spezieller Fall die Funktion einer Variablen $P_n(\cos\Theta)$. Substituirt man diese in die vorige Gleichung, so wird

$$\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\Theta)\cdot f(\cos\gamma)\sin\Theta d\Theta d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} A_n P_n(\cos\Theta')$$

Hieraus und aus dem Gesetze, nach welchem in der Entwicklung einer Fnnktion nach Polynomen P_n die Coefficienten gebildet sind, geht hervor, dass

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\gamma)\, d\varphi = \sum A_n P_n P'_n \qquad (A$$

wo P_n, P'_n für $P_n(\cos\Theta)$ und $P_n(\cos\Theta')$ gesetzt ist.

Setzt man in A.) $P_n(\cos\gamma)$ an die Stelle $f(\cos\gamma)$, so erhält man den schon von Legendre gegebenen Satz

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_n(\cos\gamma)\, d\varphi = P_n P'_n$$

Mittelst der Gl. A.) lässt sich aus jeder Entwicklung nach Polynomen P_n eine andere ableiten, welche nach

Produkten $P_n P'_n$ oder wenn man $\Theta' = \Theta$ setzt, nach Quadraten von P_n fortschreitet. Einige Entwicklungen, die sich auf diese Weise ergeben, mögen hier angeführt sein.

1. Setzen wir zunächst $f(\cos\gamma) = (1 - 2\alpha\cos\gamma + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ so ist das Integral in A.) ein vollständiges elliptisches Integral erster Gattung und man erhält nach einfachen Umformungen

$$\frac{2}{\pi\cdot\sqrt{a+b}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi}} = \sum P_n P'_n \alpha^n \ , \quad (1.$$

wo

$a = 1 - 2\alpha\cos\Theta\cos\Theta' + \alpha^2$, $a + b = 1 - 2\alpha\cos(\Theta - \Theta') + \alpha^2$

$b = -2\alpha\sin\Theta\sin\Theta'$, $a - b = 1 - 2\alpha\cos(\Theta + \Theta') + \alpha^2$

gesetzt wurde.

Setzt man $-\Theta'$ statt Θ', so ändert sich die rechte Gleichungsseite nicht, folglich hat dieses Integral denselben Werth wie das Integral

$$\frac{2}{\pi\sqrt{a-b}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\psi}{\sqrt{1+\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi}}$$

d. h. wenn man

$$\frac{2b}{a+b} = \sin^2\lambda \ , \text{ also } \frac{2b}{a-b} = \operatorname{tg}^2\lambda \ , \ \frac{\sqrt{a-b}}{\sqrt{a+b}} = \cos\lambda$$

setzt, es ist, wie bekannt

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\lambda\sin^2\varphi}} = \frac{1}{\cos\lambda}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\lambda\cdot\sin^2\varphi}}$$

Die Gleichung 1.) gilt ferner auch, wenn man α durch $-\alpha$ ersetzt, was darauf hinaus kömmt, Θ' durch $\pi + \Theta'$ zu ersetzen.

Da für $x = \cos\Theta = o\, P_{2n+1} = o$, $P_{2n} = (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdot 2n - 1}{2 \cdot 4 \cdot \cdot 2n}$

ist, so folgt für $\Theta' = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - 2\alpha\sin\Theta\cos\varphi + \alpha^2}}$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1 - 2\alpha\sin\Theta + \alpha^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha\sin\Theta}{1 - 2\alpha\sin\Theta + \alpha^2}\sin^2\psi}}$$

$$= \sum (-1)^n \cdot \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdot 2n - 1}{2 \cdot 4 \cdot \cdot 2n} \cdot \alpha^{2n} \cdot P_{2n} \qquad (2.$$

Setzt man aber $\Theta' = \Theta$, so kommt

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{1 - \alpha}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 + \frac{4\alpha\sin^2\Theta}{(1-\alpha)^2}\sin^2\psi}} = \sum P_n^2 \alpha^n . \qquad (3.$$

Die Reihenentwicklung 1.) bleibt im Allgemeinen auch convergent für $\alpha = \pm 1$. Für $\alpha = -1$ gibt Gleichung 3.) eine besonders einfache Entwicklung für das vollständige elliptische Integral erster Gattung mit dem Modul $\sin\Theta$, nach Quadraten der P fortschreitend

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\Theta\sin^2\psi}} = \sum (-1)^n P_n^2 \qquad (4.$$

wo unter P_n immer $P_n(\cos\Theta)$ zu verstehen ist. Die Reihe ist konvergent für jeden reellen Werth von Θ, ausser für $\Theta = 0$, in welchem Falle dieselbe die Form $1-1+1-1+\cdots$ annimmt, also oscillirend wird, während der Werth der linken Gleichungsseite $= \frac{1}{2}$ ist, und für $\Theta = \frac{\pi}{2}$, in welchem Falle die Ausdrücke auf beiden Gleichungsseiten unendlich gross werden.

2. Setzt man $\alpha = e^{\beta i}$, wo $i = \sqrt{-1}$, so führt die Entwicklung von $(1 - 2\alpha\cos\Theta + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ sogleich zu den Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta - \cos\Theta}} &= \sum P_n \cos n\beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{-\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\beta - \cos\Theta}} &= \sum P_n \sin n\beta \end{aligned}\right\} \text{wenn } \cos\beta > \cos\Theta$$

und 5.)

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sin\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\Theta - \cos\beta}} &= \sum P_n \cos n\beta \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\cos\frac{\beta}{2}}{\sqrt{\cos\Theta - \cos\beta}} &= \sum P_n \sin n\beta \end{aligned}\right\} \text{wenn } \cos\Theta > \cos\beta$$

Aus diesen Gleichungen ergibt sich sodann ferner

$$\sum P_n \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos\Theta - \cos\beta}}, & \text{wenn } \cos\Theta > \cos\beta \\ 0 & \text{wenn } \cos\beta > \cos\Theta \end{cases} \quad 6$$

und

$$\sum P_n \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\cos\beta - \cos\Theta}}, \quad \begin{matrix}\text{wenn} \\ \cos\beta > \cos\Theta\end{matrix}$$
$$= 0 \quad \begin{matrix}\text{wenn} \\ \cos\Theta > \cos\beta\end{matrix}$$

Vermöge des Bildungsgesetzes der Coefficienten in de Entwicklung einer Funktion in eine Sinus- oder Cosinus Reihe, stimmen diese Gleichungen überein mit Integral ausdrücken für P_n, welche Herr Mehler aus den Dirichlet schen Integralformen abgeleitet hat.*)

Integriren wir nun die letzte Reihe nach β von = o bis φ, und nehmen an, dass Θ zwischen o und π ge geben sei und dass $\varphi < \Theta$, so wird

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\Theta}} = \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\psi}{\sqrt{\sin^2\frac{1}{2}\Theta - \sin^2\psi}}$$

oder wenn man $\sin\psi = \sin\frac{1}{2}\Theta \sin\omega$ setzt

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{\varphi} \frac{d\beta}{\sqrt{\cos\beta - \cos\Theta}} = \int_0^{\sigma} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \sin^2\frac{1}{2}\Theta \sin^2\omega}}$$

wo die Winkel φ und σ durch die Gleichung an einande gebunden sind

$$\sin\sigma \cdot \sin\tfrac{1}{2}\Theta = \sin\tfrac{1}{2}\varphi, \qquad (8$$

so dass, wenn φ die Werthe von o bis Θ durchläuft σ von o bis $\frac{\pi}{2}$ wächst.

Hiernach erhalten wir durch Integration nach β au 7.) folgendes Resultat. Ist Θ ein Winkel zwischen o und π so stellt die Reihe

$$\sum \frac{2}{2n+1} P_n \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi \qquad (9$$

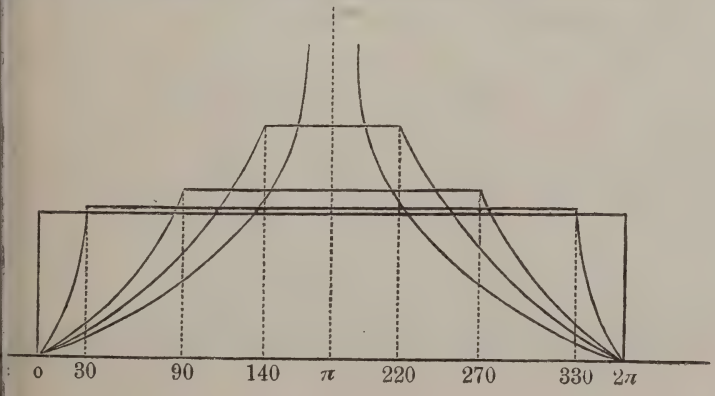
*) Notiz über die Dirichlet'schen Integralausdrücke für die Kuge funktion $P_n(\cos\delta)$. Math. Ann. Bd. V. (1872) S. 141.

lange $\varphi < \Theta$ ist, die Werthe der elliptischen Funktion ster Art

$$\int_0^{\sigma} \frac{d\omega}{\sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{2}\Theta \sin^2 \omega}} \qquad (10.$$

r, deren Amplitude σ aus Gleichung 8.) bestimmt ist. ir $\varphi = \Theta$ erreicht die Reihe den Werth des vollständigen iptischen Integrals 10.), indem $\sigma = \frac{\pi}{2}$ wird. Wächst φ er Θ hinaus, so ändert sich der Werth der Reihe 9.) nicht, e aus den Gleichungen 7.) hervorgeht. Sie behält den- lben Werth von $\varphi = \Theta$ bis $\varphi = 2\pi - \Theta$; worauf sie von $= 2\pi - \Theta$ bis $\varphi = 2\pi$ wieder dieselben Werthe wie von $= 0$ bis $\varphi = \Theta$ in umgekehrter Ordnung durchläuft.

Geometrisch betrachtet stellt mithin die Reihe 9.) ischen $\varphi = 0$ und $\varphi = 2\pi$ eine Linie dar, zusammenge- zt aus zwei Curvenstücken (von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \Theta$ und n $\varphi = 2\pi - \Theta$ bis $\varphi = 2\pi$) deren Ordinaten die ellip- che Funktion 10.) für die Amplituden $\sigma = 0$ bis $\sigma = \frac{\pi}{2}$ räsentiren und einer geraden Linie, welche die End- nkte der beiden Bogen verbindend parallel zur Abscissen- e der φ hinläuft und deren Ordinate das vollständige Integral stellt, wie beistehende Figur zeigt für $\Theta = 0, 30^0, 90^0, 140^0, \pi$.



Da die Reihe 9.) für $\varphi = \pi$ denselben Werth hat wi
für $\varphi = \Theta$, nämlich das vollständige elliptische Integr
10.) darstellt, so hat man für dasselbe auch folgende seh
einfache Entwicklung nach Kugelfunktionen

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\omega}{\sqrt{1-\sin^2\tfrac{1}{2}\Theta \sin^2\omega}} = \sum (-1)^n \cdot \frac{2}{2n+1} P_n \quad (1$$

wo wie oben P_n für $P_n(\cos\Theta)$ gesetzt ist.

Für $\Theta = \pi$, wird $P_n = (-1)^n$, mithin wird d
Reihe 9.)

$$\sum (-1)^n \frac{2}{2n+1} \sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi = \int_0^{\frac{\varphi}{2}} \frac{d\omega}{\cos\omega} = \log.\,\mathrm{tg}\,(\tfrac{1}{4}\pi + \tfrac{1}{4}$$

für $\varphi < \pi$. Der geradlinige Theil in der geometrisch
Darstellung der allgemeinen Reihe 9.) verschwindet
diesem Falle. Die Curve steigt von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \pi$ i
Unendliche, und fällt von $\varphi = \pi$ bis $\varphi = 2\pi$ vom Une
lichen bis zur Abscissenaxe der φ hinab.

Für $\Theta = 0$ hingegen geht die Reihe 9.) in die
kannte Reihe

$$\sum \frac{2}{2n+1} \cdot \sin(n+\tfrac{1}{2})\varphi$$

über, welche von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ den constanten We
$\frac{\pi}{2}$ hat. Hier verschwindet in der geometrischen D
stellung der Reihe 9.) der krummlinige Theil der sich
geradlinige Strecken an den Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi =$
senkrecht zur Abscissenaxe stehend verwandelt, ind
der Werth der Reihe an diesen Grenzen $\varphi = 0$ und $\varphi =$

inen Sprung von o auf $\frac{\pi}{2}$ macht oder nach einer vielleicht chtigeren und mit dem allgemeinen Falle mehr übereinimmenden Auffassung, *) in einem unendlich kleinen Intervall von φ die Werthe von o bis $\frac{\pi}{2}$ durchläuft.

Da $\sqrt{1-2ax+\alpha^2} = -a\int \frac{dx}{\sqrt{1-2\alpha x+\alpha^2}}$ so erhält man it Benützung der Formel

$$\int P_n \sin\Theta \, d\Theta = \frac{1}{2n+1}(P_{n-1} - P_{n+1})$$

fort,

$$\sqrt{1-2\alpha\cos\Theta+\alpha^2} = 1-\alpha\cos\Theta - \sum_{n=1} \frac{1}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1})\alpha^{n+1} \quad (12.$$

id hieraus

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-2\alpha\cos\gamma+\alpha^2}\cdot d\varphi = \frac{2}{\pi}\sqrt{a+b}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\frac{2b}{a+b}\sin^2\psi}\, d\psi$$

$$= 1 - \sum_{n=o} \frac{\alpha^{n+1}}{2n+1}(P_{n+1}P'_{n+1} - P_{n-1}P'_{n-1}) \quad (13.$$

a, b dieselben Werthe haben wie in Formel 1.) und $_1 = o$ zu setzen ist.

Für $\Theta = \Theta'$ wird

$$\frac{2}{\pi}(1-\alpha)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1+\frac{4\alpha\sin^2\Theta}{(1-\alpha)^2}\sin^2\psi}\cdot d\psi =$$

*) Vergl. Du Bois-Reymond „Ueber die sprungweise Aenderung lytischer Funktionen." Math. Ann. Bd. VII. (1874) S. 241.

$$\frac{2}{\pi}\sqrt{(1-\alpha)^2+4\alpha\sin^2\Theta}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\frac{4\alpha\sin\Theta}{(1-\alpha)^2+4\alpha\sin^2\Theta}\sin^2\psi}\cdot d\varphi$$

$$= 1 - \sum_{n=0}\frac{1}{2n+1}(P^2_{n+1} - P^2_{n-1})\,\alpha^{n+1} \qquad (14$$

Je nach der Wahl der Constanten α, Θ' geben diese Gleichungen verschiedene Entwicklungen für das vollständige elliptische Integral zweiter Gattung, und gelten dieselben auch noch für $\alpha = \pm 1$.

Während die Gleichung 12.) für $\alpha = \pm 1$ ergibt

$$\frac{1}{2}\sin\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{1\cdot 5}P_1 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2 - \frac{1}{5\cdot 9}P_3 - \cdots \qquad (15$$

$$\frac{1}{2}\cos\frac{\Theta}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{1\cdot 5}P_1 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2 + \frac{1}{5\cdot 9}P_3 - + \cdots \qquad (16$$

folgt aus Gleichung 14.) für dieselben Werthe von α

$$\frac{1}{\pi}\sin\Theta = \frac{1}{3} - \frac{1}{1\cdot 5}P_1^2 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2^2 - \frac{1}{5\cdot 9}P_3^2 - \cdots \qquad (17$$

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\Theta\cdot\sin^2\varphi}\cdot d\varphi \qquad (18$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{1\cdot 5}P_1^2 - \frac{1}{3\cdot 7}P_2^2 + \frac{1}{5\cdot 9}P_3^2 - + \cdots$$

welche Reihen sich von den voranstehenden 15.) 16.) nu dadurch unterscheiden, dass an die Stelle der P_n die Qua date dieser Polynome treten. Diese Gleichungen gelte

uch noch für $\Theta = 0$ und $\Theta = \frac{\pi}{2}$. Im letzteren Falle educiren sich die beiden Gleichungen 17.) 18.) auf

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2 \cdot 4}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8}\right)^2 + \cdots$$

Hiezu mag noch folgende Reihe angeführt werden, elche sin 2Θ darstellt und erhalten wird, wenn man die eihe 17.) mit cos Θ multiplicirt und vermöge der Relation, elche drei aufeinanderfolgende P aneinanderknüpft, in den nzelnen Gliedern $P_n \cos \Theta$ durch P_{n+1} und P_{n-1} ausdrückt. s ergibt sich sodann

$$2\Theta = \frac{1^2}{1 \cdot 3 \cdot 5} P_0 P_1 - \frac{2^2}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7} P_1 P_2 - \frac{3^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} P_2 P_3 - \frac{4^2}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11} P_3 P_4 - \cdots \quad (19.$$

§ 3.

Auf demselben Wege kann man zu einer Entwicklung r Bessel'schen Cylinderfunktion $J_n(z)$ mittelst Kugelfunkonen gelangen. Ich habe früher gezeigt,*) dass die Entcklung von cos (a cos Θ) und sin (a cos Θ) nach Kugelnktionen ergibt

$$\left.\begin{aligned} \cos(a \cos \Theta) &= A_0 P_0 - A_2 P_2 + A_4 P_4 - + \cdots \\ \sin(a \cos \Theta) &= A_1 P_1 - A_3 P_3 + A_5 P_5 - + \cdots \end{aligned}\right\} \quad 1.$$

$$A_0 = \frac{\sin a}{a} \quad (2.$$

d allgemein

$$A_n = \frac{2n+1}{a} (N_n \sin a - M_n \cos a) \quad (3.$$

, wenn M_n und N_n Zähler und Nenner des n^{ten} Näherungsiches des folgenden Kettenbruchs sind:

*) „Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunktionen einer iablen." Jour. v. Borchardt. Bd. 56 (1859) S, 106.

$$\frac{\sin a}{\cos a} = \operatorname{tg} a = \cfrac{1}{1/a - \cfrac{1}{3/a - \cfrac{1}{5/a - \ddots}}}$$

Es genügen mithin die M_n und N_n den Relationen

$$M_{n+1} - \frac{2n+1}{a} M_n + M_{n-1} = 0$$

$$N_{n+1} - \frac{2n+1}{a} N_n + N_{n-1} = 0$$

und die Funktionen A_n selbst, sind durch die Relation

$$A_n = a\left(\frac{1}{2n-1} A_{n-1} + \frac{1}{2n+3} A_{n+1}\right) \qquad (4$$

aneinander gebunden.

Durch die Reihen 1.) sind die Funktionen A_n als In tegrale gegeben, nämlich

$$(-1)^n A_{2n} = \frac{4n+1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos ax \,.\, P_{2n} dx, \quad (-1)^n A_{2n+1} = \frac{4n+3}{2} \int_{-1}^{+1} \sin ax \,.\, P_{2}$$

woraus mittelst des bekannten Ausdrucks für P_n als n^{t} Differentialquotient allgemein sich ergibt

$$\frac{2}{2n+1} \cdot A_n = \frac{a^n}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \int_0^{\pi} \cos(a \cos \varphi) \sin^{2n+1} \varphi \,.\, \delta\varphi \qquad (5$$

Endlich habe ich a. a. O. S. 119 auch nachgewiesen dass die Funktion A_n durch die hypergeometrische Reih dargestellt wird

$$\frac{1}{2n+1} A_n = \frac{a^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n+1}\left(1 - \frac{a^2}{2(2n+3)} + \frac{a^4}{2 \cdot 4 (2n+3)(2n+5} - +$$

Da nun die Cylinderfunktion $J_n(z)$ durch das Integra

$$\frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots 2n-1} \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(z \cos \varphi) \sin^{2n} \varphi \, d\varphi$$

oder auch durch die hypergeometrische Reihe

$$\frac{z^n}{2.4..2n}\left(1-\frac{z^2}{2.(2n+2)}+\frac{z^4}{2.4.(2n+2)(2n+4)}-+..\right)$$

dargestellt wird, so ersieht man, dass wenn man Cylinder-funktionen mit gebrochenem Index zulassen will, die Funktion ion A_n nur durch einen Zahlenfaktor von der Funktion $a^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(a)$ verschieden ist.*)

Setzen wir nun in den Gleichungen 1.) $\cos\gamma = \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos\varphi$ an die Stelle von $\cos\Theta$ und ntegriren nach φ, so ergibt sich sogleich

$$\left.\begin{aligned}\cos\Theta\cos\Theta')J_o(a\sin\Theta\sin\Theta') &= A_oP_oP_o' - A_2P_2P_2' + A_4P_4P_4' - +\,.\\ \cos\Theta\cos\Theta')J_o(a\sin\Theta\sin\Theta') &= A_1P_1P_1' - A_3P_3P_3' + A_5P_5P_5' - +\,.\end{aligned}\right\} 7.$$

o wie bisher P_n, P_n' für $P_n(\cos\Theta), P_n(\cos\Theta')$ gesetzt ist. Macht man hierin $\Theta' = \Theta$, so wird

$$\left.\begin{aligned}\cos(a\cos^2\Theta)\,J_o(a\sin^2\Theta) &= A_oP_o^2 - A_2P_2^2 + A_4P_4^2 - +\ldots\\ \sin(a\cos^2\Theta)\,J_o(a\sin^2\Theta) &= A_1P_1^2 - A_3P_3^2 + A_5P_5^2 - +\ldots\end{aligned}\right\} 7'$$

Setzt man aber $\Theta' = \frac{\pi}{2}$, so ergibt sich

$$J_o(a\sin\Theta) = A_oP_o + \frac{1}{2}A_2P_2 + \frac{1.3}{2.4}A_4P_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}A_6P_6 + \ldots \Big\} 8.$$

Differentiirt man die erste der Gleichungen 7.) nach und setzt sodann $\Theta' = \frac{\pi}{2}$, so erhält man, da

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\cos\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\,\varphi\,d\varphi = J_1(z)$$

t, **)

---

*) Diese Funktionen A_n sind seitdem mehrfach in Betracht gegen worden, so von Heine, Journ. v. Borchardt. Bd. 69 (1868) S. 128; Weber ebendaselbst S. 233, Lommel, „Ueber die Bessel'schen nktionen." (1868) und Math. Ann. Bd. II. (1870). S. 624.

**) Neumann, Bessel'schen Funktionen." S. 6.

$$\frac{1}{\sin\Theta} J_1(a\sin\Theta) = \sum \frac{1\cdot 3\cdot\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot\cdot 2n} \frac{A_{2n}}{a} \frac{dP_{2n}}{x\,dx}$$

wo $x = \cos\Theta$. Diese Gleichung in Verbindung mit Gleichung 8.) verificirt sofort die Relation

$$J_1(z) = -\frac{dJ_0(z)}{dz}$$

Die für J_1 gefundene Reihe lässt sich auf folgende Weise umformen.

Setzen wir um abzukürzen im Folgenden immer

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot\cdot 2n\cdot 2n+2\cdot 2n+4\cdot\cdot 2n+2k} = \alpha_{n,k}$$

wo k eine ganz positive Zahl und

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot 2n-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdot 2n} = \alpha_{n,o};$$

dann wird die Gleichung für J_1, wenn wir für $\frac{A_{2n}}{a}$ seinen Werth aus der Relation 4.) einsetzen,

$$\frac{1}{\sin\Theta} J_1(a\sin\Theta) = \sum_{n=1} \alpha_{n,o} \left(\frac{A_{2n-1}}{4n-1} + \frac{A_{2n+1}}{4n+3}\right) \frac{dP_{2n}}{x\,dx}$$

oder wenn wir in dem ersten Theile der Reihe n+1 statt n setzen

$$\frac{1}{\sin\Theta} J_1(a\sin\Theta) = \sum_{n=o} \alpha_{n,1} \frac{A_{2n+1}}{4n+3} \left[(2n+1)\frac{dP_{2n+2}}{dx} + (2n+2)\frac{dP_{2n}}{dx}\right]$$

Nun bestehen aber zwischen den Differentialquotienten derselben Ordnung von P_n, P_{n+1} und P_{n-1} eine ganz analoge Relation, wie zwischen diesen Funktionen selbst; man hat nämlich, wie sich leicht erweisen lässt, folgendes System von Relationen

$$(n+1-k)\frac{d^k P_{n+1}}{dx^k} + (n+k)\frac{d^k P_{n-1}}{dx^k} = (2n+1)x\frac{d^k P_n}{dx^k} \quad (9$$

von k=o bis k=n

Hiernach reducirt sich obige Entwicklung von J_1 auf folgende

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sin\Theta}J_1(a\sin\Theta) &= \sum_{n=0}\alpha_{n,1}A_{2n+1}\frac{dP_{2n+1}}{dx}\\ -J_1(a\sin\Theta) &= \sum_{n=0}\alpha_{n,1}A_{2n+1}\frac{dP_{2n+1}}{d\Theta}\end{aligned}\right\}\ 10.$$

Es ist nun nicht schwer nachzuweisen, dass für die Cylinderfunktion $J_k(a\sin\Theta)$ überhaupt, wo k irgend eine ganze positive Zahl ist, die Reihenentwicklung gilt

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{\sin^k\Theta}J_k(a\sin\Theta) &= \sum_{n=0}\alpha_{n,k}A_{2n+k}\frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k}\\ (-1)^kJ_k a\sin\Theta) &= \sum_{n=0}\alpha_{n,k}A_{2n+k}\frac{d^kP_{2n+k}}{d\Theta^k}\end{aligned}\right\}\ 11.$$

eine für reelle Werthe von a und Θ immer convergente Entwicklung. Um die allgemeine Gültigkeit derselben für jeden ganzen positiven Index k nachzuweisen, reicht es hin zu zeigen, dass, wenn sie für J_k und J_{k-1} besteht, auch für J_{k+1} gültig ist. Zu diesem Nachweis kann man sich der, der Relation 4.) analogen, Relation bedienen

$$J_{k+1}(z) = \frac{2k}{z}\cdot J_k(z) - J_{k-1}(z)$$

welche von $k=1$ an statt hat. Setzt man in derselben $z=a\sin\Theta$ und für J_k und J_{k-1} ihre Entwicklung aus 11.) an, so erhält man

$$\frac{1}{\sin^{k-1}\Theta}J_{k+1}(a\sin\Theta) = \sum_{n=0}\alpha_{n,k}\frac{2kA_{2n+k}}{a}\frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k}$$

$$-\sum_{n=0}\alpha_{n,k-1}A_{2n+k-1}\frac{d^{k-1}P_{2n+k-1}}{dx^{k-1}}$$

In der ersten Reihe ersetze man $\frac{A_{2n+k}}{a}$ durch seinen Werth aus der Relation 4.); in der zweiten Reihe ersetze man mittelst der Formel

$$P_n = \frac{1}{2n+1}\left(\frac{dP_{n+1}}{dx} - \frac{dP_{n-1}}{dx}\right) \qquad (12$$

die $k-1^{ten}$ Differentialquotienten der P durch die k^{ten}, so geht die rechte Gleichungsseite über in

$$\sum_{n=0} -2n\,\alpha_{n,k}\frac{A_{2n+k-1}}{4n+2k-1}\frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k} + \sum_{n=0}\alpha_{n,k}\frac{(2n+2k-1)A_{2n+k-1}}{4n+2k+3}\frac{d}{}$$

oder wenn man in der ersten Reihe, deren erstes Glied verschwindet, $n+1$ statt n setzt, in

$$\sum_{n=0}\alpha_{n,k}\frac{A_{2n+k+1}}{4n+2k+3}\left\{(2n+2k+1)\frac{d^kP_{2n+k}}{dx^k} - \frac{(2n+1)(n+1)}{n+k+1}\cdot\frac{d^kP_{2}}{d}\right.$$

Ersetzt man nun wieder die k^{ten} Differentialquotienten der P mittelst der Formel 12.) durch die $k+1^{ten}$ und reducirt mittelst der Relationen 9.) so geht der Ausdruck

$$\frac{1}{4n+2k+3}\left\{\right\} \text{ über in}$$

$$\frac{1-x^2}{2n+2k+2}\cdot\frac{d^{k+1}P_{2n+k+1}}{dx^{k+1}}$$

Hiemit wird nun, da $1-x^2 = \sin^2\Theta$,

$$\frac{1}{\sin^{k+1}\Theta}J_{k+1}(a\sin\Theta) = \sum_{n=0}\alpha_{n,k+1}\,A_{2n+k+1}\,\frac{d^{k+1}P_{2n+k+1}}{dx^{k+1}}$$

übereinstimmend mit der Entwicklung von $J_{k+1}(a\sin\Theta)$ nach der Formel 11.). Da nun vermöge der Gleichungen 8 und 10.) diese Entwicklung gilt für $k=0$ und $k=1$, so gilt sie auch für $k=2, 3$ u. s. f.

Für $\Theta=0$ wird $P_n=1$, für $\Theta=\frac{\pi}{2}$ wird $P_{2n+1}=0$; P $=(-1)^n\alpha_{n,0}$ und man erhält somit aus den vorhergehende Gleichungen folgende Entwicklungen nach Funktionen A,

$$\left.\begin{aligned}
\text{os a} &= \Sigma(-1)^n A_n \\
\text{in a} &= \Sigma(-1)^n A_{2n+1} \\
1 &= A_0 + \frac{1}{2} A_2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} A_4 + \cdots = \Sigma \alpha_{n,0} A_{2n} \\
J_0(a) &= \Sigma(-1)^n \alpha_{n,0}^2 A_{2n} \\
J_k(a) &= \sum (-1)^n \alpha_{n,0}^2 \frac{2n+1\cdot 2n+3\cdots 2n+2k-1}{2n+2\cdot 2n+4\cdots 2n+2k} A_{2n+k} \\
a^k &= \sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots 2n+2k-1}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 2n} A_{2n+k}
\end{aligned}\right\} 13.$$

lle Summen von n=o an genommen.

Die Entwicklung von $J_k(a)$ ergibt sich aus 11) für $= \frac{\pi}{2}$, da

$$\left(\frac{d^k P_{2n+k}}{dx^k}\right)_{x=0} = (-1)^n \cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5 \cdots 2n+2k-1}{2\cdot 4\cdot 6 \cdots 2n}$$

efunden wird. Die Reihe für a^k ergibt sich aus derselben leichung für $\Theta = o$, da einerseits $\sin^{-k}\Theta J_k(a \sin\Theta)$ den Werth $\frac{a^k}{1\cdot 3\cdots 2k}$ annimmt, wie sogleich aus der Reihenentwicklung n $J_k(z)$ nach Potenzen von z folgt, andererseits

$$\left(\frac{d^k P_n}{dx^k}\right)_{x=1} = \frac{n-k+1\cdot n-k+2\cdots n+k}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2k},$$

so

$$\left(\frac{d^k P_{2n+k}}{dx_k}\right)_{x=1} = \frac{2n+1\cdot 2n+2\cdots 2n+2k}{2\cdot 4\cdots 2k}$$

, wie sich am leichtesten aus der Differentialgleichung, lcher P_n genügt und wiederholte Differentiation derben ableiten lässt.

Ausser der Integralform 5.) für A_n, die sich aus der ihenentwicklung 1.) ergibt, lässt sich noch eine andere der Reihe 8.) ableiten. Es ist nach den Gleichungen und 1.)

$$J_o(a\sqrt{1-x^2}) = \Sigma \alpha_{n,o} A_{2n}(a) P_{2n}$$
$$\cos bx = \Sigma(-1)^n A_{2n}(b) P_{2n}$$

wenn A(b) der Werth der Funktion A ist, wenn dari
b statt a gesetzt wird. Da nun bekanntlich $\int P_m P_n dx =$
ist, wenn $m \gtrless n$, $= \frac{2}{2n+1}$, wenn $m = n$, (das Integral zwische
den Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ genommen), so folgt so
fort durch Multiplication der beiden Reihen und Integratio
zwischen denselben Grenzen

$$\int_{-1}^{+1} \cos bx \cdot J_o(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \sum (-1)^n \frac{13\cdots 2n-1}{2\cdot 4\,..\,2n} \cdot \frac{2}{2n+2} \cdot A_{2n}(a) A_{2}$$

Der Werth des Integrals ändert sich hienach nicht
wenn man a und b vertauscht, d. h. es ist

$$\int_{-1}^{+1} \cos bx \,.\, J_o(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \int_{-1}^{+1} \cos ax \,.\, J_o(b\sqrt{1-x^2})\,dx \quad (15$$

Auf ähnliche Weise lässt sich nachweisen, dass

$$a\int_{-1}^{+1} \sin bx \cdot J_o(a\sqrt{1-x^2})\,dx = b\int_{-1}^{+1} \sin ax \cdot J_o(b\sqrt{1-x^2}) \cdot x\,dx\,(1$$

ist.

Entwickelt man in der ersteren der beiden Gleichunge
15.) nach Potenzen von b, so kommt

$$\sum \frac{(-1)^n b^{2n}}{1\cdot 2\,..\,2n} \int_{-1}^{+1} x^{2n} J_o(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \sum \frac{(-1)^n b^{2n}}{(2\cdot 4\cdots 2n)^2} \int_{-1}^{+1} \cos ax \cdot (1-$$

Die Gleichsetzung der Coefficienten von b^{2n} in de
beiden Reihen gibt, da das Integral auf der rechten Seit
für $x = \cos\Theta$ in das Integral 5.) übergeht

$$\frac{1}{1\cdot 3\,..\,2n-1} \int_{-1}^{+1} x^{2n} J_o(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{2}{2n+1} \cdot \frac{A_n}{a^n} \quad (1$$
$$= \frac{2}{a^{n+1}} \quad (N_n \sin a - M_n \cos$$

Speziell erhält man für n=o

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} J_o(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \frac{\sin a}{a}.$$

Das Integral in 17.) lässt sich noch in anderer Form durch die Funktionen A darstellen Es ist nämlich*)

$$x^{2n} = \sum_{r=o}^{r=n} (4r+1)\,\frac{2n\cdot 2n-2\cdot\cdot 2n-2r+2}{2n+1\cdot 2n+3\cdots 2n+2r+1} P_{2r}$$

(das r=o entsprechende Glied der Reihe ist $\frac{1}{2n+1}\ P_o$);

multiplicirt man diese Reihe mit der Reihe 8) für $J_o(a\sqrt{1-x^2})$ und integrirt zwischen den Grenzen x=−1 und x=+1, so erhält man sofort

$$\int_{-1}^{+1} x^{2n} J_o(a\sqrt{1-x^2})\,dx = \sum_{r=o}^{r=n} \alpha_{r,o}\,\frac{2n\cdot 2n-2\cdot\cdot 2n-2r+2}{2n+1\cdot 2n+3\cdot\cdot 2n+2r+1} A_{2r} \quad (18.$$

wo für das r=o entsprechende Glied der Summe $\frac{A_o}{2n+1}$ zu nehmen ist. Vergleicht man diesen Werth des Integrals mit dem in 17.), so ergibt sich

$$1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdot 2n-1\cdot\frac{A_n}{a^n} = \sum_{r=o}^{r=n} \alpha_{r,o}\,\frac{2n\cdot 2n-2\cdot\cdot 2n-2r+2}{2n+3\cdot 2n+5\cdot\cdot 2n+2r+1} A_{2r} \quad (19.$$

wo für das r=o entsprechende Glied A_o zu nehmen ist. Dass $a^{-n} A_n$ sich durch eine Reihe der A von A_o bis A_{2n} darstellen lasse, geht sogleich aus der Relation 4.) hervor. Die Gleichung 19.) gibt das Gesetz an, nach welchem die Coefficienten dieser Reihe gebildet sind.

§ 4.

Schliesslich möge hier noch eine Bemerkung Platz finden über die Entwicklung einer Funktion nach Kugelfunktionen.

*) „Reihen von Kugelfunktionen". Jour. v. Borchardt. Bd. 56, S. 113, oder Heine „Kugelfunktionen". S. 38.

Betrachten wir die endliche Reihe

$$1 \cdot P'_o P_o + 3 \cdot P'_1 P_1 + 5 P'_2 P_2 + \cdots + (2n+1) P'_n P_n$$

wo, wie bisher P_n für $P_n(x)$ oder $P_n(\cos \Theta)$, P'_n für $P_n(x')$ oder $P'_n(\cos \Theta')$ gesetzt ist. Die Summe dieser Reihe ist leicht zu finden. Denn multiplicirt man sie mit x und ersetzt x P mittelst der bekannten Relation durch die benachbarten P, zieht hierauf dieselbe Reihe mit x' multiplicirt davon ab, so verschwinden, da zwischen den P' dieselbe Relation besteht wie zwischen den P, alle Glieder ausser den mit P_n und P_{n+1} behafteten, und man erhält das Resultat $(n+1)(P'_n P_{n+1} - P'_{n+1} P_n)$.

Bezeichnet man also das Polynom, welches durch obige Reihe dargestellt wird, mit $\pi_n(x,x')$, so ist

$$\Pi_n(x,x') = (n+1) \cdot \frac{P'_n P_{n+1} - P'_{n+1} P_n}{x - x'} \qquad (1.$$

Dieses Polynom ist schon von Herrn Christoffel in seiner oben angeführten Abhandlung über die Gauss'sche Quadratur *) betrachtet worden. Es soll nun aber gezeigt werden, wie dieses Polynom zur Entwicklung einer beliebigen Funktion nach Kugelfunktionen führt.

Sei f(x) eine Funktion, die zwischen den Grenzen $x = -1$ und $x = +1$ nicht unendlich wird, und betrachten wir das Integral

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x') \cdot \Pi_n(x,x') dx' \qquad (2.$$

so erhält man, wenn man darin für Π_n seine Entwicklung nach den P einsetzt

$$\sum_{n=0}^{n=n} \left(\frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{+1} f(x') P'_n dx' \right) \cdot P_n \qquad (3.$$

Man ersieht, dass das Gesetz dieser Reihe übereinstimmt mit dem Gesetz der Entwicklung der Funktion f(x) nach Kugelfunktionen. Um nun den Werth der Reihe 3.)

*) Journ. von Borch. Bd. 55. S. 73.

zu finden, wenn wir dieselbe in's Unendliche fortsetzen, haben wir nur den Werth des Integrals 2.) zu suchen, wenn n über alle Grenzen hinaus wächst. Hiezu können wir uns des Poisson'schen Näherungswerthes von P_n für sehr grosse Werthe von n bedienen

$$P_n(\cos\Theta) = \left(\frac{2}{n\pi\sin\Theta}\right)^{\frac{1}{2}} \cos[(n+\tfrac{1}{2})\Theta - \tfrac{1}{4}\pi]$$

Führt man diesen Werth von P_n und die entsprechenden für P_{n+1}, P'_n, P'_{n+1}, sowie $\cos\Theta$ und $\cos\Theta'$ für x und x' in das Integral 2.) ein, so geht dasselbe nach einigen leichten Reduktionen in folgendes über:

$$f(\cos\Theta')\sqrt{\frac{\sin\Theta'}{\sin\Theta}}\left\{\frac{\sin(n+1)(\Theta'-\Theta)}{\sin\frac{\Theta'-\Theta}{2}} - \frac{\cos(n+1)(\Theta'+\Theta)}{\sin\frac{\Theta'+\Theta}{2}}\right\}d\Theta',$$

dessen Werthbestimmung nach den Dirichlet'schen Betrachtungen über die Convergenz der Sinus- und Cosinusreihen (Crelle Journ. Bd. 4) sich ergibt. Mittelst des Integrals

$$\frac{1}{\pi}\int_g^h \varphi(\alpha)\cdot\frac{\sin k\alpha}{\sin\alpha}d\alpha$$

welches $= \varphi(o)$, wenn g und h verschiedenes Zeichen haben hingegen $= o$ ist, wenn g und h von gleichen Zeichen sind, als eine unendlich grosse positive Zahl vorausgesetzt, beweisst man sofort, dass der erste Theil obigen Integrals sich auf $f(\cos\Theta)$ reducirt, während der andere verschwindet. Hiemit ist nachgewiesen, dass die Reihe 3.) ins Unendliche fortgesetzt, den Werth $f(x)$ hat, es müsste denn sein, dass für ein bestimmtes x die Funktion f eine Unstetigkeit erleidet, in welchem Falle der Werth der Reihe nach Dirichlet'scher Auffassung $= \frac{1}{2}[f(x+o) + f(x-o)]$ ist.

Andererseits hat man das Resultat, dass wenn eine Funktion $f(x)$ in eine Reihe nach Kugelfunktionen entwickelt gegeben ist

$$f(x) = c_0 P_0 + c_1 P_1 + c_2 P_2 + \cdots + c_n P_n + \cdots.$$

das Integral

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x')\, \Pi_n(x, x')\, dx'$$

genau die Summe der $n+1$ ersten Glieder bis zu dem Gliede mit P_n incl. darsellt. Nebenbei folgt hieraus auch die bemerkenswerthe Eigenschaft der Funktion $\Pi_n(x, x')$, dass wenn $\varphi(x)$ eine ganze Funktion vom Grade $m<n$ ist, immer

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \varphi(x')\, \Pi_n(x, x')\, dx' = \varphi(x)$$

ist.

Bricht man die Reihe für $f(x)$ nach dem Gliede $c_n P_n$ ab, so ist der Rest der Reihe

$$R_n = f(x) - \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} f(x')\, \Pi_n(x, x')\, dx'$$

oder da

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} \Pi_n(x, x')\, dx = 1,$$

$$R_n = \frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} [f(x) - f(x')]\, \Pi_n(x, x')\, dx'$$

$$= \frac{n+1}{2}\int_{-1}^{+1} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} (P'_n P_{n+1} - P'_{n+1} P_n)\, dx'$$

Setzt man daher

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x) - f(x')}{x - x'} P'_m dx = \varphi_m(x),$$

so wird der Rest der Reihe für $f(x)$ vom Gliede $c_{n+1} P_{n+1}$ an

$$R_n = \frac{n+1}{2}\left\{ \varphi_n(x) P_{n+1}(x) - \varphi_{n+1}(x) P_n(x) \right\}.$$

PROGRAMM

des k. k. deutschen

NEUSTÄDTER STAATS-GYMNASIUMS

ZU PRAG

am Schlusse des Schuljahres

1877.

Herausgegeben von Dr. A. BAUER, k. k. Director.

Inhalt:

I. Die Exhaustionsmethode
II. Bemerkungen über einige Reihen } vom Director.
III. Schulnachrichten

ÖFFENTLICHE OBERREALSCHULE DER INNEREN STADT

PRAG.

K. k. Hofbuchdruckerei von Ignaz Fuchs. — Selbstverlag.

Die Exhaustionsmethode, in einfacher, streng wissenschaftlicher Darstellung, durch Aufgaben aus der Mathematik und Physik erläutert.

Von Dr. A. Bauer.

(Mit 10 Figuren im Text.)

Einleitung. In der nachstehenden Abhandlung habe ich den Grenzwerth des Ausdrucks $\frac{\Sigma n^{m-1}}{n^m}$ auf eine sehr einfache Art abgeleitet, um die häufigere Verwendung der Exhaustionsmethode zur streng wissenschaftlichen Lösung von wichtigen Aufgaben der elementaren Mathematik und Physik an den Mittelschulen (Gymnasien und Realschulen) zu ermöglichen.

Alle an Mittelschulen vorkommenden mathematischen und physikalischen Aufgaben, welche die Bestimmung des Grenzwerthes einer unendlichen Reihe erheischen, sollten in der Regel mittels der Exhaustionsmethode gelöst werden, wenn die Lösung eine naturgemässe und den denkenden Schüler befriedigende sein soll.

Man verfällt bei der Lösung solcher Aufgaben in einen zweifachen Fehler. Der erste besteht darin, dass man kurz sein will, indem man beispielsweise ein unendlich kleines Stückchen einer Curve mit der Sehne des Bogens vertauscht, die Secante durch zwei unendlich nahe gelegene Punkte der Curve für die durch einen dieser Punkte gezogene Tangente nimmt, ein unendlich schmales Streifchen einer ebenen, krummlinig begrenzten Figur als Rechteck berechnet, den bei einer ungleichförmigen Bewegung während eines unendlich kleinen Zeittheilchens zurückgelegten Weg so bestimmt, als ob derselbe mit unveränderlicher Geschwindigkeit beschrieben worden wäre u. s. w. Das aus irgend einer Untersuchung gewonnene Ergebnis kann für die Praxis recht wichtig sein; weit wichtiger jedoch erscheint mir die durch eine streng logische Behandlung zu erzielende Verstandesschärfung des Studirenden, die durch den genannten oberflächlichen Vorgang

nicht erreicht wird. Wenn aber im Verlaufe einer Untersuchung unendlich kleine Grössen vernachlässigt werden, ja wenn sich diese Vernachlässigung, wie es gewöhnlich der Fall ist, unendlich oftmal wiederholt, so muss der denkende Kopf das erhaltene Resultat als nur angenähert richtig betrachten, während es doch ganz genau ist. Sucht man jedoch zuweilen einen Näherungswerth, so ist dies zu bemerken.

Der zweite Fehler, der bei der oben genannten Art von Aufgaben vorkommt, ist der, dass die Behandlung weitschweifig und dadurch weniger übersichtlich wird, und der Schüler die Lösung der jeweiligen Aufgabe als ein Kunststück besonderer Art ansieht, den Kern der Sache nur mit Mühe herausschält und in der Art der Lösung ein naturgemässes, vielfach verwendbares Princip nicht erkennt. Wird jedoch lim $\frac{\Sigma n^{m-1}}{n^m}$ oder noch einfacher blos lim $\frac{\Sigma n}{n^2}$ und lim $\frac{\Sigma n^2}{n^3}$ abgeleitet, was jeder Schüler der Oberklassen einer Mittelschule sofort auffasst, wird ferner das Wesen der Exhaustionsmethode als einer allgemeinen Methode zur Lösung einer bestimmten Klasse von Aufgaben klar entwickelt, so ist jeder halbwegs begabte Schüler im Stande, bei geringer Nachhilfe von Seite des leitenden Lehrers alle Aufgaben sofort zu lösen. Dadurch erscheint die Lösung dem Schüler als Ergebnis seiner eigenen Verstandesthätigkeit, ein Umstand, der nicht wenig dazu beiträgt, die Liebe für das mathematische Studium zu wecken und zu erhalten.

In der nachfolgenden Abhandlung, welche die wichtigeren, hierher gehörigen und für Mittelschulen geeigneten Aufgaben durch die Exhaustionsmethode löst, suchte ich Oberflächlichkeit und Weitschweifigkeit zu vermeiden.

Dass lim $\frac{\Sigma n^{m-1}}{n^m}$ eigentlich das Integral $\frac{\int x^{m-1} dx}{x^m} = \frac{1}{m}$ oder $\int x^{m-1}\, dx = \frac{x^m}{m}$ für ein ganzes positives m ist, wird der Fachmann gleich erkannt haben.

Die Anwendung der Exhaustionsmethode kann auch als Vorbereitung zum Studium der Differential- und Integralrechnung insofern recht nützlich werden, als sich der Schüler der Summirung der sogenannten Elemente fort bewusst bleiben muss. Die Methode führt, wenn einmal aufgefasst, eben so rasch und elegant zum Ziele, wie die Integralrechnung.

Hinsichtlich der einzelnen Aufgaben muss ich auf ein bisher unbeachtetes Princip bei der Berechnung des Trägheits-

momentes (§ 9) besonders aufmerksam machen. Dasselbe, etwas an das Kräfteparallelogramm erinnernd, erweist sich als ausserordentlich fruchtbar, wie schon die wenigen hier aufgeführten Beispiele zeigen. Hiemit wird die Aufsuchung des Trägheitsmomentes der Flächen eines Rechteckes, eines Dreieckes und eines Kreises auf die Kenntnis des Trägheitsmomentes einer Geraden zurückgeführt. Während man diese Untersuchungen ihrer grossen Schwierigkeiten halber in elementaren Büchern der Physik gewöhnlich weglässt, werden dieselben mit Hilfe des von mir aufgestellten Princips mühelos geführt und gewähren ausserdem eine klare Einsicht in das Wesen der Sache.

§ 1.

Bestimmung einiger Grenzwerthe.

a) Wir gehen von der identischen Gleichung $n^2-(n-1)^2=2n-1$ aus, welche die Differenz zwischen dem n^{ten} und $(n-1)^{ten}$ Gliede aus der Reihe der 2ten Potenzen der natürlichen Zahlen darstellt. Indem man in dieser Gleichung nacheinander $n=1, 2, 3 \ldots n$ setzt, erhält man

$$\begin{aligned} 1^2 &= 2\cdot 1 - 1 \\ 2^2 - 1^2 &= 2\cdot 2 - 1 \\ 3^2 - 2^2 &= 2\cdot 3 - 1 \\ 4^2 - 3^2 &= 2\cdot 4 - 1 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n^2 - (n-1)^2 &= 2\cdot n - 1 \end{aligned}$$

Wird nun addirt und beachtet, dass der Minuend eines jeden links vom Gleichheitszeichen stehenden Ausdrucks sich gegen den Subtrahend der nächsten Zeile hebt, so bekommt man

$$n^2 = 2\,(1+2+3+\cdots+n) - n$$

oder unter Anwendung des Summenzeichens

$$n^2 = 2\,\Sigma(n) - n,$$

woraus

$$\Sigma(n^1) = \frac{n(n+1)}{1\cdot 2}$$

folgt.

b) Verfährt man in ähnlicher Weise mit

$$n^3 - (n-1)^3 = 3n^2 - 3n + 1,$$

so wird

$$
\begin{aligned}
1^3 &= 3 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + 1 \\
2^3 - 1^3 &= 3 \cdot 2^2 - 3 \cdot 2 + 1 \\
3^3 - 2^3 &= 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 3 + 1 \\
4^3 - 3^3 &= 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 4 + 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n^3 - (n-1)^3 &= 3 \cdot n^2 - 3 \cdot n + 1 \\
\hline
n^3 &= 3\,\Sigma(n^2) - 3\,\Sigma(n^1) + n,
\end{aligned}
$$

woraus

$$
\begin{aligned}
\Sigma(n^2) &= \frac{n^3 - n}{3} + \Sigma(n^1) = \frac{n(n^2-1)}{3} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2} \\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}.
\end{aligned}
$$

c) Aus $n^4 - (n-1)^4 = 4n^3 - 6n^2 + 4n - 1$ wird für $n = 1, 2, 3 \cdots n$

$$
\begin{aligned}
1^4 &= 4 \cdot 1^3 - 6 \cdot 1^2 + 4 \cdot 1 - 1 \\
2^4 - 1^4 &= 4 \cdot 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 4 \cdot 2 - 1 \\
3^4 - 2^4 &= 4 \cdot 3^3 - 6 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
n^4 - (n-1)^4 &= 4n^3 - 6 \cdot n^2 + 4 \cdot n - 1 \\
\hline
n^4 &= 4\,\Sigma(n^3) - 6\,\Sigma(n^2) + 4\,\Sigma(n^1) - n
\end{aligned}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
\Sigma(n^3) &= \frac{n^4 + n}{4} + \frac{3}{2}\,\Sigma(n^2) - \Sigma(n^1) \\
&= \frac{n(n^3+1)}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{4} - \frac{2n(n+1)}{4}.
\end{aligned}
$$

Wird $n^3 + 1 = (n+1)(n^2 - n + 1)$ gesetzt, so ergibt sich durch Heraushebung des gemeinschaftlichen Factors $\frac{n(n+1)}{4}$

$$
\Sigma(n^3) = \left\{\frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}\right\}^2 = (\Sigma(n))^2
$$

d) Dass man auf diesem Wege weiter fortschreiten könnte, ist selbstverständlich. Wir wollen dieses immer mühevoller werdende Geschäft nicht unternehmen, da es von keiner praktischen Bedeutung ist. Von grosser Wichtigkeit jedoch sind die Grenzwerthe, welchen sich die durch eine passende Potenz von n dividirten Summen der Potenzen der natürlichen Zahlen bei unendlichem Wachsen von n ohne Ende nähern.

Aus

$$
\Sigma(n^1) = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}
$$

wird durch Division mit n^2

$$
\frac{\Sigma(n^1)}{n^2} = \frac{1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2},
$$

woraus sofort für $n = \infty$

$$\lim \frac{\Sigma(n^1)}{n^2} = \frac{1}{2}$$

folgt.

Aus

$$\Sigma(n^2) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

erhält man

$$\frac{\Sigma(n^2)}{n^3} = \frac{1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

und für $n = \infty$

$$\lim \frac{\Sigma(n^2)}{n^3} = \frac{1}{3}.$$

Aus

$$\Sigma(n^3) = \frac{n \cdot n(n+1)(n+1)}{4}$$

ergibt sich

$$\frac{\Sigma(n^3)}{n^4} = \frac{1 \cdot 1 \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)}{4}$$

und für $n = \infty$

$$\lim \frac{\Sigma(n^3)}{n^4} = \frac{1}{4}.$$

e) Die zwei ersten Grenzwerthe allein reichen hin, um mit Hilfe der Exhaustionsmethode eine grosse Zahl wichtiger Aufgaben aus der Mathematik und Physik zu lösen. Die oben angegebene Bestimmungsweise kann selbst einem Schüler der 5. Gymnasialklasse leicht klar gemacht werden. Der Ausdruck Grenzwerth muss ja ohnedies seiner hohen Wichtigkeit halber schon dem Schüler der 5. Klasse zum Verständniss gebracht werden*).

---

*) Ich mache hier nur auf die Verwandlung periodischer Decimalbrüche in gemeine, auf das Verhältniss incommensurabler Grössen, auf die Berechnung der Kreisfläche u. s. w. aufmerksam, und kann es nicht unterlassen, auf die oft ungenaue Ausdrucksweise bei Behandlung dieser Gegenstände wiederholt das Augenmerk der Lehrer zu richten. Liegt beispielsweise der Bruch 0,333 ... vor, so muss es heissen: der Grenzwerth, welchem sich dieser Bruch bei unendlichem Wachsen seiner Zifferzahl ohne Ende nähert, ist $\frac{1}{3}$. Den Kreis als ein Vieleck von unendlich vielen Seiten zu erklären, ist ungenau. Die Kreisfläche ist die Grenze, welcher sich die Fläche des regelmässigen Sehnenvieleckes bei unendlich wachsender Seitenzahl ohne Ende nähert u. s. w.

§ 2.

Ein allgemeinerer Grenzwerth.

Der Vollständigkeit wegen soll noch ein Ausdruck für die Summe der m^{ten} Potenzen der natürlichen Zahlen entwickelt werden.

Aus

$$n^m - (n-1)^m$$

wird mit Hülfe des binomischen Satzes

$$n^m - (n-1)^m = \binom{m}{1} n^{m-1} - \binom{m}{2} n^{m-2} + \binom{m}{3} n^{m-3} \cdots + (-1)^{m+1} \binom{m}{m} n^0$$

Die Reihe bricht von selbst mit dem Gliede ab, dessen Coefficient 1 ist.

Indem man wie früher der Reihe nach $n = 1, 2, 3 \cdots n$ setzt und addirt, wird

$$n^m = \binom{m}{1} \Sigma n^{m-1} - \binom{m}{2} \Sigma n^{m-2} + \binom{m}{3} \Sigma n^{m-3} - + \cdots$$

und hieraus

$$\Sigma n^{m-1} = \frac{n^m}{m} + \frac{1}{2}\binom{m-1}{1} \Sigma n^{m-2} - \frac{1}{3}\binom{m-1}{2} \Sigma n^{m-3} + \frac{1}{4}\binom{m-1}{3} \Sigma n^{m-4} \cdots + (-1)^m \frac{1}{m}\binom{m-1}{m-1} \Sigma n^0$$

Für $m = 2$ bricht die Reihe mit dem zweiten Gliede ab, welches nur die erste Potenz von n enthält, da $\Sigma n^0 = n$ ist. Es bestimmt daher das Glied $\frac{n^m}{m}$ den Grad, hier den 2. der Reihe.

Für $m = 3$ hat die Reihe drei Glieder, das dritte ist in Bezug auf n vom 1., das 2. vom 2. und $\frac{n^m}{n}$ vom 3. Grade.

Indem man diese Betrachtungen fortgesetzt denkt, erkennt man, dass die Reihe folgende Form haben muss:

$$\Sigma n^{m-1} = \frac{n^m}{m} + a n^{m-1} + b n^{m-2} + c n^{m-3} + \cdots + p n',$$

worin $a, b, c, \cdots p$ von n unabhängige Zahlen vorstellen.

Wird durch n^m dividirt, so ergibt sich

$$\frac{\Sigma n^{m-1}}{n^m} = \frac{1}{m} + \frac{a}{n} + \frac{b}{n^2} + \cdots + \frac{p}{n^{m-1}},$$

woraus sofort für $n = \infty$

$$\lim \frac{\Sigma n^{m-1}}{n^m} = \frac{1}{m}$$

folgt.

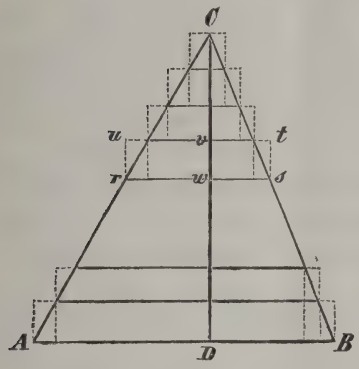
§ 3.

Die Exhaustionsmethode.

1) Wir erläutern zunächst das Wesen der Exhaustionsmethode an einem Beispiele.

Um die Fläche des Dreieckes (Fig. 1) ABC zu finden, theilen wir dessen Höhe $CD = h$ in n gleiche Theile und ziehen durch jeden Theilungspunkt eine zur Basis $AB = a$ parallele Gerade; diese Parallelen von dem Scheitel des Dreieckes aus gerechnet sind

Fig. 1.



$$\frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \frac{3}{n}a, \cdots \frac{n}{n}a$$

und bilden zugleich die unteren Grundlinien der entstandenen Flächenstreifen. Die oberen Grundlinien dieser Streifen sind

$$0, \frac{1}{n}a, \frac{2}{n}a, \frac{3}{n}a \cdots \frac{n-1}{n}a.$$

Wenn man nun jedem Streifen ein Rechteck um- und einschreibt, so ist die Dreieckfläche $\triangle$ offenbar kleiner als die Summe der umgeschriebenen Rechtecke, oder

$$\triangle < \frac{1}{n}a \cdot \frac{h}{n} + \frac{2}{n}a \cdot \frac{h}{n} + \frac{3}{n}a \cdot \frac{h}{n} + \cdots + \frac{n}{n}a \cdot \frac{h}{n}$$

aber

$$\triangle > 0 + \frac{1}{n}a \cdot \frac{h}{n} + \frac{2}{n}a \cdot \frac{h}{n} + \cdots \cdots \frac{n-1}{n}a \cdot \frac{h}{n}.$$

Durch Herausstellung der gemeinsamen Factoren wird

$$\triangle < ah \cdot \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + n)$$

oder

$$\triangle > ah \cdot \frac{1}{n^2}(1 + 2 + 3 + \cdots + \overline{n-1})$$

Mit Anwendung des Summenzeichens Σ:

$$\triangle < ah \frac{\Sigma(n)}{n^2}$$

$$\triangle > ah \frac{\Sigma(n-1)}{n^2}.$$

Bei unendlichem Wachsen von n nähern sich die beiden Schranken der Grenze $(\frac{1}{2}\, ah)$, welche der Inhalt des Dreieckes sein muss, da dieses immer zwischen jenen Schranken liegt.

Es ist daher $\triangle = \lim ah \,.\, \frac{\Sigma(n)}{n^2} = \frac{1}{2}\, ah.$

Das Exhaustionsverfahren zur Berechnung einer unbekannten Grösse lässt sich mit Hülfe des vorstehenden Beispiels in folgender Weise verständlich machen.

Um eine unveränderliche Grösse zu bestimmen, theile man dieselbe in n Theile, suche den Ausdruck für die obere und untere Schranke eines jeden Theiles. Die Summen der oberen und unteren Theilschranken bilden die Schranken für die zu bestimmende Grösse. Wenn sich nun diese Schranken bei unendlichem Wachsen von n einer gemeinschaftlichen Grenze ohne Ende nähern, so ist diese der Ausdruck für die gedachte Grösse.

Die beiden Schranken nähern sich dann derselben Grenze, wenn ihr Unterschied bei unendlichem Wachsen von n der Null zustrebt. So ist in obigem Beispiele der Unterschied der Schranken das dem untersten Streifen umgeschriebene Rechteck $\frac{ah}{n}$, welches für $n = \infty$ unendlich klein wird.

Da die Grenze der Schranken eine und dieselbe Grösse ist, so genügt es offenbar, nur die Grenze der einen Schranke zu finden. Wenn daher, wie es in der Regel und auch im obigen Beispiele der Fall ist, die obere Schranke irgend eines Theiles gleichzeitig die untere Schranke des nächsten Theiles und die untere Schranke des ersten Theiles Null ist, so ist der Unterschied der beiden Hauptschranken die letzte obere Theilschranke $\left(\text{im Beisp. } \frac{ah}{n}\right)$. Man kann dann die gesuchte Grösse ohne Weiteres sofort der Grenze der einen Hauptschranke gleichsetzen.

Wenn man nun das Vorstehende in Schlagworten zusammenfassen will, so kann man sagen:

Theile die zu berechnende Grösse in n Theile, stelle die unteren oder oberen Schranken derselben auf, beachte, ob der Unterschied der Schranken unendlich klein wird für $\lim n = \infty$, so ist die gesuchte Grösse der Grenzwerth der einen oder anderen Hauptschranke.

2) Behufs Bestimmung des Inhaltes einer Pyramide mit der Basis a und der Höhe h theile man die Höhe in n gleiche Theile, lege durch jeden Theilungspunkt eine zur Basis parallele Ebene, und denke sich einer jeden entstandenen Pyramidalschichte ein Prisma umgeschrieben.

Wird die m^{te} Schnittebene von der Spitze aus mit x_m, der Inhalt der m^{ten} Schichte mit y_m bezeichnet, so ergibt sich unter Beachtung der bekannten Proportion $\frac{x_m}{a} = \frac{\left(\frac{m}{n} h\right)^2}{h^2} = \frac{m^2}{n^2}$,

$$y_m < x_m \cdot \frac{h}{n}$$

oder

$$y_m < a h \cdot \frac{m^2}{n^3}.$$

Indem man der Reihe nach $m = 1, 2, 3 \cdots n$ setzt und addirt, erhält man den Inhalt J der Pyramide

$$J = \lim a h \frac{\Sigma m^2}{n^3} = \tfrac{1}{3} a h.$$

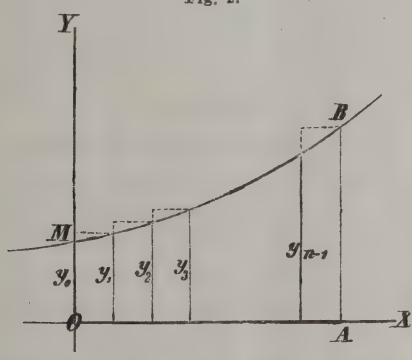
Dass der Unterschied der Hauptschranken das unterste umgeschriebene Prisma ist, wird man wohl bemerkt haben.

§. 4.

Ein allgemeiner Lehrsatz über die Bestimmung der Flächen ebener Figuren.

Es sei $y = f(x)$ die Gleichung einer ebenen Curve (Fig. 2) gegeben und der Inhalt der Fläche $OABM$ zu bestimmen, welche von der Ordinatenachse, einem Bogen MB und den Coordinaten $OA = h$ und $AB = k$ seines Endpunktes eingeschlossen ist.

Fig. 2.



a) Wir nehmen zuerst an, dass die Ordinate mit wachsendem x wächst.

Wenn man h in n gleiche Theile theilt, die durch die Theilungspunkte gehenden Ordinaten $y_1, y_2, y_3 \cdots$ zieht, den Inhalt des r^{ten} Flächenstreifens mit v_r bezeichnet, so ist der Inhalt des diesem Streifen umgeschriebenen Rechteckes die obere Schranke des Streifens, also

$$v_r < y_r \cdot \frac{h}{n},$$

worin y_r der aus der Gleichung $y = f(x)$ fliessende Werth von y ist, wenn $x = r \cdot \frac{h}{n}$ gesetzt wird.

Da die Differenz zwischen der Summe der oberen und unteren Schranken das dem n^{ten} Streifen umgeschriebene Rechteck ist, welches für $n = \infty$ der Null ohne Ende zustrebt, so ergibt sich der Inhalt J der Fläche

$$J = \lim \left[y_1 \frac{h}{n} + y_2 \frac{h}{n} + \cdots + y_n \cdot \frac{h}{n} \right],$$

oder kürzer

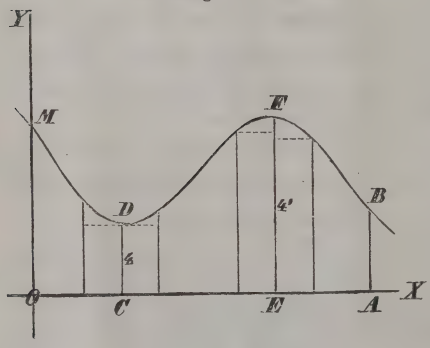
$$J = \lim \Sigma \left(y_r \cdot \frac{h}{n} \right),$$

worin das Summenzeichen Σ so zu verstehen ist, dass man für r der Reihe nach 1, 2, 3 $\cdots$ n setzt und die erhaltenen Werthe addirt.

b) Würde y mit wachsendem x fortwährend abnehmen, so ist offenbar $v_r > y_r \cdot \frac{h}{n}$, und man bestimmt eigentlich J als Grenzwerth der unteren Schranke, wodurch dieselbe Formel wie in a) entsteht.

c) Wenn endlich die Ordinate der Curve (Fig. 3) mit wachsendem x zwischen den Grenzordinaten der Fläche mehrmals wächst oder abnimmt, so bleibt doch die Formel $J = \lim \Sigma \left(y_r \cdot \frac{h}{n} \right)$ ungeändert. Um dies einzusehen, betrachten wir eine Curve, welche zuerst fällt, dann steigt und wieder fällt, für welche also die Ordinate abnimmt, dann wächst und wieder abnimmt.

Fig. 3.



Wenn zufällig die kleinste und grösste Ordinate mit den durch Theilungspunkte von h gelegten Ordinaten zusammenfällt, so lehrt eine einfache Betrachtung der Fig. 3, dass bei der Bestimmung der unteren Schranken die kleinste Ordinate η zweimal erscheint, während die grösste Ordinate η' gar nicht vorkommt. Die untere Schranke ist demnach:

$$y_1 \frac{h}{n} + y_2 \frac{h}{n} + \cdots + \eta \frac{h}{n} + \cdots + y_n \frac{h}{n} + \left(\eta \frac{h}{n} - \eta' \frac{h}{n} \right).$$

Da jedoch der Ausdruck $\eta \frac{h}{n} - \eta' \frac{h}{n}$ bei unendlich wachsendem n unendlich klein wird, so nimmt er auf die Bestimmung

des Grenzwerthes der vorstehenden Summe keinen Einfluss und kann sofort weggelassen werden.

Dann ist wieder

$$J = \lim \Sigma\left(y_r \cdot \frac{h}{n}\right).$$

Würde aber kein Theilungspunkt der Abscisse h durch die Fusspunkte C und D der kleinsten und grössten Ordinate gehen, was wohl gewöhnlich stattfindet, so treten an die Stelle von η und η' die ihnen nächstgelegenen Ordinaten, welche von jenen für $n = \infty$ nur um eine ohne Ende abnehmende Grösse verschieden sind, und deshalb keinen Einfluss auf den Grenzwerth der Summe haben. Man kann deshalb in

$$y_1 \frac{h}{n} + y_2 \frac{h}{n} + \cdots + \eta \frac{h}{n} + \cdots + y_n \frac{h}{n} + \left(\eta \frac{h}{n} - \eta' \frac{h}{n}\right)$$

für η und η' die ihnen nächstgelegenen, durch Theilungspunkte der h gehenden Ordinaten setzen, ohne den Grenzwerth der Summe zu ändern.

Wenn die Zahl der Zu- und Abnahmswechsel von y eine endliche ist, so bleibt die Formel zur Berechnung der Fläche ungeändert, da die algebraische Summe einer endlichen Zahl unendlich kleiner Summanden ohne Ende der Null näher rückt. Die Gültigkeit der Formel ist, wie leicht einzusehen, zunächst an die bisher stillschweigend vorausgesetzte Bedingung geknüpft, dass der Bogen MB ein continuirlicher (nicht unterbrochener) Zug ist.

Man sagt dann, die Function $y = f(x)$ ist von $x = 0$ bis $x = h$ stetig. Die zweite Bedingung für die Richtigkeit der Formel ist die, dass die Ordinaten von $x = 0$ bis $x = h$ nicht negativ werden. Unter diesen zwei Bedingungen gilt die Formel für alle Curven. Die Berechnungdes J in einem gegebenen Falle ist mit Hilfe unseres Mittels, nämlich des von uns entwickelten Grenzwerthes von $\frac{\Sigma n^{m-1}}{n^m}$ nur bei solchen Curven möglich, deren Gleichung die Form $y = a + bx + cx^2 + \cdots + px^m$ hat. Diese Curven heissen parabolische Linien.

§. 5.

Anwendung der vorigen Formel.

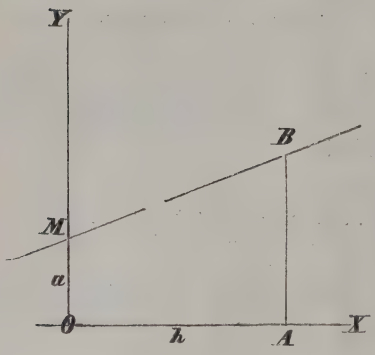
1) Für $y = a + bx$ geht die Linie in die Gerade MB (Fig. 4), die Fläche in ein Trapez über, dessen Inhalt

$$J = \lim \Sigma y_r \frac{h}{n} = \lim \Sigma \left(a + \frac{b\,r\,h}{n}\right) \frac{h}{n} = \lim \left[n a \frac{h}{n} + \frac{b h^2 \Sigma n}{n^2}\right]$$

$$= ah + \tfrac{1}{2}\, bh^2 = \frac{h}{2}\,(2a + bh).$$

Will man b eliminiren und durch die zweite Grundlinie k des Trapezes ersetzen, so beachte man, dass $y = k$ wird für $x = h$, also $k = a + bh$ und hiermit $J = \frac{h}{2}(a + k)$.

Fig. 4.



2) Nimmt man $y = a + cx^2$, so ist die Curve eine Parabel, deren Achse mit der Ordinatenachse zusammenfällt und deren Scheitel vom Ursprunge des Coordinatensystems um a entfernt ist.

Die Fläche ist $OABM$, ihr Inhalt

$$J = \lim \Sigma y_r \frac{h}{n}$$

$$= \lim \Sigma \left[a + c\left(r\,\frac{h}{n}\right)^2\right] \frac{h}{n}$$

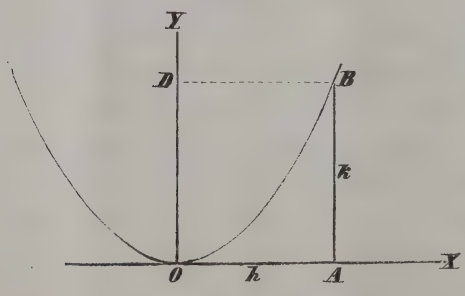
$$= \lim \left[n a \frac{h}{n} + c\,\frac{h^3}{n^3}\, r^2\right]$$

$$= ah + \frac{ch^3}{3}.$$

Für $a = 0$ (Fig. 5) fällt der Scheitel der Parabel in den Ursprung, wodurch $J = \frac{1}{3}\, ch^3$ oder wegen $k = ch^2$

$J = \frac{1}{3}\, hk$, d. h. J ist $\frac{1}{3}$ des Rechteckes $OABD$, mithin muss BOD $\frac{2}{3}$ desselben sein.

Fig. 5.



3) Für die parabolische Linie mit der Gleichung

$$y = a + bx + cx^2$$

ist die Fläche

$$J = \lim \Sigma y_r \frac{h}{n}$$

$$= \lim \Sigma \left[a + br\,\frac{h}{n} + c\,\left(r\,\frac{h}{n}\right)^2\right] \frac{h}{n}$$

$$= ah + \tfrac{1}{2}\, bh^2 + \tfrac{1}{3}\, ch^3$$

oder auf gleiche Nenner gebracht

$$J = \frac{h}{6}(6a + 3bh + 2ch^2).$$

Um die Fläche durch die Endordinaten a und k und die Mittelordinate m auszudrücken, dienen die Bestimmungsgleichungen, welche man erhält, wenn man in y für x der Reihe nach $x = 0$, $\frac{h}{2}$ und h substituirt.

Es wird nun

$$a = a$$

$$m = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4}$$

$$k = a + bh + ch^2$$

oder, wenn man in der zweiten Gleichung die Nenner wegschafft,

$$a = a$$

$$4m = 4a + 2bh + ch^2$$

$$k = a + bh + ch^2$$

Ein Blick auf diese Gleichungen zeigt, dass das Ausrechnen von a, b, c entfallen kann, indem die Summe dieser Gleichungen sofort den Factor von $\frac{h}{6}$ gibt.

Hiermit wird

$$J = \frac{h}{6}(a + 4m + k).$$

In dieser Formel sind selbstverständlich die beiden vorangehenden Aufgaben als specielle Fälle enthalten, wie man leicht nachweisen kann.

§. 6.

Näherungsweise Flächenbestimmungen. Simpson's Regel.

Die Formel

$$J = \frac{h}{6}(a + 4m + k)$$

gilt nach der Ableitung für die Inhalte solcher Flächen, deren begrenzende Curve eine parabolische Linie zweiten Grades ist.

Man kann ohne Mühe beweisen, dass sie auch noch gilt, wenn die begrenzende Curve eine parabolische Linie dritten Grades mit der Gleichung $y = a + bx + cx^2 + dx^3$ ist. In allen übrigen Fällen gibt sie nur angenäherte Werthe. In dieser Hin-

sicht erhält die Formel eine besondere Wichtigkeit, wie wir sofort zeigen wollen.

a) Es sei MB eine beliebige oder nach einem bestimmten Gesetze gebildete Curve (Fig. 2) und die Aufgabe gestellt, die Fläche $OABM$ angenähert zu berechnen.

Man theile $OA = h$ in eine endliche Zahl gleicher Theile, betrachte die Flächenstreifen als Rechtecke, deren Basis $\frac{h}{n}$ und deren Höhe die auf einander folgenden Ordinaten sind, woraus

$$J = \frac{h}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1})$$

folgt.

b) Grösser wird die Annäherung, wenn man die einzelnen Streifen als Trapeze betrachtet, also statt der kleinen Grenzbögen ihre Sehnen setzt, es ergibt sich dann

$$J = \frac{h}{n}(\tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + \tfrac{1}{2}y_n)$$

c) Eine weit grössere Genauigkeit wird aber dadurch erzielt, dass man die einzelnen Stücke der Curve als parabolische Linien des zweiten Grades annimmt. Wird dabei h in eine gerade Zahl gleicher Theile getheilt, und auf jeden der entstandenen $\frac{1}{2}n$ Doppelstreifen mit der Breite $a = \frac{2h}{n}$ die Formel

$$y = \frac{h}{6}(a + 4m + k)$$

angewendet, so erhält man:

$$J = \frac{a}{6}(y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{a}{6}(y_2 + 4y_3 + y_4) + \cdots + \frac{a}{6}(y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n)$$

oder

$$J = \frac{a}{6}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + y_5 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + \cdots + y_{n-2}) + y_n],$$

welche Formel den Namen Simpson'sche Regel führt.

Bei allen 3 Näherungsformeln ist natürlich die Annäherung desto grösser, je grösser n genommen wird.

§. 7.

Eine allgemeine Formel zur Inhaltsbestimmung eines Körpers. Inhalt eines Simpson'schen Körpers.

Es sei ein Körper von 2 parallelen ebenen Figuren als Grundflächen, sonst jedoch beliebig begrenzt. Die Inhalte der Grundflächen bezeichnen wir mit A und B, ihren Abstand von einander, d. i. die Höhe des Körpers, mit h.

Behufs Ermittelung seines Inhaltes V denke man sich h in n gleiche Theile getheilt, durch jeden Theilungspunkt eine zur Grundfläche parallele Ebene gelegt, deren Durchschnitt mit dem Körper eine Figur mit dem Inhalte q gibt. Hierdurch zerfällt der Körper in lauter Schichten, deren Inhalte wir von A gegen B gezählt mit $v_1, v_2, v_3 \cdots v_n$ bezeichnen, während die Inhalte der Querschnittsfiguren in derselben Ordnung genommen $q_1, q_2, q_3, \cdots q_r \cdots q_{r-1}$ sein sollen. Wenn man dieselben Betrachtungen wie in §. 4 anstellt, indem man die drei Fälle unterscheidet, dass die Querschnitte von A bis B 1) fortwährenp wachsen, 2) abnehmen, 3) bald wachsen bald abnehmen, so kommt man zur Ueberzeugung, dass der Inhalt durch

$$V = \lim \left(q_1 \frac{h}{n} + q_2 \frac{h}{n} + \cdots + q_n \frac{h}{n} \right)$$

$$= \lim \Sigma \left(q_r \frac{h}{n} \right)$$

ausgedrückt wird, worin $q_1 \frac{h}{n}$, $q_2 \frac{h}{n} \cdots$ die Inhalte prismatischer oder cylindrischer Scheiben von der Dicke $\frac{h}{n}$ bedeuten.

Ist $q = a + bx + cx^2 + \cdots + qx^m$, wo x den Abstand des Querschnittes q von der Grundfläche A bedeutet, und $a, b, c \cdots$ gewisse von x unabhängige, nur die besondere Beschaffenheit des Körpers bestimmende Zahlen vorstellen, so reichen unsere Mittel zur Ermittelung von V vollkommen aus.

Einer besonderen Aufmerksamkeit jedoch sind solche Körper werth, welche von 2 parallelen und ebenen Figuren A und B als Grundflächen, sonst beliebig begrenzt sind, und mit einer zur Grundfläche A in dem Abstande x von ihr gelegten parallelen Ebene einen Querschnitt $q = a + bx + cx^2 + dx^3$ geben. Diese Körper heissen Simpson'sche Körper.

Als Analogon hierzu könnte man die in §. 5 sub 1, 2, 3 betrachteten Flächen Simpson'sche Flächen nennen. Der Inhalt eines Simpson'schen Körpers ist

$$V = \lim \Sigma q_r \frac{h}{n}$$

$$= \lim (q_1 + q_2 + q_3 + \cdots + q_n) \frac{h}{n},$$

wo $q_1, q_2, q_3 \cdots$ für $x = 1\frac{h}{n}, 2\frac{h}{n}, 3\frac{h}{n} \cdots$ aus der Gleichung für q bestimmt wurde. Es ist

$$V = \lim \Sigma \left[a + b\frac{rh}{n} + c\left(\frac{rh}{n}\right)^2 + d\left(\frac{rh}{n}\right)^3 \right] \frac{h}{n}$$

$$= ah + \frac{bh^2}{2} + \frac{ch^3}{3} + \frac{dh^4}{4}$$

$$= \frac{h}{6}\left(6a + 3bh + 2ch^2 + \frac{3dh^3}{2}\right).$$

Zur Elimination der Coefficienten a, b, c und d dienen die Bestimmungsgleichungen, welche man durch Substitution von $0, \frac{h}{2}$ und h in q für x erhält, wo der Inhalt der mittleren Durchschnittsfigur mit M bezeichnet wird. Es ist also

$$A = a$$
$$M = a + \frac{bh}{2} + \frac{ch^2}{4} + \frac{dh^3}{8}$$
$$B = a + bh + ch^2 + dh^3$$

und nach Multiplication der zweiten Gleichung mit 4

$$A = a$$
$$4M = 4a + 2bh + ch^2 + \frac{dh^3}{2}$$
$$B = a + bh + ch^2 + dh^3.$$

Die Elimination der Coefficienten a, b, c, d ist sofort vollzogen, wenn man beachtet, dass die Summe dieser drei Gleichungen den Factor von $\frac{h}{6}$ in V gibt. Es ist nämlich

$$A + 4M + B = 6a + 3bh + 2ch^2 + \frac{3dh^3}{2}$$

folglich

$$V = \frac{h}{6}(A + 4M + B).*)$$

§. 8.

Berechnung von Trägheitsmomenten.

Für eine Gerade.

a) Eine Gerade sei mit materiellen Punkten gleichförmig besetzt (als Beispiel diene ein gerader, dünner Draht). Dieselbe drehe sich um ihren Anfangspunkt A.

Man theile $AB = l$ in n gleiche Theile, dann ist die Masse eines solchen Theiles $\frac{m}{n}$, wenn m die der Geraden bezeichnet.

*) Die vielfachen und wichtigen Anwendungen dieser Formel werden als bekannt übergangen.

Denkt man sich die Masse eines jeden Theils in dem von A entfernteren Grenzpunkte vereinigt, so ergibt sich als obere Schranke V des Trägheitsmomentes sofort

$$V = \frac{m}{n}\left(1\frac{l}{n}\right)^2 + \frac{m}{n}\left(2\frac{l}{n}\right)^2 + \cdots + \frac{m}{n}\left(n\frac{l}{n}\right)^2$$

also $T = ml^2 \cdot \lim \frac{\Sigma(n^2)}{n^3} = \frac{1}{3}ml^2$

d. h. das Trägheitsmoment ist so gross, als wenn der dritte Theil der Masse im Endpunkt B der Geraden vereinigt wäre.

b) Ist der Mittelpunkt oder Schwerpunkt der Drehpunkt, so ist

$$T = 2 \cdot \tfrac{1}{3}\left(\frac{m}{2}\right)\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \tfrac{1}{3}m\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

d. h. man kann sich wieder $\frac{1}{3}$ der Gesammtmasse in einem Grenzpunkt der Geraden vereinigt denken.

§. 9.

Ein neues Princip zur Berechnung von Trägheitsmomenten.

Bevor wir weiter schreiten, wollen wir ein bisher unbeachtetes Princip erläutern, welches in vielen Fällen treffliche Dienste leistet. Die Drehachse gehe durch A (Fig. 6) senkrecht auf die Ebene, in welcher ein Punkt P mit der Masse μ liegt. Denkt man sich durch A zwei auf einander Senkrechte Ax und By, so ist

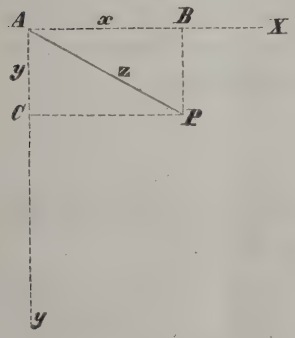
$$z^2 = x^2 + y^2,$$

also

$$\mu z^2 = \mu x^2 + \mu y^2$$

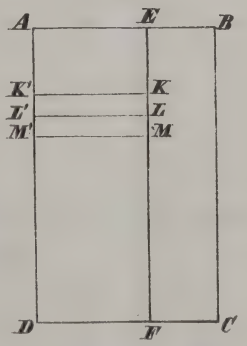
d. h. die Masse in P kann durch zwei gleiche Massen in B und C ersetzt werden und umgekehrt.

Fig. 6.



a) Eine mit materiellen Punkten gleichförmig besetzte Fläche eines Rechteckes (Fig. 7) drehe sich um eine durch einen Eckpunkt A senkrecht zur Fläche stehende Axe.

Fig. 7.



Nach dem sub d) erläuterten Principe können die Massen K, L, M . . . . nach K', L', M' . . . . versetzt werden, wenn sie gleichzeitig noch einmal nach E gegeben werden.

Indem man dies auf alle zu AD parallelen Geraden des Rechteckes ausdehnt, erkennt man, dass die Masse des Rechteckes auf AD und gleichzeitig noch einmal auf AB gleichförmig vertheilt gedacht werden kann.

Es wird damit das Trägheitsmoment des Rechteckes auf das von zwei Geraden zurückgeführt. Ist daher $AD = a$, $AB = b$, so ergibt sich sofort

$$T = \tfrac{1}{3} m a^2 + \tfrac{1}{3} m b^2 = \tfrac{1}{3} m (a^2 + b^2).$$

Ist die Diagonale $AC = c$, so ist

$$T = \tfrac{1}{3} m c^2$$

d. h. man kann sich den dritten Theil der Masse des Rechteckes in dem von der Axe entferntesten Eckpunkte vereinigt denken. Wäre $ABCD$ die Basis eines rechtwinkligen Parallelepipeds (Rechteckers) von beliebiger Höhe, die durch A gehende Kante der Seitenfläche die Drehaxe, so denke man sich jeden Punkt in einer zur Höhe parallelen Geraden fortgeschoben, bis er in die Basis fällt, wodurch sein Trägheitsmoment nicht geändert wird und es bleibt $T = \frac{1}{3} m c^2$, wenn unter m die ganze Masse des Rechteckes verstanden wird.

b) Geht beim Rechtecke die Axe durch dessen Mittelpunkt, so ist nach a)

$$T = 4 \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \frac{m}{4} \left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right\} = \tfrac{1}{3} m \left\{ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 \right\}$$

d. h. wieder so, als ob der dritte Theil der Masse in einem Eckpunkte vereinigt wäre.

Ausgeführt wird $T = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$.

Diese Formel gilt auch für den Rechtecker, dessen Drehaxe durch den Mittelpunkt der Basis auf derselben senkrecht steht. Benützung dieser Formel beim Weber'schen Reiseapparat zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus.

§. 10.

Eine Gerade, deren Masse von einem Grenzpunkte gegen den anderen gleichförmig zunimmt.

Wir denken uns die Fläche eines Dreieckes (Fig. 1), dessen Höhe $CD = l$ und dessen Basis $AB = k$ ist, mit materiellen Punkten gleichförmig besetzt. Indem wir h in n gleiche Theile theilen und durch die Theilungspunkte zur Basis parallele Gerade ziehen, zerfällt die Fläche in Streifen. Bezeichnet μ die Masse

der Flächeneinheit, so ist die Fläche des dem r^{ten} Streifen umgeschriebenen Rechtecks $r \cdot \frac{k}{n} \cdot \frac{l}{n}$ und daher seine Masse $\mu \frac{klr}{n^2}$, wenn man sich das ganze Rechteck $rstu$ in gleicher Weise mit materiellen Punkten besetzt denkt, wie die Dreiecksfläche. Daraus folgt, dass die Masse des Rechteckes grösser ist als die des zugehörigen Streifens.

Nun stellen wir uns weiter vor, es werde jeder Punkt der Dreiecksfläche parallel zur Basis so lange fortgeschoben, bis er in die Gerade CD fällt, so ist dadurch erreicht, dass auf CD die Masse von C bis D von Null angefangen gleichförmig, d. i. der Entfernung von C proportional zunimmt. Es soll nun das Trägheitsmoment dieser Geraden in Bezug auf eine durch C senkrecht zu ABC gehende Axe gefunden werden.

Denkt man sich die ganze Masse $\frac{\mu klr}{n^2}$, welche nach Obigem etwas grösser ist als die Masse des Theilchens vw in dem von C entferntesten Punkte w des Theilchens vw vereinigt, so ist das Trägheitsmoment nothwendig grösser als das des Theilchens vw und bildet eine obere Theilschranke des Trägheitsmomentes von vw.

Das Trägheitsmoment der Geraden CD ist also

$$T = \lim \Sigma \mu k \frac{l}{n^2} r \cdot \left(r \frac{l}{n}\right)^2$$

$$= \mu k l^3 \lim \Sigma \frac{r^3}{n^4} = \tfrac{1}{4} \mu k l^3$$

$$= \tfrac{1}{2} \frac{\mu kl}{2} l^2$$

$$= \tfrac{1}{2} m l^2,$$

wenn mit m die Gesammtmasse der Geraden bezeichnet und beachtet wird, dass $\frac{kl}{2}$ der Inhalt und $\mu \frac{kl}{2}$ die Masse der Dreiecksfläche, also auch die der Geraden CD vorstellt.

Bemerkt sei noch, dass die untere Theilschranke des Trägheitsmomentes von vw das Trägheitsmoment der in v vereinigt gedachten Masse des dem r^{ten} Streifen eingeschriebenen Rechtecks ist und dass ferner die Differenz der beiden Hauptschranken das Trägheitsmoment der in D vereinigt gedachten Masse des dem n^{ten} Streifen umgeschriebenen Rechtecks ist, und dass dieses Trägheitsmoment mit unendlich wachsendem n der Null ohne Ende zustrebt.

Dreht sich die Gerade um eine durch D zu DC senkrechte Axe, so ergibt sich, wenn die Theile von D gegen C gezählt

werden, durch eine der vorigen ganz ähnliche Betrachtung, dass die obere Grenze der Masse des r^{ten} Streifens

$$\mu \frac{n-r}{n} \cdot k \cdot \frac{l}{n}$$

ist, also

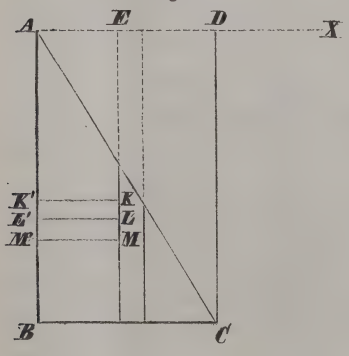
$$\begin{aligned} T &= \lim \Sigma \mu \frac{n-r}{n} \cdot k \cdot \frac{l}{n} \cdot \left(r \frac{l}{n}\right)^2 \\ &= \lim \Sigma \frac{\mu k l^3 r^2}{n^4} \left(n - r\right) \\ &= \mu k l^3 \cdot \lim \Sigma \left(\frac{r^2}{n^3} - \frac{r^3}{n^4}\right) \\ &= \mu k l^3 \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) \\ &= \tfrac{1}{6} \cdot \mu \cdot \frac{kl}{2} \cdot l^2 \\ &= \tfrac{1}{6} m l^2. \end{aligned}$$

Vergleicht man die für eine Gerade bisher gewonnenen Ergebnisse, so stellt sich die merkwürdige Beziehung heraus:

Wenn sich eine Gerade AB um eine durch A zur Geraden senkrechte Axe dreht, so kann man sich $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$, $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, $\frac{1}{6}$ ihrer Gesammtmasse in B vereinigt denken, je nachdem die Masse von A gegen B von Null an gleichförmig wächst, oder gleichförmig längs AB vertheilt ist, oder endlich von A gegen B gleichförmig abnimmt.

a) Für ein rechtwinkliges Dreieck (Fig. 8) mit den Katheten a und b und der in A auf der Fläche senkrechten Drehaxe kann man bei gleichförmiger Vertheilung der Masse über die ganze Fläche abermals das in § 9 bemerkte Princip benützen.

Fig. 8.



Man versetze die Massen K, L, M . . . gleichzeitig auf K', L', M' . . . und in den Punkt E.

Indem man sich diese Versetzungen auf die Massen aller in den zu AB parallelen Geraden liegenden Punkte ausgedehnt vorstellt, erscheint die Masse des Rechteckes einmal auf AB proportional mit der Entfernung von A zunehmend und auf AD proportional mit der Entfernung von A abnehmend vertheilt.

Es ist daher $T = \frac{1}{2} m a^2 + \frac{1}{6} m b^2$.

b) Für ein gleichschenkliges Dreieck mit einer durch den Scheitel zur Fläche senkrechten Axe hat man bei gleichförmiger Flächenvertheilung

$$T = \tfrac{1}{2} m h^2 + \tfrac{1}{6} m \left(\frac{b}{2}\right)^2,$$

wenn h die Höhe und b dessen Grundlinie ist. Führt man statt b die Seitenlinie a ein, so ist

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 = a^2 - h^2$$

und

$$\begin{aligned} T &= \tfrac{1}{2} m h^2 + \tfrac{1}{6} m a^2 - \tfrac{1}{6} m h^2 \\ &= \tfrac{1}{6} m a^2 + \tfrac{1}{3} m h^2 \\ &= \frac{m}{3}\left(\frac{a^2}{2} + h^2\right). \end{aligned}$$

c) Für ein reguläres Polygon mit einer durch dessen Mittelpunkt zur Fläche senkrechten Axe wird bei der Zertheilung der Fläche in congruente gleichschenkelige Dreiecke mit den Seiten a und den Höhen h

$$T = \tfrac{1}{3} m \left(\frac{a^2}{2} + h^2\right).$$

d) Aus c) erhält man für die Kreisfläche, indem man dieselbe als die Grenze eines Vieleckes mit unendlich wachsender Seitenzahl betrachtet,

$$T = \lim \left\{\tfrac{1}{3} m \left(\frac{a^2}{2} + h^2\right)\right\},$$

worin $a = r$ ist und $\lim h = r$, daher

$$T = \tfrac{1}{3} m \left(\frac{r^2}{2} + r^2\right) = \tfrac{1}{2} m r^2$$

d. h. man kann sich seine halbe Masse in einem Punkte der Peripherie vereinigt denken.

Dieselbe Formel gilt auch für einen geraden Cylinder, der sich um seine Axe dreht. Denkt man sich jeden seiner Punkte in einer zur Axe parallelen Geraden fortgeschoben, bis er in seine Grundfläche fällt, so ist sein Trägheitsmoment unverändert geblieben. Dadurch ist die Masse des Cylinders in die Fläche eines Kreises gleichförmig vertheilt worden.

e) Am Einfachsten ergibt sich das Trägheitsmoment der Kreisfläche durch folgende Betrachtung.

Die Masse eines jeden mit dem gegebenen Kreise concentrischen Kreises kann in dem Punkte vereinigt gedacht werden, in welchem dieser Kreis einen bestimmten Radius schneidet. Denn das Trägheitsmoment eines Punktes des concentrischen Kreises wird nicht geändert, wenn er auf dem Kreise so lange fortgeschoben wird, bis er in den genannten Radius fällt. Es kann also die ganze Masse der Kreisfläche auf einen Radius geschoben gedacht werden, wobei die Masse vom Mittelpunkte gegen die Peripherie proportional mit der Entfernung vom Mittelpunkte zunimmt, weshalb $T = \frac{1}{2} m r^2$ ist.

§. 11.

Die gleichförmig beschleunigte Bewegung.

Die Bewegung eines Körpers heisst eine gleichförmig beschleunigte, wenn seine Geschwindigkeit in gleichen Zeiten um gleiche Grössen wächst. Wird die Beschleunigung, d. h. der Geschwindigkeitszuwachs in 1 Secunde mit g bezeichnet, so ist die am Ende von t Secunden erreichte Geschwindigkeit $v = t \cdot g$. Um nun den während der Zeit t zurückgelegten Weg zu bestimmen, denken wir uns t in n gleiche Theile, deren jeder $\frac{t}{n}$ ist, getheilt und nennen den während des r^{ten} Zeittheiles $\frac{t}{n}$ zurückgelegten Weg σ_r.

σ_r ist offenbar kleiner als der Weg, den ein Körper mit der am Ende des Wegtheils σ_r vorhandenen Geschwindigkeit $r\frac{t}{n} \cdot g$ (gebildet nach $v = t \cdot g$) in gleichförmiger Bewegung während des Zeittheils $\frac{t}{n}$ zurücklegen würde, d. h.

$$\sigma_r < r \cdot \frac{t}{n} g \cdot \frac{t}{n}$$

oder

$$\sigma_r < g t^2 \cdot \frac{r}{n^2}.$$

Die untere Schranke von σ_r ist der Weg, den ein in gleichförmiger Bewegung fortschreitender Körper während des Zeittheils $\frac{t}{n}$ mit der am Anfange des Wegtheils σ_r vorhandenen Geschwindigkeit zurücklegen würde, d. h. $\sigma_r > g t^2 \cdot \frac{r-1}{n^2}$.

Hiermit erkennt man, dass der während der Zeit zurückgelegte Weg ist:

$$s = \lim g t^2 \frac{\Sigma n}{n^2}$$
$$= \tfrac{1}{2} g t^2.$$

§. 12.

Die einfachste Art der schwingenden Bewegung.

Indem ich die Begriffsbestimmungen, welche bei der in Rede stehenden Bewegung nöthig sind, als bekannt übergehe, werde ich zunächst zeigen, wie man mit Hilfe der Exhaustionsmethode die Beziehungen zwischen Elongation und Geschwindigkeit leicht ermitteln kann. Wir betrachten die Bewegung von dem Augenblicke an, in dem das Bewegliche durch seine Gleichgewichtslage O, wo es die Geschwindigkeit c hat, nach A geht. Der während der Zeit t beschriebene Weg OB sei x, die in B vorhandene Geschwindigkeit v. Wir theilen x in n gleiche Theile, bezeichnen die Theilungspunkte von O aus mit $1, 2, 3, \cdots (r-1)$, $r \cdots (n-1)$, die Geschwindigkeiten des Beweglichen in denselben mit $v_1, v_2, v_3, v_4, \cdots\cdots v_{r-1}, v_r \cdots v_{n-1}$ und erinnern uns an die bei der gleichförmig verzögerten Bewegung hergeleitete Formel*) $v'^2 - v^2 = 2g(s-s')$, $\cdots 1$ in der g den Absolutwerth der Verzögerung bedeutet. Bezeichnet ferner k die Kraft, mit welcher im Abstande 1 von O die Masseneinheit des Beweglichen nach O getrieben wird, so gilt für die Kraft k_r im Theilungspunkte r, der um $r \cdot \frac{x}{n}$ von O entfernt ist,

$$k_r = k \cdot r \frac{x}{n}.$$

Aus dem allgemeinen Ausdrucke mg für die Masszahl einer constanten Kraft ist zu erkennen, dass die auf die Masseneinheit wirkende Kraft, nämlich g, gleichzeitig die in einer Zeiteinheit durch diese Kraft bewirkte Geschwindigkeitsänderung (Beschleunigung oder Verzögerung) vorstellt.

---

*) Aus den beiden Grundformeln für die gleichförmig geänderte Bewegung $\left(\text{nämlich } v = c + gt \text{ und } s = ct + g\frac{t^2}{2}\right)$ ergibt sich durch Elimination von t die Gleichung $v^2 - v'^2 = 2g(s-s')$. Ist g positiv, die Bewegung also beschleunigt, so ist für $s' < s$ auch $v' < v$; für ein negatives g, also für eine verzögerte Bewegung, ist $v'^2 - v^2 = 2(-g)(s-s')$, wo $(-g)$ den Absolutwerth der Verzögerung bedeutet, mithin $v' > v$ für $s' < s$.

Hätte auf das Bewegliche, während es das r^{te} Wegtheilchen durchlief, fortwährend die am Ende dieses Wegtheilchens vorhandene Kraft k_r gewirkt und wäre dadurch dem Beweglichen am Ende des r^{ten} Wegtheilchens dis Geschwindigkeit v'_r gegeben worden, so hätte man nach Formel 1)

$$v_{r-1}^2 - v_r'^2 = 2k_r \frac{x}{n} = 2kr \frac{x^2}{n^2}.$$

Da aber $v'_r < v_r$ ist, indem während des r^{ten} Wegtheilchens die bewegende, der Geschwindigkeit entgegenwirkende Kraft bis zu k_r zunahm, so wird

$$v_{r-1}^2 - v_r^2 < 2kr \frac{x^2}{n^2};$$

durch eine ähnliche Betrachtung findet man die untere Grenze der vorstehenden Differenz

$$v_{r-1}^2 - v_r^2 > 2k(r-1)\frac{x^2}{n^2}.$$

Wenn man nun in einer der beiden letzten Ungleichungen z. B. in der ersten für r, der Reihe nach 1, 2, 3, $\cdots$ n einsetzt, die erhaltenen Resultate addirt, links sogleich die sich hebenden Glieder weglässt und beachtet, dass $v_o = c$ und $v_n = v$ ist, so wird

$$c^2 - v^2 < 2kx^2 \frac{\Sigma(n)}{n^2}$$

und für $n = \infty$

$$c^2 - v^2 = \lim 2kx^2 \frac{\Sigma(n)}{n^2} = kx^2,$$

woraus

$$v^2 = c^2 - kx^2$$

folgt.

Da aber $v = 0$ für $x = a$ ist, so hat man

$$0 = c^2 - ka^2,$$

mithin

$$v^2 = k(a^2 - x^2) \cdots\cdots\cdots 2).$$

Wie man aus der Figur entnehmen kann, ist $a^2 - x^2 = y^2$, weshalb auch

$$v^2 = ky^2$$

oder

$$v = y\sqrt{k}$$

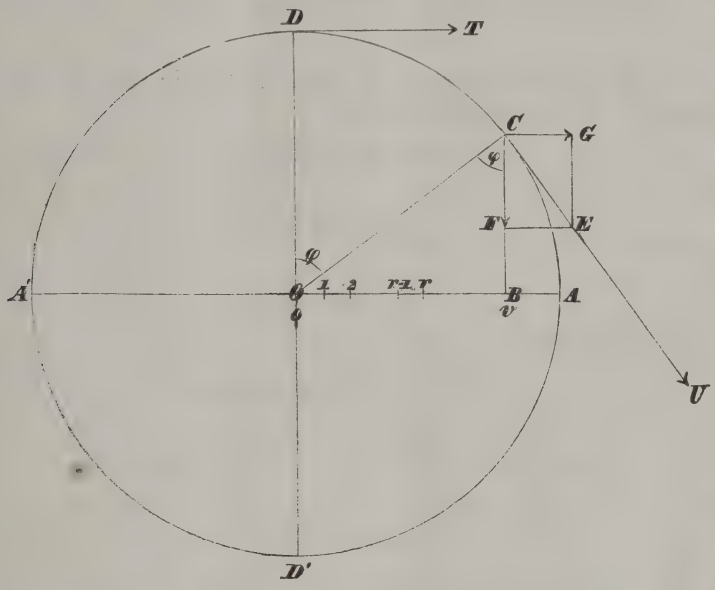
wird, woraus sich ergibt, dass die in B vorhandene Geschwindigkeit der in B errichteten Kreisordinate proportional ist. Speciell ist die Schwingungsintensität

$$c = a\sqrt{k}.$$

Um ferner der Vollständigkeit halber v und x durch die Phasenzeit auszudrücken, schlagen wir einen anderweitig schon benützten Weg ein und stellen uns vor, es durchlaufe ein Punkt P den Kreis mit der unveränderlichen Geschwindigkeit c in der Richtung der Bewegung eines Uhrzeigers und beginne seine Bewegung von D aus in dem Augenblicke, in welchem das Bewegliche durch die Gleichgewichtslage mit der Geschwindigkeit c nach A schreitet.

Die tangentielle Geschwindigkeit c des Punktes P in C zerlegen wir in zwei zu OA und OD parallele Componenten und fassen zunächst bloss die erste ins Auge.

Fig. 9.



Aus dem Dreiecke CGE erhält man

$$CG = CE \cos \varphi = c \cos \varphi,$$

aus BOC wird

$$BC = y = a \cos \varphi$$

oder

$$y\sqrt{k} = a\sqrt{k} \cdot \cos \varphi = c \cos \varphi$$

mithin

$$CG = y\sqrt{k} = v,$$

d. h. P hat in jedem Bahnpunkt in der zu OA parallelen Richtung stets dieselbe Geschwindigkeit wie seine Projection auf OA.

Die Componente CF kann, weil sie auf CG senkrecht steht diese weder verstärken noch schwächen.

Da nun der Punkt P und das schwingende Theilchen M gleichzeitig bezüglich von D und O mit der Geschwindigkeit c ausgehen, so müssen sie in jedem weiteren Zeitpunkte gleichweit von DO entfernt sein. In A treffen P und M zusammen, M geht nach O, P nach D', in A' treffen sie wieder zusammen, dann geht M nach D und P nach O, worauf sich dasselbe Spiel wiederholt.

Hieraus erkennt man, dass die Zeit t, in welcher M von O nach A schwingt, genau der Zeit gleich ist, innerhalb welcher P den Bogen DC in gleichförmiger Bewegung mit der Geschwindigkeit c durchschreitet; es ist daher

$$\text{arc } DC = ct.$$

Ist φ die Masszahl des Winkels DOC in Bezug auf die analytische Winkeleinheit, so ist

$$\text{arc } DC = a\varphi$$

also

$$a\varphi = ct$$

und

$$\varphi = t\sqrt{k}.$$

Mit diesem Werthe wird endlich

$$x = a \sin \varphi = a \sin (t\sqrt{k})$$

und

$$v = \sqrt{k}y = \sqrt{k} \cdot a \cos \varphi = a\sqrt{k} \cdot \cos (t\sqrt{k})$$

oder

$$v = c \cos (t\sqrt{k}).$$

Ist eine ganze Schwingung vorüber, so ist der Bogen DC in den Kreisumfang $2\pi a$, φ in 2π und t in T übergegangen, woraus

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}.$$

Da diese Formel a nicht enthält, so ist die Schwingungsdauer von der Schwingungsweite unabhängig, die Schwingungen eines elastischen Körpers sind also isochron. Weil ferner

$$\frac{\varphi}{2\pi} = \frac{t}{T}$$

ist, so wird

$$\varphi = 2\pi \frac{t}{T}$$

und hiermit

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T}, \quad v = c \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

Lässt man in diesen Formeln t um ein Vielfaches von $\frac{T}{2}$ wachsen, also t in $t + \frac{Tn}{2}$ übergehen und beachtet man, dass die Sinus und Cosinus von Bögen, welche um ein gerades Vielfaches von π, also um ein Vielfaches von 2π von einander abweichen, gleich sind, hingegen die Sinus und Cosinus von Bögen, welche um ein ungerades Vielfaches von π von einander verschieden sind, gleiche Werthe mit entgegengesetzten Vorzeichen haben, so wird

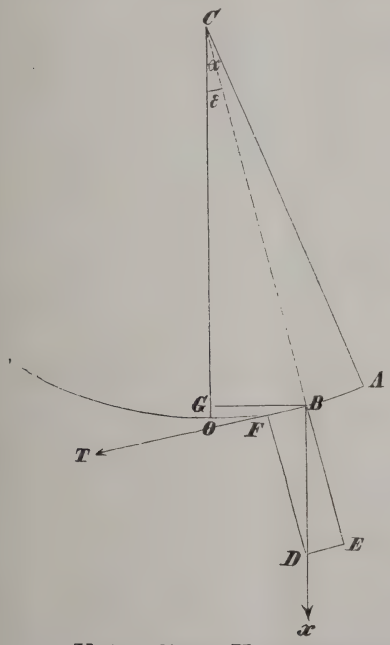
$$x' = a \sin \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{nT}{2}\right) = a \sin \left(\frac{2\pi t}{T} + n\pi\right)$$

$$v' = a \cos \frac{2\pi}{T}\left(t + \frac{nT}{2}\right) = a \cos \left(\frac{2\pi t}{T} + \pi n\right).$$

Ist n gerade, so wird $x' = x$, $v' = v$;

Ist n ungerade, so wird $x' = -x$, $v' = -v$, Folgerungen, die leicht in Worte zu kleiden sind.

Fig. 10.



Anwendung auf die Schwingungsdauereines mathematischen Pendels.

Ist der materielle Punkt in B, so wirkt auf ihn sein Gewicht Q nach Bx parallel zur verticalen Ruhelage CO. Nur die tangentielle Componente BF von Q ist die beschleunigende oder verzögernde Kraft.

Nun ist

$$BF = BD \sin \varepsilon = Q \sin \varepsilon$$

$$= Q \frac{BG}{BC} = Q \frac{x}{l} = \frac{mgx}{l}.$$

Unter der Voraussetzung, dass der Winkel ε klein ist, kann man den sin x mit seinem Bogen vertauschen und annehmen, dass x die jeweilige Entfernung des Beweglichen von der Ruhelage angibt.

Unter dieser Voraussetzung ist die Componente BF der Entfernung des Beweglichen von der Ruhelage nahe proportional; man erhält daher für T den Näherungswerth

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{k}}$$

oder, da BF für $m = 1$ und $x = 1$ in k übergeht,

$$k = \frac{g}{l},$$

folglich

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

Da aber beim Pendel bloss die zu einem Hin- oder Hergange nöthige Zeit Schwingungszeit genannt wird, so schreibt man

$$T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}.$$

II. Bemerkungen über einige Reihen.

Summirung verschiedener Reihen und Summirung von Binominalcoëfficienten; Differenzreihen, arithmetische Reihen, Summenreihen und figurirte Zahlen.

Von Dr. **A. Bauer.**

Einleitung.

In der nachstehenden Abhandlung wird die ausserordentliche Fruchtbarkeit eines bisher nicht genügend benützten Prinzips gezeigt.

Es besteht dies darin, aus einer Function von einer ganzen, positiven Zahl n zunächst die Differenz der Function zu bestimmen, wenn die Veränderliche um eine Einheit wächst, und sodann aus der Differenz die ursprüngliche Function wieder herzustellen. Gleich die in §. 1 aufgeführten Beispiele zeigen, wie rasch und naturgemäss man wichtige Functionen als Summen von Reihen erhält. In §. 2 gewinnt man ohne jegliche Mühe wichtige Summenformeln für Binominalcoefficienten. In §. 3 findet man unter Anwendung des obigen Princips die für Differenzreihen nöthigen Formeln. §. 4 Nro. I zeigt eine neue Auffassung der Potenz eines Binoms und beweist speziell, dass die Summe aller Binominalcoefficienten für eine Zahl n dem $(n+1)^{\text{ten}}$ Gliede einer Reihe gleich ist, deren Differenzreihen mit ihr identisch sind.

Die in §. 4 Nro. II aufgestellten 3 Hauptreihen geben äusserst rasch unter Anwendung der Differenzreihen eine so reichliche Zahl von wichtigen Beziehungen zwischen Binominalcoefficienten, dass sie in der Einleitung nicht angedeutet werden können.

Die bereits in §. 3 bemerkte, bisher noch nicht benützte Ähnlichkeit in der Form des allgemeinen und summatorischen Gliedes einer Differenzreihe führt in §. 5 in geradezu überraschend schneller Weise zu den Formeln über figurirte Zahlen.

§. 1.

Herleitung einer Function aus bestimmten Differenzen derselben.

Wenn n eine ganze positive Zahl und $u_n = f(n)$ ist, also $u_1 = f(1)$, $u_2 = f(2)$ . . . . . und

$u_n - u_{n-1} = f(n) - f(n-1) = \varphi(n)$, so ergibt sich für $n = 1, 2, 3 \ldots n$

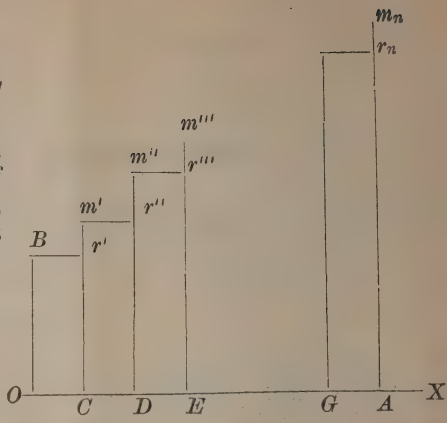
$$\begin{aligned} f(1) - f(o) &= \varphi(1) \\ f(2) - f(1) &= \varphi(2) \\ f(3) - f(2) &= \varphi(3) \\ &\ldots\ldots\ldots \\ f(n) - f(n-1) &= \varphi(n), \text{ woraus durch Addition} \\ f(n) - f(o) &= \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots + \varphi(n) \text{ und} \\ f(n) &= f(o) + \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots \varphi(n) \text{ wird.} \end{aligned}$$

In Worte gekleidet heisst dies:

Eine Function ist gleich dem Werte von $f(n)$ für $n = o$, vermehrt um die Summe aus den aufeinander folgenden Werten, welche die Differenz $f(n) - f(n-1) = \varphi(n)$ für $n = 1, 2, 3 \ldots n$ annimmt. Dies lässt sich auch

geometrisch sehr leicht einsehen. Wenn man auf der Geraden Ox (nebenstehende Figur) vom Punkte O aus $OC = CD = DE = \ldots = GA = 1$ abschneidet, so dass $OA = n$ ist, in den Punkten $O, C, D \ldots A$ Senkrechte auf Ox errichtet, welche beziehlich $f(1)$, $f(2)$, $f(3) \ldots f(n)$ betragen, so ist $f(n) = BO + m'r' + m''r'' + \ldots + m_n r_n$ oder

$= f(o) + \varphi(1) + \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)$.



Beispiele.

1. Es sei $u_n = n$, so ist
$u_n - u_{n-1} = n - (n-1) = 1$, mithin wegen $u_0 = o$
$n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1$, worin die Einheit $n$mal vorkommt.

2. Ist $u_n = n(n+1)$, so wird
$u_n - u_{n-1} = n(n+1) - (n-1)n = 2n$ und weil $u_0 = o$ ist,
$n(n+1) = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n)$ oder
$\frac{n(n+1)}{1.2} = 1 + 2 + 3 + \ldots + n$ oder symbolisch:
$\frac{n(n+1)}{1.2} = \Sigma n$.

3. Für $u_n = n(n+1)(n+2)\ldots(n+r)$ ist
$u_n - u_{n-1} = n(n+1)(n+2)\ldots(n+r) - (n-1)n(n+1)\ldots(n+r$
$= n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)(n+r-n+1)$
$= (r+1).n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)$, mithin
$n(n+1)(n+2)\ldots(n+r) = (r+1)\{1.2.3\ldots r + 2.3.4\ldots(r+$
$+ 3.4.5\ldots(r+2) + \ldots + n(n+1)(n+2)\ldots(n+r-1)\}$

Dividirt man durch $1.2.3\ldots r = r!$, so wird, indem man sich die F toren eines jeden Produktes in umgekehrter Ordnung geschrieben denkt und Bezeichnung für die Binominalcoefficienten benützt:

$$\binom{n+r}{r+1} = \binom{r}{r} + \binom{r+1}{r} + \binom{r+2}{r} + \ldots + \binom{n+r-1}{r}.$$

4. Nimmt man $u_n = x^n$, so hat man zu beachten, dass $u_0 = x^0 = 1$ ist
Es ist $u_n - u_{n-1} = x^n - x^{n-1} = x^{n-1}(x-1)$, also
$x^n = 1 + (x-1)(x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1})$ oder
$\frac{x^n - 1}{x-1} = x^0 + x^1 + x^2 + \ldots + x^{n-1}$, und wenn man mit a multiplizirt
$a\,\frac{x^n - 1}{x-1} = a + ax + ax^2 + \ldots + ax^{n-1}$,
die bekannte Summenformel für eine geometrische Progression.

5. Für $u_n = n^2$ hat man
$u_n - u_{n-1} = n^2 - (n-1)^2 = 2n - 1$, daher
$n^2 = 2(1 + 2 + 3 + \ldots + n) - (1 + 1 + 1 + \ldots + 1)$
$= 2\Sigma n - n$ oder

$\frac{n^2+n}{2} = \Sigma n$, d. i.

$\frac{n\,(n+1)}{1.2} = \Sigma n$, was schon in 2) gefunden wurde.

6. Für $u_n = n^m$, erhält man die bereits auf Seite 8 dieses Programmes entwickelte Formel.

7) Es sei $u_n = \frac{(s-n)\,(s-n-1)\,(s-n-2)\ldots(s-n-m)}{s.(s-1).(s-2)\ldots(s-m)}$, so ist

$u_0 = 1$ und

$u_n - u_{n-1} = -\frac{m+1}{s}\cdot\frac{(s-n)(s-n-1)(s-n-2)\ldots(s-n-\overline{m-1})}{(s-1)\,(s-2)\,(s-3)\ldots(s-m)}$, mithin

$$u_n = \frac{(s-n)\,(s-n-1)\,(s-n-2)\ldots(s-n-m)}{s.(s-1)\,(s-2)\ldots(s-m)}$$

$$= 1 - \frac{m+1}{s}\left\{1 + \frac{s-\overline{m+1}}{s-1} + \frac{(s-\overline{m+1})\,(s-\overline{m+2})}{(s-1)\,(s-2)} + \right.$$

$$\left. \frac{s-\overline{m+1})\,(s-\overline{m+2})\,(s-\overline{m+3})}{(s-1)\,(s-2)\,(s-3)} + \ldots + \frac{(s-n)(s-n-1)(s-n-2\ldots(s-n-\overline{m-1})}{(s-1)\,(s-2)\,(s-3)\ldots(s-m)}\right\}$$

Setzt man nun $m+1 = n$ und $s-m = n$, so wird $u_0 = o$ und

$$0 = 1 - \frac{n}{s}\left\{1 + \frac{s-n}{s-1} + \frac{(s-n)\,(s-n-1)}{(s-1)\,(s-2)} + \frac{(s-n)\,(s-n-1)\,(s-n-2)}{(s-1)\,(s-2)\,(s-3)}\right.$$

$$\left. + \ldots + \frac{(s-n)\,(s-n-1)\ldots 2.1}{(s-1)\,(s-2)\ldots n}\right\}, \text{ womit}$$

$$\frac{s}{n} = 1 + \frac{s-n}{s-1} + \frac{(s-n)\,(s-n-1)}{(s-1)\,(s-2)} + \ldots + \frac{(s-n)\,(s-n-1)\ldots 2.1}{(s-1)\,(s-2)\ldots n} \text{ wird.}$$

Z. B. es sei $s = 9$, $n = 3$, so ist

$$\frac{9}{3} = 1 + \frac{6}{8} + \frac{6.5}{8.7} + \frac{6.5.4}{8.7.6} + \frac{6.5.4.3}{8.7.6.5} + \frac{6.5.4.3.2}{8.7.6.5.4} + \frac{6.5.4.3.2.1}{8.7.6.5.4.3}$$

8) Es sei $u_n = \frac{\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)}$, so ist $u_0 = \frac{\beta}{\alpha}$ und

$u_n - u_{n-1} = \frac{\beta-\alpha}{\alpha}\cdot\frac{\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)}$, folglich

$$= \frac{\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} = \frac{\beta}{\alpha} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha}\left\{\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta\,(\beta+1)}{(\alpha+1)(\alpha+2)} + \right.$$

$$\left. \frac{\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)} + \ldots + \frac{\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)}\right\} \text{ oder}$$

$$\frac{\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)\ldots(\beta+n)}{\alpha\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\ldots(\alpha+n)} = \frac{\alpha-\beta}{\alpha}\left\{\frac{\beta}{\alpha+1} + \frac{\beta\,(\beta+1)}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)} + \ldots \right.$$

$$\left. + \frac{\beta\,(\beta+1)\,(\beta+2)\ldots(\beta+n-1)}{(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)\ldots(\alpha+n)}\right\}$$

Der Reihe in No. 7 bedient sich Dr. O. Schlömilch zur Bestimmung von *lim* R_n in Taylor'schen Reihe in seiner „Theorie der Differenzen und Summen."

Die Reihe sub 8 führt Dr. O. Schlömilch in seinem „Compendium der höheren Analysis" an und benützt dieselbe zur Entwickelung der Kennzeichen der Convergenz und Divergenz unendlicher Reihen.

§. 2.

Einige Summenformeln für Binominalcoefficienten.

Die in §. 1 bereits benützten und bekannten Binominalcoefficienten finden ihre Definition in der Gleichung

$$\binom{n}{k} = \frac{n\ (n-1)\ (n-2)\ldots(n-\overline{k-1})}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ \ k}$$

Von den Eigenschaften der Binominalcoefficienten setzen wir folgende, in jedem Lehrbuche der Algebra nachgewiesenen als bekannt voraus:

a) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, woraus $\binom{n}{o} = \binom{n}{n}$ für $k = o$ folgt.

b) $\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$.

Wir wollen nun hiemit nach der in §. 1 entwickelten Regel neue Summenformeln bilden.

1. Es sei $u_n = \binom{m+n}{k}$, wobei zu bemerken ist, dass $u_0 = \binom{m}{k}$ wird.

Nun ist $u_n - u_{n-1} = \binom{m+n}{k} - \binom{m+n-1}{k} = \binom{m+n-1}{k-1}$ nach *b)*.

Hieraus ist

c) $\binom{m+n}{k} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} + \binom{m+1}{k-1} + \binom{m+2}{k-1} + \ldots + \binom{m+n-1}{k-1}$

Setzt man $k-1=m$, also $k=m+1$, und beachtet, dass

$\binom{m}{m+1} = 0$ ist, so ergibt sich

$$\binom{m+n}{m+1} = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots + \binom{m+n-1}{m}.$$

Für $m = 6$ und $n = 4$ ist

$$\binom{4}{4} + \binom{5}{4} + \binom{6}{4} + \binom{7}{4} + \binom{8}{4} + \binom{9}{4} = \binom{10}{5}.$$

Setzt man $m+n-1=p$, so erhält die Formel die Form:

*) $\binom{p+1}{m+1} = \binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \binom{m+2}{m} + \ldots + \binom{p}{m}$.

Wird hier die oben unter *a)* befindliche Formel benützt, so erhält di vorletzte Formel die Form:

$$\binom{m+n}{n-1} = \binom{m}{o} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \binom{m+3}{3} + \ldots + \binom{m+n-1}{n-1}$$

oder wenn $n+1$ für n gesetzt wird:

$$\binom{m+n+1}{n} = \binom{m}{o} + \binom{m+1}{1} + \binom{m+2}{2} + \ldots + \binom{m+n}{n}.$$

Ist $m=5$ und $n=3$, so ist $\binom{5}{0} + \binom{6}{1} + \binom{7}{2} + \binom{8}{3} = \binom{9}{3}$.

2. Wir nehmen $u_n = \binom{m+n}{k+n}$, also $u_0 = \binom{m}{k}$

$u_n - u_{n-1} = \binom{m+n}{k+n} - \binom{m+n-1}{k+n-1} = \binom{m+n-1}{k+n}$ nach *b)*, und

*) Man vergleiche z. B. die Entwickelung in Dr. Mathiessen's „Schlüssel Dr. Heis" Seite 270.

d) $\binom{m+n}{k+n} = \binom{m}{k} + \binom{m}{k+1} + \binom{m+1}{k+2} + \binom{m+2}{k+3} + \ldots + \binom{m+n-1}{k+n}$ wird

Für $k=0$ ergibt sich die zuletzt entwickelte Summe als spezieller Fall.

Für $m=5$, $n=4$ und $k=2$ ist nach Formel *d)*

$$\binom{5}{2} + \binom{5}{3} + \binom{6}{4} + \binom{7}{5} + \binom{8}{6} = \binom{9}{6}.$$

§. 3.

Differenzenreihen.

Bezeichnet $u_n = f(n)$ die Summe von n Gliedern einer Reihe, so ist nothwendig $u_0 = f(o) = o$, daher u_n oder, wenn wir jetzt dafür s_n setzen,

$$s_n = \varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \ldots \varphi(n).$$

$$a_n = s_n - s_{n-1} = \varphi(n).$$

Hiemit kann man aus der Summenformel s_n das allgemeine Glied a_n finden, wie dies in den vorstehenden Paragraphen geschah.

Zuweilen bestehen zwischen s_n und a_n so einfache Beziehungen, dass man aus a_n sofort s_n und umgekehrt s_n aus a_n herstellen kann.

Hiezu einige Beispiele.

1. Es sei $s_n = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} b + \binom{n}{3} c + \ldots + \binom{n}{k} p$, dann ist

$$a_n = s_n - s_{n-1}$$

$$= \begin{cases} \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} b + \binom{n}{3} c + \ldots + \binom{n}{k} p \\ - \binom{n-1}{1} a - \binom{n-1}{2} b - \binom{n-1}{3} c - \ldots - \binom{n-1}{k} p. \end{cases}$$

Indem man a, b, $c \ldots p$ in je zwei übereinander stehenden Gliedern als gemeinsamen Faktor heraushebt und die Gleichung $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ beachtet, ergibt sich $a_n = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} b + \binom{n-1}{2} c + \ldots + \binom{n-1}{k-1} p$, worin $\binom{n-1}{0} = 1$ ist.

Vergleicht man die Ausdrücke für a_n und s_n mit einander, so erkennt man sogleich, wie der eine aus dem anderen gebildet werden kann.

Aus dem Ausdrucke für s_n wird nämlich der für a_n, wenn man in s_n bei jedem Binominalcoefficienten die obere und untere Zahl (den Exponenten und Zeiger) um 1 vermindert; aus dem für a_n gebildeten Ausdrucke wird der für s_n, indem man den Exponenten und Zeiger eines jeden Binominalcoefficienten um 1 vermehrt.

2. Wir wollen nun die Bedeutung der Constanten a, b, $c \ldots p$ aufsuchen.

Es ist $s_n = \binom{n}{1} a + \binom{n}{2} b + \binom{n}{3} c + \ldots + \binom{n}{k} p$ und

$a_n = \binom{n-1}{0} a + \binom{n-1}{1} b + \binom{n-1}{2} c + \ldots + \binom{n-1}{k-1} p$. Da $\binom{n-1}{0} = 1$ ist, so ist $a_1 = a$ d. h. a ist das erste Glied der gegebenen Reihe a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ welche Hauptreihe heisst.

Die Glieder der ersten Differenzreihe sollen mit $\Delta' a_1$, $\Delta' a_2 \ldots \Delta' a_n$ bezeichnet werden.

Nun ist $\Delta^1 a_n = a_{n+1} - a_n$

$$= \begin{cases} \binom{n}{0} a + \binom{n}{1} b + \binom{n}{2} c + \binom{n}{3} d + \ldots + \binom{n}{k-1} p \\ - \binom{n-1}{0} a - \binom{n-1}{1} b - \binom{n-1}{2} c - \binom{n-1}{3} d - \ldots - \binom{n-1}{k-1} \end{cases}$$

$$= \binom{n-1}{0} b + \binom{n-1}{1} c + \binom{n-1}{2} d + \ldots + \binom{n-1}{k-2} p$$

Man erkennt sogleich, dass $\Delta^1 a_n$ aus $a_{n+1} - a_n$ genau so gebildet wurde, wi a_n aus $s_n - s_{n-1}$.

Für $n = 1$ ist $\Delta^1 a_1 = b$ d. h. b ist das erste Glied der 1. Differenzreihe Ferner ist $\Delta^2 a_n = \Delta^1 a_{n+1} - \Delta^1 a_n$

$$= \begin{cases} \binom{n}{0} b + \binom{n}{1} c + \binom{n}{2} d + \ldots + \binom{n}{k-2} p \\ - \binom{n-1}{0} b - \binom{n-1}{1} c - \binom{n-1}{2} d - \ldots - \binom{n-1}{k-2} p \end{cases}$$

$$= \binom{n-1}{0} c + \binom{n-1}{1} d + \binom{n-1}{2} e + \ldots + \binom{n-1}{k-3} p$$

woraus $\Delta^2 a_1 = c$ folgt.

Ebenso zeigt man, dass $d = \Delta^3 a_1$ ist, überhaupt dass $a, b, c \ldots p$ be ziehlich die ersten Glieder der Hauptreihe, der 1., 2., 3.... $(k-1)^{\text{ten}}$ Differenz reihe bilden. Durch Einführung der üblichen Bezeichnung für $a = a_1$ $b = \Delta^1 a_1$ $c = \Delta^2 a_1 \ldots p = \Delta^{k-1} a_1$

wird $s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{k} \Delta^{k-1} a_1$

$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{k-1} \Delta^{k-1} a_1$, also auch

$s_{n+1} = \binom{n+1}{1} a_1 + \binom{n+1}{2} s a_1 + \binom{n+1}{3} s^2 a_1 + \ldots + \binom{n+1}{k} \Delta^{-1} a$, und

$a_{n+1} = \binom{n}{0} a_1 + \binom{n}{1} \Delta a_1 + \binom{n}{2} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{k-1} \Delta^{k-1} a_1$

Dass diese Reihen im ungünstigsten Falle mit dem Gliede abbrechen, in wel chem der Binominalcoefficient 1 wird, ist klar.

§. 4.

Anwendung der Differenzreihen.

I. Die n^{te} Potenz eines Binoms als Glied einer Differenzreihe.

Es sei die Hauptreihe

$a^0, a^1, a^2, a^3 \ldots a^n \ldots$, so ist die

1. Differenzreihe $a-1, a(a-1), a^2(a-1), a^3(a-1) \ldots$, und die
2. „ $(a-1)^2, a(a-1)^2, a^2(a-1)^2$
3. „ $(a-1)^3, a(a-1)^3 \ldots$

. . . . . .

also $a_{n+1} = \binom{n}{0}(a-1)^0 + \binom{n}{1}(a-1)^1 + \binom{n}{2}(a-1)^2 + \ldots + \binom{n}{n}(a-1)^n =$

Setzt man $a - 1 = b$, also $a = b + 1$, so wird

$$\binom{n}{0} b^0 + \binom{n}{1} b^1 + \binom{n}{2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n = (b+1)^n$$

der binomische Lehrsatz; derselbe bedeutet, dass die n^{te} Potenz des Binoms $(b + 1)$ das $(n + 1)^{te}$ Glied einer Reihe ist, für welche die ersten Glieder der Hauptreihe und der Differenzreihen die 0te, 1., 2., ... n^{te} Potenz des um 1 verminderten Binoms sind.

Nimmt man $b = 1$, so wird

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ d. h.}$$

2^n ist das $(n + 1^{te})$ Glied einer Reihe, für welche die ersten Glieder der Hauptreihe und der Differenzreihen 1 sind.

Es sind diese Reihen:

Hauptreihe	1,	2,	4,	8,	... 2^n
1. Differenzreihe	1,	2,	4,	8,	...
2. „	1,	2,	4,	8,	...

Hier ist also die Hauptreihe mit den Differenzreihen identisch. Endlich ist

$$s_{n+1} = a^0 + a^1 + a^2 + \ldots + a^n =$$

$$= \binom{n+1}{1}(a-1)^0 + \binom{n+1}{2}(a-1)^1 + \binom{n+1}{3}(a-1)^2 + \ldots + \binom{n+1}{n+1}(a-1)^n$$

II. Für die nächsten Entwickelungen gehen wir von der Gleichung $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$ aus.

Wenn wir je zwei Glieder dieser Gleichung als Vorbilder zu Gliedern einer Reihe nehmen und die weiteren Glieder nach demselben Gesetze fortschreiten lassen, welches sich in diesen 2 Gliedern darstellt, so erhalten wir 6 Reihen, da jedes der 2 Glieder an die 1. Stelle der Reihe gesetzt werden kann. Soll in den aus jeder Reihe gebildeten Differenzreihen ein einfaches Gesetz zum Vorschein kommen, so muss man in den 2 Reihen mit den Gliedern $\binom{n-1}{k-1}$ und $\binom{n-1}{k}$ die Glieder der Hauptreihe mit abwechselndem Vorzeichen nehmen. Man beachte noch, dass in allen 6 Fällen die Differenzreihen genau nach dem Gesetze der Hauptreihe fortschreiten.

Wenn man die Reihen wirklich bildet, so findet man, dass die Reihe mit den Anfangsgliedern $\binom{m}{k}$, $\binom{m+1}{k+1}$ zu Entwicklungen führt, welche von der Reihe mit den Anfangsgliedern $\binom{m}{k}$, $\binom{m+1}{k}$ nicht wesentlich verschieden sind, was man auch leicht aus den Differenzen zwischen diesen Gliedern erkennt. Dasselbe findet statt bei den Reihen $\binom{m}{k}$, $\binom{m-1}{k-1}$ und $\binom{m}{k}$, $\binom{m-1}{k}$ dann bei den Reihen $\binom{m}{k}$, $\binom{m}{k-1}$ und $\binom{m}{k}$, $\binom{m}{k-1}$.

Wir werden demnach bloss drei Reihen betrachten.

1. Hauptreihe $\binom{m}{k}, \binom{m+1}{k+1}, \binom{m+2}{k+2}, \binom{m+3}{k+3} \ldots \binom{m+n}{k+n}$

1. Differenzreihe $\binom{m}{k+1}, \binom{m+1}{k+2}, \binom{m+2}{k+3}$

2. „ $\binom{m}{k+2}, \binom{m+1}{k+3} \ldots$

3. „ $\binom{m}{k+3} \ldots$

$$a_{n+1} = \binom{m+n}{k+n} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} + \binom{n}{1}\binom{m}{k+1} + \binom{n}{2}\binom{m}{k+2} + \binom{n}{3}\binom{m}{k+3} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{k+n} \text{ oder}$$

$$\binom{m+n}{m-k} = \binom{n}{0}\binom{m}{m-k} + \binom{n}{1}\binom{m}{m-k-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{m-k-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{m-k-n} \text{ oder für } m-k=r$$

*) $\binom{m+n}{r} = \binom{n}{0}\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \binom{n}{2}\binom{m}{r-2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{r-n}$ ein Ausdruck, dessen man sich bedient, um die Giltigkeit des binomischen Lehrsatzes für gebrochene und negative Exponenten zu beweisen.

Aus a_{n+1} wird man für $k = 0$

$$\binom{m+n}{n} = \binom{n}{0}\binom{m}{0} + \binom{n}{1}\binom{m}{1} + \binom{n}{2}\binom{m}{2} + \cdots + \binom{n}{n}\binom{m}{n}$$

d. h. $\binom{m+n}{n}$ ist das $(n+1)^{\text{te}}$ Glied einer Reihe, bei der ihr erstes Glied und die ersten Glieder der Differenzreihen beziehlich $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \binom{m}{2} \cdots \binom{m}{n}$ sind.

Aus dieser Reihe ergibt sich für $m = n$

$$\binom{2n}{n} = \binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \binom{n}{2}^3 + \cdots + \binom{n}{n}^2.$$

Endlich ist

$$s_{n+1} = \binom{m}{k} + \binom{m+1}{k+1} + \binom{m+2}{k+2} + \cdots + \binom{m+n}{k+n} =$$

$$= \binom{n+1}{1}\binom{m}{k} + \binom{n+1}{2}\binom{m}{k+1} + \binom{n+1}{3}\binom{m}{k+2} + \cdots + \binom{n+1}{k+1}\binom{m}{k+n}$$

Beispiele.

a) Es sei $m = 8,\ n = 4,\ k = 3$

so ist $\binom{12}{7} = \binom{4}{0}\binom{8}{3} + \binom{4}{1}\binom{8}{4} + \binom{4}{2}\binom{8}{5} + \binom{4}{3}\binom{8}{6} + \binom{4}{4}\binom{8}{7}$

oder $792 = 1.56 + 4.70 + 6.56 + 4.28 + 1.8$

b) $\binom{12}{4} = \binom{8}{0}\binom{4}{0} = \binom{8}{1}\binom{4}{1} + \binom{8}{2}\binom{4}{2} + \binom{8}{3}\binom{4}{3} + \binom{8}{4}\binom{4}{4}$

$495 = 1.1 + 8.4 + 28.6 + 56.4 + 70.1$

c) $\binom{2.4}{4} = \binom{4}{0}^2 + \binom{4}{1}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{2}^2 + \binom{4}{4}^2$

$70 = 1 + 16 + 36 + 16 + 1$

2) Hauptreihe $\binom{m}{k}, \binom{m-1}{k-1}, \binom{m-2}{k-2}, \binom{m-3}{k-3} \cdots \binom{m-n}{k-n}$

1. Differenzreihe $-\binom{m-1}{k}, -\binom{m-2}{k-1}, -\binom{m-3}{k-2} \cdots$

---

*) Man vergleiche hiemit z. B. Dor. Jos. Herr „Lehrbuch der höheren Mathematik" 1. B. S. 68, 69 und 70, wo die Ableitung der Formel nahe 2 Druckseiten in Anspruch nimmt. Sieh' noch Dr. Mathiessen's Schlüssel ... zu Dr. Heis S. 269 u. 270

2. Differenzreihe $\binom{m-2}{k}, \binom{m-3}{k-1}$

3. „ $-\binom{m-3}{k}, -\ldots$

$$a_{n+1} = \binom{m-n}{k-n} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} - \binom{n}{1}\binom{m-1}{k} + \binom{n}{2}\binom{m-2}{k} - + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\binom{m-n}{k}$$

und für $k = 0$, $0 = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}$.

Diese Summe erscheint somit als das $(n+1)^{te}$ Glied einer Reihe, für welche das 1. Glied und die ersten Glieder der Differenzreihen 1, —1, +1, —1 ... sind.

Diese Reihen sind 1, 0, 0, 0, ...
—1, 0, 0, ...
1, 0, 0 ...
—1, 0, 0 ...

$$s_{n+1} = \binom{m}{k} + \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-2}{k-2} + \ldots + \binom{m-n}{k-n} =$$

$$= \binom{n+1}{1}\binom{m}{k} - \binom{n+1}{2}\binom{m-1}{k} - \binom{n+1}{3}\binom{m-2}{k} + \ldots + (-1)^{n+1}\binom{n+1}{n+1}\binom{m-n}{k}$$

Beispiele.

a) Für $m = 10$, $n = 3$, $k = 5$ ist

$$\binom{7}{2} = \binom{3}{0}\binom{10}{5} - \binom{3}{1}\binom{9}{5} + \binom{3}{2}\binom{8}{5} - \binom{3}{3}\binom{7}{5}$$

$$21 = 1.252 - 3\,126 + 3.56 - 1.21$$

b) $n = 5$

$$\binom{5}{0} - \binom{5}{1} + \binom{5}{2} - \binom{5}{3} + \binom{5}{4} - \binom{5}{5} = 0$$

$n = 4$

$$\binom{4}{0} - \binom{4}{1} + \binom{4}{2} - \binom{4}{3} + \binom{4}{4} = 0$$

3. Hauptreihe $\binom{m}{k}, -\binom{m}{k-1}, +\binom{m}{k-2}, \binom{m}{k-3}, \ldots (-1)^n \binom{m}{k-n}$

1. Differenzreihe $-\binom{m+1}{k}, \binom{m+1}{k-1}, -\binom{m+1}{k-2} \ldots$

2. „ $\binom{m+2}{k}, -\binom{m+2}{k-1} \ldots$

3 „ $-\binom{m+3}{k} \ldots$

*) $a_{n+1} = (-1)^n \binom{m}{k-n} = \binom{n}{0}\binom{m}{k} - \binom{n}{1}\binom{m+1}{k} + \binom{n}{2}\binom{m+2}{k}$

$$- \binom{n}{3}\binom{m+3}{k} + \ldots + (-1)^n \binom{n}{n}\binom{m+n}{k}$$

für $n > k$ ist $\binom{m}{k-n} = \binom{m}{m-k+n} = 0$, also $a_{n+1} = 0$

für $n = k$ ist $a_{n+1} = (-1)^n$

$$s_{n+1} = \binom{m}{k} - \binom{m}{k-1} + \binom{m}{k-2} - \binom{m}{k-3} + \ldots + (-1)^n \binom{m}{k-n} =$$

$$= \binom{m+1}{1}\binom{m}{k} - \binom{m+1}{2}\binom{m+1}{k} + \binom{m+2}{3}\binom{m+2}{k} - \cdots$$

$$+ (-1)^{n+1} \binom{n+1}{n+1}\binom{m+n}{k}$$

Beispiele.

a) $m = 7,\ n = 4,\ k = 3$

$$\binom{4}{0}\binom{7}{3} - \binom{4}{1}\binom{8}{3} + \binom{4}{2}\binom{9}{3} - \binom{4}{3}\binom{10}{3} + \binom{4}{4}\binom{11}{3} = 0$$

$$1.35 - 4.56 + 6.84 - 4.120 + 1.165 = 0$$

b) $m = 7,\ n = 3,\ k = 3$

$$\binom{3}{0}\binom{7}{3} - \binom{3}{1}\binom{8}{3} + \binom{3}{2}\binom{9}{3} - \binom{3}{3}\binom{10}{3} =$$

$$1.35 - 3.56 + 3.84 - 1.120 = -1$$

§. 5.

Hat eine Reihe die Eigenschaft, dass die Glieder ihrer m^{ten} Differenzreihe gleich sind, so heisst sie eine arithmetische Reihe der m^{ten} Ordnung.

Da hiefür $\underset{a_1}{\Delta^{m+1}} = \Delta^{m+2} a_1 = \ldots = 0$ ist, so wird

$$a_n = \binom{n-1}{0} a_1 + \binom{n-1}{1} \Delta^1 a_1 + \binom{n-1}{2} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n-1}{m} \Delta^m a_1 \text{ und}$$

$$s_n = \binom{n}{1} a_1 + \binom{n}{2} \Delta^1 a_1 + \binom{n}{3} \Delta^2 a_1 + \ldots + \binom{n}{m+1} \Delta^m a_1.$$

Die weiteren Bemerkungen über arithemetische Reihe höherer Ordnung werden hier als bekannt übergangen. Im Folgenden lasse man das im §. 3 über die Bildung von s_n aus a_n, und von a_n aus s_n Bemerkte nicht ausser Acht.

Beispiele:

**) 1. $a_n = n(m + n - 1)$

$$= \binom{n}{1} m + \binom{n}{2} 2, \text{ woraus sogleich nach §. 3}$$

$$s_n = \binom{n+1}{2} m + \binom{n+1}{3} 2$$

$$= \frac{n\,(n+1)\,(3m + 2n - 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \text{ folgt.}$$

*) Dr. Ludw. Matthiesen braucht im Schlüssel zur Sammlung von Beispielen etc. von Dr. E. Heis" 2. Bd. S. 274 und 275 fast 2 Seiten, um eine Formel zu finden, welche ein spezieller Fall der obigen ist.

**) Man vergleiche beispielsweise Koppe's Arithmetik 10. Aufl. S. 208 und 209.

Schlichtet man Kanonenkugel so auf, dass die oberste Schichte aus einer Reihe von m Kugeln besteht, welche auf 2 Reihen liegen, deren jede $m+1$ Kugeln hat, welche dann wieder auf drei Reihen ruhen, deren jede $m+2$ Kugeln enthält u. s. w., dann ist die Zahl der Kugeln in der n^{ten} Schichte $n\,(m+n-1)$ und daher die Anzahl der Kugeln in allen n Schichten durch die oben entwickelte Formel für s_n gegeben

Für $m=1$ erhält man die bekannte Formel $\Sigma\,(n^2)=\frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$

2. Wenn man in einer Reihe nach und nach die Summe von 1, 2, 3, 4 ... Gliedern bildet, so heisst diese so entstandene neue Reihe eine Summenreihe 1. Ordnung. Ebenso kann man aus dieser eine Summenreihe 2. Ordnung bilden u. s. w.

Legen wir die Hauptreihe $a,\ d,\ d,\ d\ \ldots$ zu Grunde, so ergibt sich die Summenreihe 1. Ordnung $a,\ a+1d,\ a+2d,\ \ldots\ a_n=a+\binom{n-1}{1}d.$

Dass diese Summenreihe eine arithmetische Reihe 1. Ordnung ist, wird man bereits bemerkt haben.

Nach dem Früheren ergibt sich nun

aus $\overset{1}{a}_n=a+\binom{n-1}{1}d=\binom{n-1}{0}a+\binom{n-1}{1}d$ sofort $\overset{1}{s}_n=\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}d$

und da nun das n^{te} Glied der 2. Summenreihe

$\overset{2}{a}_n=\binom{n}{1}a+\binom{n}{2}d$ ist, so wird $\overset{2}{s}_n=\binom{n+1}{2}a+\binom{n+1}{3}d$ und

für die 3. Summenreihe $\overset{3}{a}_n=\binom{n+1}{2}a+\binom{n+1}{3}d$, also

$$\overset{3}{s}_n=\binom{n+2}{3}a+\binom{n+2}{4}d \text{ u. s. w.}$$

für die m^{te} Summenreihe $\overset{m}{a}_n=\binom{n+m-2}{m-1}a+\binom{n+m-2}{m}d,$

$$\overset{m}{s}_n=\binom{n+m-1}{m}a+\binom{n+m-1}{m-1}d.$$

3. Wenn in der vorigen Stammreihe $a=1$ gesetzt wird, so heissen die Glieder der Summenreihen figurirte Zahlen und beziehlich der 1., 2., 3. ... Ordnung.

a) Die figurirten Zahlen zweiter Ordnung heissen insbesondere Polygonalzahlen. Dieselben sind:

$$1,\ 2+1d,\ 3+3d,\ 4+6d\ \ldots,$$

wofür $\overset{2}{a}_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}d$ und $\overset{2}{s}_n=\binom{n+1}{2}+\binom{n+1}{3}d.$

Wird $d=1,\ 2,\ 3\ \ldots$ genommen, so ergeben sich folgeweise die Reihen der Dreiecks-, Vierecks-, Fünfeckszahlen u. s. w.

Die Reihe der Dreieckszahlen lautet demnach:

$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15\ \ldots\ a_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=\binom{n+1}{2}$ nach §. 2*b*),

und hieraus $s_n=\binom{n+2}{3}$.

Die Reihe der Viereckszahlen ist:

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25\ \ldots\ a_n=\binom{n}{1}+\binom{n}{2}2=n^2$$

und $s_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} 2 = \frac{n\,(n+1)\;2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$

Die Reihe der Fünfeckszahlen ist:

$$1,\ 5,\ 12,\ 22,\ 35\ \ldots\ a_n = \binom{n}{1} + \binom{n}{2} 3 = \frac{n\,(3n-1)}{1\,.\,2}$$

$$\text{und } s_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} 3 = \frac{n^2\,(n+1)}{1\,.\,2}$$

b) Die figurirten Zahlen 3. Ordnung heissen insbesondere Pyramidalzahlen und zwar 3seitige, 4seitige, 5seitige ... beziehlich für $d = 1,\ 2,\ 3\ \ldots$

Dreiseitige: $1,\ 4,\ 10,\ 20,\ 35, \ldots\ a_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} = \binom{n+2}{3}$

$$\text{und } s_n = \binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{4} = \binom{n+3}{4}$$

Vierseitige: $1,\ 5,\ 14,\ 30,\ 55\ \ldots\ a_n = \binom{n+1}{2} + \binom{n+1}{3} 2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{1\,.\,2\,.\,3}$

$$\text{und } s_n = \binom{n+2}{3} + \binom{n+2}{4} 2 = \frac{n\,(n+1)^2\,(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

4. Nimmt man in der Hauptreihe $a = 1$ und $d = 0$, so erhält man die Hauptreihe 1, 1, 1, 1 ... und es heissen dann die Glieder der Summenreihen auch figurirte Zahlen, welche wir die besonderen figurirten Zahlen beziehlich der 1., 2., 3.... Ordnung nennen.

Besondere figurirte Zahlen

1. Ordnung: $1,\ 2,\ 3,\ 4\ \ldots\ \binom{n}{1}$, folglich $\overset{1}{s_n} = \binom{n+1}{2}$

2. „ $1,\ 3,\ 6,\ 10\ldots\ \binom{n+1}{2}$ „ $\overset{2}{s_n} = \binom{n+2}{3}$

. . . . . .

m. „ $\binom{m}{m}, \binom{m+1}{m} \ldots \binom{m+n-1}{m}$, folglich $\overset{m}{s_n} = \binom{n+m}{m+1}$

Die Formel $\binom{m}{m} + \binom{m+1}{m} + \ldots + \binom{m+n-1}{m} = \binom{m+n}{m+1}$ haben wir oben in §. 1 und §. 2 auf anderem Wege gefunden.

Anmerkung. Die Formel für a_{n+1} in der 1. Zeile auf Seite 40 sagt für $n > k$ Folgendes: Wenn man unter die Binominalcoefficienten der n^{ten} Potenz ebensoviele auf einander folgende figurirte Zahlen der k^{ten} Ordnung setzt und paarweise multiplizirt, so ist die Summe dieser Producte mit abwechselndem Vorzeichen gleich Null für $n > k$.

III. Schul-

I. Personalstand des Lehr-

	Post-Nro.	Name
Direktor	1.	Phil. Dr. **Andreas Bauer**
Professoren	2.	Herr Theol. Dr. Cand. **Laurenz Hafenrichter,** Weltpriester, fürst-erzbischöflicher Notar, geistlich
	3.	Herr **Josef Guckler,** Custos des naturhistorischen Cabinets, Mitglied der k. k. Prüfungscommission für d. Lehramt d. Stenografie an Mittelschl.
	4.	Herr **Prokop Knothe,** Custos des physikalischen Cabinets
	5.	Herr **Moriz Plahl**
	6.	Herr Phil. Dr. **Anton** von **Leclair,** Custos der Lehrerbibliothek
	7.	Herr **Josef Seidl**
	8.	Herr Phil. Dr. **Johann Alton**
Wirkliche Lehrer	9.	Herr **Eduard Philipp,** Custos der Schülerbibliothek
	10.	Herr **Leopold Eysert**
	11.	Herr **Richard Bittner,** Piaristenordenspriester
	12.	Herr **Josef Deil**
Supplenten	13.	Herr **Emil Riedl**
	14.	Herr **Prokop Villašek**
	15.	Herr **Theodor Kopetzky**
	16.	Herr **Franz Hadwich**
	17.	Herr **Wilhelm Jerusalem**
Hilfslehrer	18.	Herr Bacc. Theol. **Karl Färber,** Pfarrer u. Volksschuldirector
	19.	Herr **Michael Adler,** Rabbinatsverweser
Nebenlehrer (alph. Ord.)	20,	Herr **Josef Lugert,** Professor am Conservatorium für Musik in Prag
	21.	Herr **Johann Ottokar Pražák,** Prof. an der böhm. Handelsacademie in Prag
	22.	Herr **Franz Sofka,** Prof. an der I. deutschen k. k. Oberrealschule in Prag
	23.	Herr **Theodor Urban**
	24.	Herr **Heinrich Walter** von **Waltheim,** Prof. an der I. deutschen Oberrealschule in Prag

nachrichten.

körpers und Fächervertheilung.

Gegenstand und Klasse	Wöchentliche Stundenzahl
Mathematik und Physik in VIII.	5
Katholische Religionslehre in allen Classen. Exhorten für's ganze Gymnasium.	18
Naturgeschichte in Ia, Ib, Ic, IIa, IIb, V, VI.	19
Ordinarius in Ic Mathematik in Ic, III, V, VII. Physik in III und VII.	19
Wegen Krankheit beurlaubt.	—
Ordinarius in V. Latein in V. Griechisch in V. Philos. Propäd. in VII. und VIII.	15
Geographie in Ia. Geschichte in VII. Böhmisch Ia Ib, Ic, IIa, IIb; III. u. IV.; V. u. VI.; VII. u. VIII. böhm. Abtheilung.	22
Ordinarius im VII. Latein in Ic, Latein und Griechisch in VII.	17
Ordinarius in IV. Latein und Griechisch in IV. Latein in VI.	16
Ordinarius in VI. Latein in III. Geschichte u. Deutsch in V. Griechisch in VI.	17
Ordinarius in IIa. Latein in IIa. Latein und Griechisch in VIII.	18
Ordinarius in VIII. Geographie in Ic. Geschichte in III., VI., VIII. Deutsch in VI., VII., VIII.	21
Mathematik Ia, Ib, IIa, IIb, IV. u. VI. Physik in IV.	21
Ordinarius in III. Griechisch in III. Deutsch u. Geschichte in IIa Böhm. III. u. IV.; V. u. VI.; VII. u. VIII. Deutsche Abth.	18
Ordinarius in Ib. Latein und Geographie in Ib. Deutsch in III. Geschichte in IV.	18
Ordinarius in Ia. Latein und Deutsch in Ia. Geschichte und Deutsch in IIb.	18
Ordinarius in IIb. Latein in IIb. Deutsch Ib, Ic und IV.	17
Evangelische Religionslehre u. Exhorten für alle Schüler A. u. H. C. an den deutschen Mittelschulen Prags.	6
Israelitische Religionslehre u. Exhorten für die israelitischen Schüler des Neustädter u. der oberen Classen des Kleinseitner Gymn.	18
Gesang.	2
Stenographie in 2 Abtheilungen	4
Zeichnen.	2
Kalligraphie für die I. und II. Classe in 4 Abth.	4
Französisch in 2 Abtheilungen.	4

II. Lehrverfassung für die obligaten Gegenstände.

Ia Klasse.

Religionslehre a) kath.: gemeinschaftlich mit Ib und Ic: wochentlich 2 Stunden. — Das apostolische Glaubensbekenntniss, die Gebote und die Gnadenmittel. Laur. Hafenrichter.

— *b)* evang. Klassen I—IV. gemeinschaftlich, wochentlich 2 Stunden. 1. Der III. Artikel des apostolischen Glaubensbekenntnisses „vom heiligen Geist", sowie das IV. Hauptstück des lutherischen Katechismus. Dazu wurden Beweisstellen aus der Schrift erklärt, Bibelverse und einige Kernlieder gelernt. 2. Die Gleichnisse des Herrn erläutert. 3. Das Wichtigste aus der Reformationsgeschichte in Charakterbildern. K. Färber.

— *c)* mosaische: Religionslehre wochentl. 2 Stunden. — Es wurde mit der Schöpfungsgeschichte begonnen und so der Faden fortgesponnen bis zur Offenbarung Gottes am Berge Sinai. M. Adler.

Latein: wochentlich 8 Stunden. — Regelmässige Formenlehre eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche. — Präparation und Memoriren der Vocabeln. Im 2. Semester wochentlich eine kurze Composition. Franz Hadwich.

Deutsch: wochentlich 3 Stunden. — Formenlehre. — Der einfache Satz. — Lesung und Erklärung ausgewählter Lesestücke. Uebungen im Wiedererzählen des Gelesenen. — Vortrag memorirter Gedichte. — Orthographische Uebungen. — Alle 2 Wochen ein schriftlicher Aufsatz. Franz Hadwich.

Geographie: wochentlich 3 Stunden. — Grundzüge der mathematischen, physischen und politischen Geographie. Josef Seidl.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Im ersten Semester alle 3 Stunden Arithmetik; im zweiten Semester 1 Stunde Arithmetik, 2 Stunden geometrische Anschauungslehre. — Ergänzung zu den 4 Species ganzer und Decimalzahlen. Brüche. Anschauungslehre: Linien, Winkel, Construction von Dreiecken und dadurch Veranschaulichung ihrer Haupteigenschaften. Emil Riedl.

Naturgeschichte: Die Beschreibung des menschlichen Körpers und die gesammte Zoologie, ausgehend von der Beschreibung der einzelnen Thiere. Wochentlich 3 Stunden. Jos. Guckler.

Ib Klasse.

Religionslehre: wie Ia.

Latein: wochentlich 8 Stunden. — Die Kenntniss der regelmässigen Formen, eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen aus dem lateinischen Uebungsbuche. — Memoriren von Vokabeln und kurzen Erzählungen. — Im 2. Sem. wochentl. eine Schularbeit. Theod. Kopetzky.

Deutsch: wochentl. 3 Stunden. — Formenlehre. — Der einfache Satz. — Lesung und Erklärung ausgewählter Lesestücke. — Vortrag memorirter Gedichte. — Orthographische Uebungen. — Alle 14 Tage ein schriftlicher Aufsatz. Wilhelm Jerusalem.

Geographie: wochentl. 3 Stunden. — Fundamentalsätze der mathemat. Geographie; die natürliche Beschaffenheit der Erdoberfläche; deren Bewohnerschaft. — Kartenverständniss. Theod. Kopetzky.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Wie in Ia. Emil Riedl.

Naturgeschichte: Wie in Ia. — Wochentlich 3 Stunden. Jos. Guckler.

Ic Klasse.

Religionslehre: wie Ia.

Latein: wochentlich 8 Stunden. — Formenlehre der wichtigsten regelmässigen Flexionen, eingeübt in beiderseitigen Uebersetzungen aus dem Uebungsbuche. — Memoriren, später häusliches Aufschreiben von Uebersetzungen. — Wochentlich eine Haus- und Schularbeit. Dr. J. Alton.

Deutsch: wochentlich 3 Stunden. — Formenlehre. — Der einfache Satz. — Lesung und Erklärung ausgewählter Lesestücke. — Vortrag memorirter Gedichte. — Orthographische Uebungen. — Alle 14 Tage ein schriftlicher Aufsatz. Wilhelm Jerusalem.

Geographie: wochentlich 3 Stunden. — Grundzüge der mathematischen, physischen und politischen Geographie. Josef Deil.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Wie in Ia. Pp. Knothe.

Naturgeschichte: Wie in Ia. — Wochentlich 3 Stunden. Jos. Guckler.

IIa Klasse.

Religionslehre a) kath.: gemeinschaftlich mit IIb: wochentlich 2 Stunden. — Erklärung der gottesdienstlichen Handlungen der katholischen Kirche. Laur. Hafenrichter.

— *b)* evang. wie Ia.

— *c)* mos. Religionslehre gemeinschaftlich mit IIb; wochentlich 2 Stunden. Die mosaischen Gesetze. M. Adler.

Latein: wochentlich 8 Stunden. — Formenlehre der unregelmässigen Flexionen (Nomen und Verbum), Pronomina, Numeralia, Lehre vom Participium, Gerundium, Supinum, vom Accus. cum Inf., Nominat. c. Inf., das Wichtigste vom Gebrauche der Conjunctionen. — Schriftliche Präparation, Memoriren der Vocabeln, wochentlich eine Schularbeit uud Correctur derselben. R. Bittner.

Deutsch: wochentlich 3 Stunden. — Die Lehre vom einfach und mehrfach zusammengesetzten, vom zusammengezogenen und verkürzten Satze. Lesen. Erklärung und Wiedererzählung des Gelesenen. — Memoriren einzelner Gedichte. — Orthographische Uebungen. Monatlich eine Haus- und eine Schularbeit. Prokop Villašek.

Geographie und Geschichte: wochentlich 4 Stunden. 2 Stunden Geographie: Asien und Afrika. — Eingehende Beschreibung der vertikalen und horizontalen Gliederung; specielle Geographie von Süd- und West-Europa, stets an die Anschauung und Besprechung der Karte geknüpft. — Kartenzeichnen. — 2 Stunden Geschichte: Uebersicht der Geschichte des Alterthums. Prokop Villašek.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Im ersten Semester 2 Stunden Arithmetik, 1 Stunde geometrische Anschauungslehre; im zweiten Semester 1 Stunde Arithmetik, 2 Stunden geometrische Anschauungslehre. — Proportionen, Regeldetrie mit ihren Anwendungen. — Schlussrechnung. — Wälsche Praktik. — Maass- und Gewichtskunde mit Berücksichtigung des metrischen Systems. — Grössenbestimmung und Berechnung der drei- und mehrseitigen Figuren. — Verwandlung und Theilung derselben. — Bestimmung der Gestalt der Dreiecke. Emil Riedl.

Naturgeschichte: Wochentlich 3 Stunden. Im 1. Semester: Mineralogie. — Beschreibung der Mineralien, deren Nutzen und Vorkommen. — Einiges von den Gebirgsgesteinen. — Im 2. Semester: Botanik. — Beschreibung der wichtigsten Pflanzen und Zusammenfassung derselben in Familien, Ordnungen u. s. w. Jos. Guckler.

IIb Klasse.

Religionslehre: wie IIa.

Latein: wochentlich 8 Stunden. — Formenlehre der unregelmässigen Flexionen (Nomen, Verbum) Pronomina, Numeralia, Lehre vom Participium (Part. coniunctum und Ablativus absolutus), Gerundium, Supinum, Acc. und Nom. c. Inf. Das Wichtigste vom Gebrauche der Conjunctionen. — Præparation und Memoriren von Vokabeln. Alle Wochen eine Schularbeit mit regelmässiger Correctur. Wilhelm Jerusalem.

Deutsch: Die Lehre vom zusammengesetzten, zusammengezogenen und verkürzten Satze. — Lesung, Erklärung und Wiedererzählung des Gelesenen. — Memoriren einzelner Gedichte. — Alle 2 Wochen eine Haus- oder Schularbeit. Franz Hadwich.

Geographie und Geschichte: wochentlich 4 Stunden. — 2 Stunden Geographie von Asien Afrika. — Eingehende Beschreibung des Südens und Westens Europas. — Kartenzeichnen. — 2 Stunden Geschichte: Uibersicht der Geschichte des Alterthums. Franz Hadwich.

Mathematik: wie in IIa. Emil Riedl.

Naturgeschichte: wie in IIa, wochentlich 3 Stunden. Jos. Guckler.

III. Klasse.

Religionslehre a) kath.: wochentlich 2 Stunden. — Geschichte der Offenbarung des alten Bundes. Laur. Hafenrichter.

— *b)* evang. wie Ia.

— *c)* mos. Religionslehre wochentlich 2 Stunden. Geschichte der Richter und der Könige. Die mündliche Lehre. M. Adler.

Latein: wochentlich 6 Stunden. Lecture: Memorabilia Alexandri Magni. Cap. 1, 3, 5, 6, 9, 11, 17, 24, 26, 28, 37, 42, 47, 48, 51, 57. — Cornelius Nepos: Aristides, Themi-

stocles. — Grammatik 2 Stunden. — Casuslehre eingeübt an ausgewählten einschlägigen Stücken des Uebungsbuches mit regelmässiger Præparation. — Monatlich 2 Schularbeiten und 1 Hausarbeit. Leopold Eysert.

Griechisch: wochentlich 5 Stunden. Regelmässige Formenlehre bis zum Perfect-Stamme; die einschlägigen Stücke aus dem Uebungsbuche mit schriftlicher Präparation aller griechischen und schriftlichen Uebersetzung aller deutschen Stücke. Im 2. Semester alle 14 Tage eine Schularbeit. Prokop Villašek.

Deutsch: wochentl. 3 Stunden. — Satzlehre. — Lesen mit sachlichen und grammatikalischen Bemerkungen. — Vortrag poëtischer Aufsätze. — Monatlich eine Haus- und eine Schularbeit. Theod. Kopetzky.

Geographie und Geschichte: wochentlich 3 Stunden. — Specielle Geographie von Deutschland und Nordeuropa, ferner Amerika und Australien. — Kartenzeichnen. — Uebersicht der Geschichte des Mittelalters mit besonderer Hervorhebung der österreichischen Länder. Josef Deil.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Im 1. Semester 2 Stunden Algebra, 1 Stunde Geometrie; im 2. Sem. 1 Stunde Algebra, 2 Stunden Geometrie. — Die 4 Spezies in Buchstaben, Klammern, Potenziren, Quadrat- und Kubikwurzeln, Permutiren, Kombinationen. — Der Kreis mit mannigfachen Konstruktionen in ihm und um ihn, Umfangs- und Inhaltsberechnung. Pp. Knothe.

Physik: wochentlich 3 Stunden. — Allgemeine Eigenschaften der Körper. — Aggregatzustände. — Wärmelehre. — Die chemischen Erscheinungen. — Lehre vom Gleichgewichte und von der Bewegung. Pp. Knothe.

IV. Klasse.

Religionslehre a) kath.: wochentlich 2 Stunden. — Geschichte der Offenbarung des neuen Bundes. Laur. Hafenrichter.

— *b)* evang. wie Ia.

— *c)* mos.: wochentlich 2 Stunden. — Die Geschichte des zweiten Tempels. — Entstehung des Talmuds. M. Adler.

Latein: wochentlich 6 Stunden. — 2 Stunden Grammatik, Moduslehre; 3 Stunden Lecture: Cæs. bell. Gall. I. II. V. cap. 1—23 VI. cap. 11—24. — 1 Stunde schriftl. Arbeiten. — Die letzten 4 Wochen Theorie des heroischen und elegischen Versmasses mit Uebungen aus Ovid. — Präparation. — Monatlich 2 Schul- und 2 Hausarbeiten. Ed. Philipp.

Griechisch: wochentlich 4 Stunden. — Perfectstamm, passiv. Aor., Verba in $\mu\iota$, das Wichtigste der unregelmässigen Flexionen, Uebersetzung aus dem Lesebuche. — Præparation. — Alle 14 Tage eine Schularbeit, wochentlich eine Hausarbeit. Ed. Philipp.

Deutsch: wochentlich 3 Stunden. — Lehre von den Tropen und Figuren. — Deutsche Prosodie und Metrik. — Brief- und Geschäftsstil. — Lekture mit sachlichen und sprachlichen Erläuterungen. — Uebungen im mündlichen Vortrage. — Alle 14 Tage eine schriftliche Haus- oder Schularbeit. Wilhelm Jerusalem.

Geographie und Geschichte: wochentlich 4 Stunden. I. Sem. — Geschichte der Neuzeit mit besonderer Betonung der österreichisch-ungarischen Monarchie. — II. Sem. — Spezielle Geographie der Länder Österreich-Ungarns. — Kartenzeichnen. Theod. Kopetzky.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Arithmetik: Lehre von den zusammengesetzten Verhältnissen und Proportionen, Zinsesrechnung, Terminrechnung, Kettensatz, Gesellschafts- und Allegationsrechnung, Zinseszinsrechnung. Gleichungen des ersten Grades. Geometrische Anschauungslehre: Lage von Linien und Ebenen im Raume; die wichtigsten Eigenschaften der Ecken. Oberflächen und Inhaltsbestimmung von Prismen, Pyramiden, Cylindern, Kegeln und der Kugel. Emil Riedl.

Physik: wochentlich 3 Stunden. — Lehre von der Bewegung. Das Wichtigste aus der Akustik, dem Magnetismus und der Elektricität. — Optik. — Erklärung der in die einzelnen Partien fallenden Naturerscheinungen. — Einige Hauptsätze der Astronomie. Emil Riedl.

V. Klasse.

Religionslehre a) kath.: wochentlich 2 Stunden. — Einleitung und Beweis der Wahrheit der katholischen Religion. Laur. Hafenrichter.

— *b*) evang. Klassen V—VIII gemeinschaftlich: wochentlich 2 Stunden. — 1. Kirchengeschichte: Von der Ausbreitung der Reformation bis zum II. Zeitraume der neueren Kirchengeschichte 1530—1750. 2. Religionslehre: Die Heilsordnung, Wiedergeburt, Busse, Glaube, Rechtfertigung und Heiligung, der neue Gehorsam. Die christlichen Tugenden und ihr Prinzip. Dazu wurden Abschnitte aus dem Neuen Testamente im Urtext gelesen und erläutert. K. Färber.

— *c*) mos. Religionslehre wochentlich 2 Stunden. — Würde und Bestimmung des Menschen. — Inhalt der 24 Bücher der heiligen Schrift. M. Adler.

Latein: wochentlich 6 Stunden. — Livius: lib. I. II. V. mit Auswahl. — Ovidius: Her. I. Fast. I. 543—586. Met. I. 163—415. V. 294—571, 642—678. VIII. 611—729. XI. 410—748. Wiederholung schwierigerer Kapitel der Syntax, wochentlich eine Hausarbeit, alle vierzehn Tage eine Schularbeit. Dr. A. Leclair.

Griechisch: wochentlich 5 Stunden. — Xenophon (Chrest. von Schenkl): Anab. III. V. VIII. 1—14. Cyrop. VII. 1—17. Homer: H. (ed. Hochegger) IV. VI. Grammatik: Casuslehre mit praktischer Einübung; wochentlich eine Hausarbeit, alle vierzehn Tage eine Schularbeit. Dr. A. Leclair.

Deutsch: wochentlich 2 Stunden. — Grundzüge der deutschen Metrik. — Lecture epischer und lyrischer Stücke an der Hand des Lesebuches, nebst Besprechung der betreffenden Dichtungsarten; Deklamation selbstgewählter und festgesetzter Gedichte. — Alle zwei Wochen eine Haus- oder Schularbeit. Leopold Eysert.

Geographie und Geschichte: wochentlich 4 Stunden. — I. Sem. Geschichte des Alterthums bis zu den Diadochenkämpfen. — II. Sem. deren Abschluss und römische Geschichte bis zu den Flaviern (incl.) mit steter Berücksichtigung der Geografie und Culturgeschichte. Leopold Eysert.

Mathematik: wochentlich 4 Stunden. — Algebra: Die 4 Species in algebraischen Ausdrücken. Theilbarkeit der Zahlen. Grösstes Mass, kleinstes Vielfaches. Brüche, Verhältnisse und Proportionen. — Geometrie: Planimetrie. Pp. Knothe.

Naturgeschichte: Wochentlich 2 Stunden. — I. Semester. Mineralogie. — Die morphologischen, physischen und chemischen Merkmale der Mineralien und Beschreibung der wichtigsten Mineralspecies mit bes. Rücksicht auf Vorkommen und Verwendung. Grundzüge der Geologie und Geognosie. — II. Semester: Botanik. Morphologie der Pflanzen, natürliche und künstliche Systeme und die wichtigsten Pflanzenfamilien mit Rücksicht der anatomischen und physiologischen Merkmale der Pflanzen, deren Vorkommen und Verwendung. Jos. Guckler.

VI. Klasse.

Religionslehre a) kath.: wochentlich 2 Stunden. — Die katholische Glaubenslehre. Laur. Hafenrichter.

— *b*) evang. wie V.

— *c*) mos. Religionslehre, wochentlich 2 Stunden. — Dogmen, Pflichten gegen Gott. M. Adler.

Latein: wochentlich 6 Stunden. — 5 Stunden: Sallustii bellum Jugurthinum, Ciceronis oratio in Cat. II. III., Vergil. Aeneidos lib. III. — 1 Stunde grammatisch-stilistische Uebungen. — Monatlich 2 Haus- und 2 Schularbeiten. Eduard Philipp.

Griechisch: wochentlich 5 Stunden. — 1 Stunde Grammatik. — Moduslehre in Haupt- und Nebensätzen; Infinitiv und Participium. — Lecture: Herodot lib. VIII. Cap. 1—100; Homer Ilias XVI, XXI, XXII. — Privatlecture Ilias VI. — Alle 14 Tage eine Schul- oder Hausarbeit.

Deutsch: wochentlich 3 Stunden. — Geschichte der deutschen Literatur von den ältesten Zeiten bis zum XVIII. Jahrhunderte. Lekture aus dem Lesebuche von Egger. Uebersicht der mittelhochdeutschen Laut- und Formenlehre. Gewählte Lekture aus Reichels Lesebuche. — Deklamirübungen. — Alle 3 Wochen eine Haus- oder Schularbeit. Josef Deil.

Geographie und Geschichte: wochentlich 3 Stunden. — Schluss der Geschichte des Alterthums und Geschichte des Mittelalters mit steter Berücksichtigung der österreichischen Länder. — Wiederholung einzelner Partien der Geographie. Josef Deil.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Kettenbrüche, Potenzen, Wurzeln, Logarithmen, Gleichungen des 1. Grades mit einer und mehr Unbekannten. — Geometrie: Stereometrie und Goniometrie. Emil Riedl.

Naturgeschichte: Wochentlich 2 Stunden. — Die gesammte Zoologie mit besonderer Berücksichtigung der wichtigeren anatomischen und physiologischen Merkmale der Thiere. Jos. Guckler.

VII. Klasse.

Religionslehre a) kath.: wochentlich 2 Stunden. — Die katholische Sittenlehre. Laur. Hafenrichter.

— *b*) evang.: wie in V.

— *c*) Religionslehre wochentlich 2 Stunden. — Die Pflichten gegen sich selbst, die Pflichten gegen unsere Nebenmenschen. Die Bürgerpflichten. M. Adler.

Latein: wochentlich 5 Stunden. — Ciceronis orat. de imperio Cn. Pompei; in Marcum Antonium orat. Philip. II. — Virgilii Aeneid. lib. VII. VIII. IX. — Ausgewählte Stücke wurden memorirt; wochentlich eine Stunde grammat.-stilist. Uebungen. — Wochentlich eine Hausarbeit, monatlich eine Schularbeit. Dr. J. Alton.

Griechisch: wochentlich 4 Stunden. — Demosthenes: II. III. Philippische Rede; die Rede über die Angelegenheiten im Chersones. — Hom. Odyssee I. X. — Sophokles: Oedipus Coloneus. — Grammatik: Particip, Attraction, Fragesätze, Negationen, Partikeln mit praktischer Einübung. — Wochentlich eine Hausarbeit, monatlich eine Schularbeit. Dr. J. Alton.

Deutsch: wochentlich 3 Stunden. — Literaturgeschichte des XVIII. Jahrhunderts. Theorie der drei Gattungen der Poesie. Ausgewählte Lekture aus dem Lesebuche, ferner Iphigenie, Torquato Tasso und Wilhelm Tell. Deklamirübungen. Alle drei Wochen eine Haus- oder Schularbeit. Josef Deil.

Geographie und Geschichte: wochentlich 3 Stunden. — Geschichte der Neuzeit. — Partienweise Wiederholung des geographischen Lehrstoffes. Uebersichtliche Darstellung der einschlägigen Culturgeschichte. Josef Seidl.

Mathematik: wochentlich 3 Stunden. — Algebra: Unbestimmte Gleichungen des 1. Grades; quadratische Gleichungen, Exponentialgleichungen. Progressionen, Zinseszins- und Rentenrechnung. — Summirung einiger arithm. Reihen höherer Ordnung. Binomischer Lehrsatz. — Geometrie: Ebene Trigonometrie. — Anwendung der Algebra zur Lösung geometrischer Constructionsaufgaben. — Analytische Geometrie in der Ebene. Pp. Knothe.

Physik: wochentlich 3 Stunden. — Allgemeine Eigenschaften der Körper. Statik und Dynamik. Chemische Verbindungen. Wellenlehre. Pp. Knothe.

Philosophische Propaedeutik: wochentlich 2 Stunden. — Formale Logik. Dr. A. Leclair.

VIII. Klasse.

Religionslehre a) kath.: wochentlich 2 Stunden — Geschichte der Kirche Christi. Laur. Hafenrichter.

— *b*) evang.: wie in V.

— *c*) mos.: Religionslehre wochentlich 2 Stunden. — Wiederholung der Dogmen und der Pflichtenlehre. — Geschichte des israelitischen Volkes nach der Zerstörung des Tempels. — In allen Klassen wurden gewählte Stücke aus der Bibel im Urtexte gelesen. M. Adler.

Latein: wochentlich 5 Stunden. — Tacitus Histor. I., Germania, Agricola. Als Privatlecture Histor. II. — Horatius. Od. I., 1. 2. 3. 4. 7. 11. 12. 14. 15. 22. 31. II., 1. 13. 16. 18. III., 1. 2. 3. 4. 5. 30. IV., 3. 5. 7. 12. Epod. 7. 9. Sat. I., 4. 6. Epist. I, 1. 2. 10. — Wochentlich eine Stunde grammatisch-stilistische Uebungen. — Monatlich eine Haus- und eine Schularbeit. R. Bittner.

Griechisch: wochentlich 5 Stunden. — Platons Gorgias. — Sophokles Elektra. — Hom. Odys. XIII.—XV. — Als Privatlecture Platons Apologie, Hom. Od. XVI.—XVIII. — Wiederholung der Grammatik. — Monatlich eine Haus- oder Schularbeit. R. Bittner.

Deutsch: wochentlich 3 Stunden. — Literaturgeschichte des XIX. Jahrhunderts. Feststellung der wichtigsten ästhetischen Begriffe. Lekture aus dem Lesebuche. Alle 3 Wochen eine Haus- oder Schularbeit. Redeübungen. Jos. Deil.

Geographie und Geschichte: wochentlich 3 Stunden. — I. Semester: Geschichte der österreichisch-ungarischen Monarchie. II. Statistik des österreichisch-ungarischen Kaiserstaates. — Wiederholung des gesammten historischen und geographischen Lehrstoffes Jos. Deil.

Mathematik: wochentlich 2 Stunden. — Uebungen in Lösung mathematischer Probleme Zusammenfassende Wiederholung des mathematischen Unterrichtes. Dr. And. Bauer.

Physik: wochentlich 3 Stunden. — Wiederholung und Schluss der Akustik, Magnetismus Elektricität, Optik und Wärmelehre. Dr. And. Bauer.

Philosophische Propaedeutik: wochentlich 2 Stunden. — Empirische Psychologie. Dr. A. Leclair.

III. Verzeichniss der Lehrbücher.

I. Religion.

A. katholische.

I. Klasse.

Fischer Franz, Le' rbuch der katholischen Religion. 3 Aufl. Wien 1872.

II. Klasse.

Liturgik oder Erklärung der gottesdienstlichen Handlungen der katholischen Kirche. 6. Aufl. Prag. Carl Bellmanns Verlag 1876.

III. Klasse.

Geschichte der Offenbarung des alten Testamentes. Prag, Carl Bellmanns Verlag 1863.

IV. Klasse.

Geschichte der Offenbarung des neuen Testaments. Prag, Carl Bellmanns Verlag 1864.

V. Klasse.

Wappler Anton, Dr., Lehrbuch der kath. Religion. Wien 1869. Braumüller, 1. Theil.

VI. Klasse.

Wappler Anton, Dr., Lehrbuch der katholischen Religion. 2. Theil.

VII. Klasse.

Wappler Anton, Dr., Lehrbuch der katholischen Religion. 3. Theil.

VIII. Klasse.

Fessler J., Dr., Geschichte der Kirche Christi. 3. Aufl. Wien 1868.

B. evangelische.

Klasse I—IV.

Ormischer, Luthers Katechismus. Heilige Schrift nach Luthers Übersetzung. Bischoff Kirchengeschichte in Bildern. 2. Aufl. Stettin 1 64.

Klasse V—VIII.

Kurz, Abriss der Kirchengeschichte. 7. Aufl. Milau 1871.
Hagenbach, Leitfaden zum christlichen Religionsunterricht IV. Aufl. Leipzig 1867.
Griech. Neues Test. ed. Tischendorf.

C. mosaische.

Klasse I—IV.

Netib Emuna. Leitfaden beim Religionsunterrichte der isr. Jugend von *Wolfgang Wessely*. 8. Aufl. Prag 1863. (Tempsky.)

Klasse V—VIII.

. Alume *Josef* v. *J. Johlson*. 4. Aufl. Wien 1865 und
. Isr. Glaubens- und Pflichtenlehre v. *Leopold Brener*. 3. Aufl. Wien 1858.
. In allen acht Klassen die Bibel in der Ursprache.

II. Lateinische Sprache.

I. Klasse.

llendt Friedrich, Lateinische Grammatik, bearbeitet von M. Seyffert. 15. Auflage. Berlin 1871. (Weidmann.)
hinnagl Maurus, theoretisch-praktisches lateinisches Elementarbuch für die 1. Gymnasialklasse. 8. verbesserte Aufl. herausgegeben von Heinrich Maschek. Wien 1871. (Fried. Beck.)

II. Klasse.

Ellendt Friedrich, Lateinische Grammatik wie in Klasse I.
Vielhaber Leop., Übungsbuch zur Einübung der Formenlehre und der Elementar-Syntax. II. Heft. Für die zweite Gymnasialklasse. Wien 1875. (Hölder.)

III. Klasse.

Ellendt Friedrich, Lateinische Grammatik, wie in Klasse I.
Memorabilia Alexandri Magni et aliorum virorum illustrium. Phaedri fabulae. Ed. *C. Schmidt. O. Gehlen.* 2. Aufl. Wien 1871. (Hölder.)
Vielhaber Leop., Aufgaben zum Übersetzen in's Lateinische zur Einübung der Syntax, 1. Heft, Casuslehre, für die dritte Gymnasialklasse. Zweite verbesserte Auflage. Wien 1872. (Hölder.)

IV. Klasse.

Ellendt Friedrich, Lateinische Grammatik wie in Klasse I.
C. Julii Cæsaris commentarii cum supplementis A. Hirtii et aliorum. Recognovit *E. Hoffmann.* Vol. I. Bellum gallicum. Wien 1874. (Gerold.)
P. Ovidii Nasonis carmina selecta. In usum scholarum edidit *J. C. Grysar.* Editio XIII. Wien 1873. (Gerold.)
Vielhaber Leop., Übungsbuch zur Einübung der Formenlehre und der Syntax. II. Heft. Verbale Rection. Für die vierte Klasse der Gymnasien. Wien 1872. (Hölder).

V. Klasse.

Ellendt Friedrich, Lateinische Grammatik wie in Klasse I.
T. Livii ab urbe condita librorum partes selectae. In usum scholarum iterum edidit *J. C. Grysar.* Volumen prius Wien 1872 (Gerold.)
P. Ovidii Nasonis carmina selecta. In usum scholarum edidit *J. C. Grysar.* Editio XIII. Wien 1873 (Gerold.)
Süpfle K. Fr., Aufgaben zu lateinischen Stylübungen. II. Theil. Karlsruhe 1874. (Groos.)

VI. Klasse.

Ellendt Friedrich, Lateinische Grammatik wie in Klasse I.
G. Sallustii Crispi Jugurtha. Recognovit G. Linkerus. Wien 1873. (Gerold.)
C. Julii Cæsaris commentarii cum supplementis A. Hirtii et aliorum. Recognovit *E. Hoffmann.* Vol. II. De bello civili. Wien 1873. (Gerold.)
M. Tullii Ciceronis orationes selectæ. Ed. *Klotz.* Abth. Nr. 12. in Catilinam 2 u. 3.
P. Virgilii Maronis Aeneidos epitome. Accedit ex Georgicis et Bucolicis delectus. Scholarum in usum edidit *E. Hoffmann.* Wien 1872. (Gerold.)
Süpfle K. Fr., Aufgaben zu lateinischen Stylübungen. II. Theil. Karlsruhe 1874. (Groos.)

VII. Klasse.

Ellendt Friedrich, Lateinische Grammatik wie in Klasse I.
M. Tullii Cicerones orationes selectæ. Ed. *Klotz.* Leipzig 1871. De imperio Cn. Pompeii in M. Antonium Phil. II.
P. Virgilii Maronis Aeneidos epitome. Accedit ex Georgicis et Bucolicis delectus. Scholarum in usum edidit *E. Hoffmann.* Wien 1872. (Gerold.)
Seyffert M., Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen in's Lateinische für Secunda Zehnte durchgesehene Auflage. Leipzig 1872 (Holtze.)

VIII. Klasse.

Meiring M., Dr. Lateinische Grammatik für die mittleren und oberen Klassen der Gymnasien. 4. Aufl. Bonn 1869. (Habicht.)
Cornelii Taciti libri, qui supersunt ed. *Halm.* Leipzig 1874. (Teubner.)
Horatii Flacci carmina selecta. In usum scholarum ed. *J. C. Grysar.* Wien 1873. (Gerold
Seyffert M., Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen in's Lateinische für Secund Zehnte durchgesehene Auflage. Leipzig 1872. (Holtze.)

III. Griechische Sprache.

III. und IV. Klasse.

Curtius G., Griechische Schulgrammatik. 11. Aufl. Prag 1875. (Tempsky.)
Schenkl K., Griechisches Elementarbuch nach den Grammatiken von Curtius und Kühner. 9. Aufl. Prag 1875. (Tempsky.)

V. Klasse.

Curtius G., Schulgrammatik wie in Klasse III.
Schenkl K., Chrestomathie aus Xenophon. 5. Aufl. Wien 1872. (Gerold.)
Homeri Iliados epitome. Ed. *Fr. Hochegger*. Pars I. et II. Wien. (Gerold.)
Schenkl K., Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen und Lateinischen in's Griechische. 3. Aufl. Prag 1874. (Tempsky.)

VI. Klasse.

Curtius G., Schulgrammatik wie in Klasse III.
Homeri Iliados epitome. Ed. *Fr Hochegger*. Pars I. et II. Wien 1872. (Gerold.)
Herodoti de bello persico librorum epitome. Ed. *And. Wilhelm*. 4. Aufl. Wien. (Gerold.)
Schenkl K., Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen und Lateinischen in's Griechische. 3. Aufl. Wien 1874.

VII. Klasse.

Curtius G., Schulgrammatik wie in Klasse III.
Demosthenes, Zehn Reden. Von Dr. *Pauly*. 3. Aufl. Wien. (Gerold.)
Sophokles Oedipus Coloneus. Ed. *Dindorf*. Leipzig 1870. (Teubner.)
Homeri Odysseæ epitome. Ed. *Fr. Pauly*. I. Bd. 3. Aufl. Prag 1872 (Tempsky.)
Schenkl K., Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen und Lateinischen in's Griechische. 3. Aufl. Prag 1874. (Tempsky.)

VIII. Klasse.

Curtius G., Schulgrammatik wie in Klasse III.
Platon's Gorgias. Von *E. Jahn*. Wien. (Gerold.)
Sophokles Elektra. Ed. *Dindorf*. Leipzig. 1870. (Teubner.)
Homeri Odysseæ epitome. Ed. *Fr. Pauly*. I. Bd. 3. Aufl. Prag 1870. (Tempsky.)
Schenkl K., Übungsbuch zum Übersetzen aus dem Deutschen und Lateinischen in's Griechische. 3. Aufl. Prag 1874. (Tempsky.)

IV. Deutsche Sprache.

I. Klasse.

Bauer Friedrich, Grundzüge der neuhochdeutschen Grammatik. 15. Aufl. (Für Österreich bestimmte Ausgabe.) Nördlingen 1874. (Beck.)
Neumann Alois und *Gehlen Otto*, Deutsches Lesebuch für die erste Klasse der Gymnasien und verwandter Anstalten 6. Aufl. Wien 1876.

II. Klasse.

Bauer Friedrich, Grammatik wie in Klasse I.
Neumann Alois uud *Otto Gehlen*, Deutsches Lesebuch für die zweite Klasse der Gymnasien und verwandter Anstalten 6. Aufl. Wien 1876.

III. Klasse.

Bauer Friedrich, Grammatik wie in Klasse I.
Neumann Alois und *Gehlen Otto*, Deutsches Lesebuch für die dritte Klasse der Gymnasien und verwandter Anstalten. 3. Aufl. Wien 1875.

IV. Klasse.

Bauer Friedrich, Grammatik wie in Klasse I.
Neumann Alois und *Gehlen Otto*, Deutsches Lesebuch für die vierte Klasse der Gymnasien und verwandter Anstalten 3. Aufl. Wien 1876.

V. Klasse.

Bauer Friedrich, Grammatik wie in Klasse I.
Egger Alois, Deutsches Lehr- und Lesebuch für höhere Lehranstalten. I. Theil 4. Aufl. Wien 1875. (Hölder.)

VI. Klasse.

Bauer Friedrich, Grammatik wie in Klasse I.
Egger Alois, Deutsches Lehr- und Lesebuch für höhere Lehranstalten. II. Theil I. Bd. 3. Aufl. Wien 1874. (Hölder.)
Reichel K., Mittelhochdeutsches Lesebuch für Gymnasien mit Glossar. 2 Auflage. Wien 1871. (Gerold.)

VII. Klasse.

Bauer Friedrich., Grammatik wie in Klasse I.
Egger Alois. Deutsches Lehr- und Lesebuch für höhere Lehranstalten. II. Theil, I. Bd., 3. Aufl. Wien 1874. (Hölder.)

VIII. Klasse.

Bauer Friedrich, Grammatik wie in Klasse I.
Egger Alois, Deutsches Lehr- und Lesebuch für höhere Lehranstalten, II Theil, II. Bd., Wien 1873. (Hölder.)
Mozart J., Deutsches Lesebuch für die oberen Klassen der Gymnasien. III. Band, 4. Aufl. Wien 1868.

V. Geographie und Geschichte.

I. Klasse.

Herr Gust., Lehrbuch der vergleichenden Erdbeschreibung für die unteren und mittleren Klassen der Gymnasien, Realschulen und verwandter Anstalten. Erster Cursus. Dritte verbesserte Aufl. Wien 1876. (Sallmayer & Comp.)

II. Klasse.

Klun B. F., Leitfaden für den geographischen Unterricht an Mittelschulen. 15. Auflage Wien 1874. (Gerold.)
Gindely Ant., Lehrbuch der allgemeinen Geschichte für die unteren Klassen der Mittelschulen. I. Bd. Das Alterthum. 4. Aufl. Prag 1873. (Tempsky.)

III. Klasse.

Klun B. F. Leitfaden wie in Klasse II.
Gindely Ant., Lehrbuch wie in Klasse II., II. Bd. Das Mittelalter.

IV. Klasse.

Klun B. F. Leitfaden wie in Klasse II.
Gindely Ant., Lehrbuch wie in Klasse II., III. Bd. Die Neuzeit.

V. Klasse.

Klun B. F., Leitfaden wie in Klasse II.
Gindely Ant., Lehrbuch der Allgemeinen Geschichte für Obergymnasien, I. Bd. Das Alterthum. 3. Aufl. Prag 1873. (Tempsky.)

VI. Klasse.

Klun B. F., Leitfaden wie in Klasse II.
Gindely Ant., Lehrbuch wie in Klasse V. II. Bd. Das Mittelalter.

VII. Klasse.

Klun B. F., Leitfaden wie in Klasse II.
Gindely Ant., Lehrbuch wie in Klasse V. III. Bd. Neuzeit.

VIII. Klasse.

Klun B. F., Leitfaden wie in Klasse II.
Pölitz, Oesterreichische Geschichte. Neue Ausgabe v. *O. Lorenz*. 2. Aufl. Wien 1871. (Gerold.)
Schmitt Fr., Statistik des österreichisch-ungarischen Kaiserstaates. 4. Aufl. neu bearbeitet von *G. A. Schimmer*. Wien 1872. (Gerold.)

VI. Arithmetik und Geometrie.

I. und II. Klasse.

Močnik Fr. Dr., Lehrbuch der Arithmetik für die Untergymnasien. I. Abth. 21. Auflage Wien 1874. (Gerold.)

Močnik Fr. Dr., Geometrische Anschauungslehre für das Untergymnasium I. Abth. 13. Aufl. Wien 1876. (Gerold.)

III. und IV. Klasse.

Močnik Fr. Dr., Lehrbuch der Arithmetik für die Untergymnasien II. Abth. 16. Auflage Wien 1876. (Gerold.)

Močnik Fr. Dr., Geometrische Anschauungslehre für das Untergymnasium II. Abth. 9. Aufl. Wien 1873. (Gerold.)

V.—VIII. Klasse.

Močnik Fr. Dr., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für die oberen Klassen der Mittelschulen. 15. Aufl. Wien 1876. (Gerold.)

Heis E. Dr., Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. 38. Aufl. Köln 1874 (Du Mont), Wien (Braumüller).

Močnik Fr. Dr., Lehrbuch der Geometrie für die oberen Klassen der Mittelschulen. 12. Aufl. 1874. (Gerold.)

VII. Naturgeschichte.

I. Klasse.

Pokorny, Illustrirte Naturgeschichte. I. Thierreich. 13. Aufl. Prag 1876. (Tempsky.)

II. Klasse.

Pokorny, Illustrirte Naturgeschichte. II. Pflanzenreich. 10. Aufl. 1875. III. Mineralogie. 9. Aufl. Prag 1876. (Tempsky.)

V. Klasse.

Fellöcker, Anfangsgründe der Mineralogie. 6. Aufl. Wien 1871.

Bill, Grundriss der Botanik für Schulen. 5. Aufl. Wien 1872. (Gerold.)

VI. Klasse.

Schmidt Oskar, Leitfaden der Zoologie. 3. Aufl. mit 192 Holzschnitten. Wien 1874. (Gerold.)

VIII. Naturlehre.

III. und IV. Klasse.

Krist J., Anfangsgründe der Naturlehre für die unteren Klassen der Mittelschulen. 7. Auflage. Mit 310 Holzschnitten. Wien 1876.

VII. Klasse.

Münch P., Lehrbuch der Physik. Mit 268 Abbildungen. 2. Aufl. Freiburg 1872.

VIII. Klasse.

Koppe K., Anfangsgründe der Physik für den Unterricht in den oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. Mit 345 Holzschnitten. Essen 1873.

IX. Philosophie.

VII. Klasse.

Lindner G. A. Dr., Lehrbuch der formalen Logik. 3. Aufl. Wien. 1873. (Gerold.)

VIII. Klasse.

Lindner G. A. Dr., Lehrbuch der empirischen Psychologie als induktive Wissenschaft. 4. Aufl. Wien 1874. (Gerold.)

IV. Themen zu den Aufsätzen im Deutschen im Obergymnasium.

V. Klasse.

1. Was macht uns den Herbst zur lieben Jahreszeit?
2. Wodurch erregen die Phönizier unser besonderes Interesse?
3. Der Nil in seiner Bedeutung für Aegypten.
4. Segen des Fleisses.
5. Wodurch hat Lycurg die von ihm gegebenen Gesetze gestützt?
6. Die Schmeichler unsere gefährlichsten Feinde.
7. Themistocles und Aristides — eine Parallele.
8. Was ruft uns das scheidende Jahr zu?
9. Des Meeres und der Wüste Gefahren.
10. Einnahme Roms durch die Gallier.
11. Die stärkende Kraft eines Ausgangs ins Freie.
12. Durch Schaden wird man klug.
13. Das Wasser in seiner segnenden und verheerenden Wirkung.
14. Das Geschlecht der Scipionen in seiner Bedeutung für Rom.
15. Die Leiden und Freuden einer kleineren Reise.
16. Gebraucht der Zeit; sie eilt so schnell von hinnen. Eysert.

VI. Klasse.

1. Octavianus und Constantin. Parallele.
2. Dein Auge kann die Welt trüb oder klar dir machen;
   wie du sie anschaust, wird sie weinen oder lachen. (Rückert.)
3. Wie ist die „Blindheit“ Homers zu verstehen?
4. Übersicht der Völkerwanderung.
5. Besprechung der Romanze „Der Graf von Habsburg“.
6. Welchen Reiz hat für uns Italien?
7. Übersetzung aus dem Mittelhochdeutschen ins Neuhochdeutsche.
8. Die Treue im Nibelungenliede.
9. Charakteristik der Helden des Nibelungenliedes.
10. Licht- und Schattenseiten der Auswanderung.
11. Besprechung eines Gemäldes nach einer Scene aus Schillers oder Göthe's Bal
    laden (frei gewählt).
12. Übersetzung aus dem Neuhochdeutschen ins Mittelhochdeutsche.
13. Arbeit ist des Bürgers Zierde.
    Segen ist der Mühe Preis,
    ehrt den König seine Würde,
    ehret uns der Hände Fleiss. (Schillers Glocke.)
14. Eine Schwalbe macht keinen Sommer. (Erklärung.) Josef Deil.

VII. Klasse.

1. Die Reste des deutschen Mythus in der Sage, im Leben und im Volksglaube
2. Suchst du das Grösste, das Höchste, die Pflanze kann es dich lehren,
   was sie willenlos ist, sei du es wollend, das ist's. (Schiller.)
3. Lobrede auf die deutsche Sprache.
4. Doch mit des Geschickes Mächten
   ist kein ew'ger Bund zu flechten. (Erklärung.) (Schiller.)
5. Besprechung der Ballade „Der Ring des Polykrates“.
6. Welche Mahnung ist wichtiger für uns, memento mori oder memento vivere
7. Parallele zwischen Lessing und Herder.
8. Die Technik des Dramas.
9. Gedankengang von Göthes Drama: Iphigenie auf Tauris.
10. Die Künstler von Schiller. Ideenangabe und Gliederung.
11. Wer an den Weg bauet, hat viele Meister. (Sprichwort.)
12. Göthe's dichterische Eigenart. Josef Deil.

VIII. Klasse.

1. In wie ferne ist in Iphigeniens Charakter die antike Lebensanschauung mit d
   modernen verwechselt?

2. Nichts taugt Ungeduld,
noch weniger Reue,
jene vermehrt die Schuld,
diese schafft neue.
3. Die drei Perioden der Weltgeschichte.
4. Was verdankt Böhmen den Přemysliden?
5. Redekünste des M. Antonius in Shakespeare's Julius Cæsar.
6. Welche Gefahren drohen der Überlegenheit Europas über die anderen Erdtheile?
7. Erklärung des Gedichtes „die Worte des Glaubens" von Schiller.
8. Ein Dorfältester tröstet seine Gemeinde, die in Folge der Aufhebung des Ediktes von Nantes Frankreich verlassen musste.
9. Schwermuth und Genesung des Orestes nach Göthe's „Iphigenie."
10. Ob wol das Nibelungenlied nur einen Verfasser hat?
11. Die Quellen der Geschichte.
12. Krieg und Frieden als Förderer der Künste und Wissenschaften. (Maturitätsprüfungsarbeit.)

Josef Deil.

V. Freie Gegenstände.

I. Böhmisch.

Ia, Ib und Ic Klasse: wochentlich 2 Stunden. — Die regelmässige Formenlehre bis zum Genitiv der Deklination nach Karlik's praktischer Grammatik. Lesen mit Erklärung der Lesestücke. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Josef Seidl.

IIa und IIb Klasse: wochentlich 2 Stunden. — Lehre vom Nomen, Pronomen und Verbum, nach Karlik. Lesebuch von Čelakovský. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Josef Seidl.

III. und IV. Klasse (deutsche Abtheilung): wochentlich 2 Stunden. — Ergänzung der regelmässigen Formenlehre (Verbum, Pronomen) mit Zugrundlegung von Karlik's praktischem Sprachbuch. Lesen und Übersetzen ausgewählter Stücke aus Jireček's Lesebuch. Monatlich 2 schriftliche Arbeiten. P. Villašek.

III. und IV. Klasse (böhmische Abtheilung): wochentlich 2 Stunden. — Ergänzung der Formenlehre. Satzverbindungen. Periode mit besonderer Bedachtnahme auf den Gebrauch von Tempus und Modus und auf die wichtigsten diesen Gebrauch regelnden Gesetze. Das Wichtigste aus der Wortbildungslehre. Alle 14 Tage eine schriftliche Arbeit. Josef Seidl.

V. und VI. Klasse (deutsche Abtheilung): wochentlich 2 Stunden. — Übersetzung und Erklärung ausgewählter Stücke aus dem Lesebuche von Jireček. Memoriren kurzer Gedichte. Gesprächsübungen. Monatlich 2 Schularbeiten. — Die weniger vorgeschrittenen Schüler wurden in der regelmässigen Formenlehre geübt nach Karlik's praktischem Sprachbuche. P. Villašek.

V. und VI. Klasse (böhmische Abtheilung): wochentlich 2 Stunden. — Lektüre mit Erklärung von ausgewählten Musterstücken aus der mittleren Literatur. — Periode von der zweiten Hälfte des XV. Jahrhunderts bis zum Ausbruch des 30jährigen Krieges. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. Josef Seidl.

VII. und VIII. Klasse (deutsche Abtheilung): wochentlich 2 Stunden. — Lesen mit sachlicher und sprachlicher Erklärung ausgewählter Stücke prosaischen und poëtischen Inhaltes in Jireček's Anthologie (III. Theil). Gesprächsübungen. Monatlich 2 schriftliche Arbeiten. P. Villašek.

VII und VIII Klasse (böhmische Abtheilung): wochentlich 2 Stunden. — Lekture aus Jireček, 3 Bd. Deklamirübungen. — Neuere und neueste Literaturgeschichte. Alle 3 Wochen ein Aufsatz. Josef Seidl.

Remunerationen: Es wurden blos 4 Stunden als Mehrleistung mit 4 × 29 fl. 41 kr. = 117 fl. 64 kr. aus dem Studienfonde honorirt.

II. Französische Sprache.

Dieselbe wurde in 2 Abtheilungen mit je 2 Unterrichtsstunden wochentlich gelehrt. Vorgetragen wurde in beiden Abtheilungen nach Süpfle's theoretisch-praktischer Schulgrammatik für Gymnasien. 4. Auflage. Heidelberg 1874; die Lesestücke wurden der französischen Chrestomatie von Grunert. 11. Auflage Stuttgart 1874 entnommen.

In der I. Abtheilung wurden nach den Regeln der Aussprache die einzelnen Redetheile durchgearbeitet, und fliessendes Lesen eingeübt. Übersetzungen wurden entsprechend vorgenommen. Haus- und Schularbeiten nach Bedarf.

In der 2. Abtheilung wurde bei den unregelmässigen Zeitwörtern begonnen, sodann die Lehre der Participes vorgenommen, und sodann auf die unregelmässigen Formen, so wie auf die Syntax der anderen Redetheile übergegangen.

Mit jenen Schülern, welche schon im Vorjahre diesen Curs absolvirt haben, wurde auch nach Zulass der verwendbaren Zeit die besondere Lehre vom Subjonctif durchgearbeitet.

Sowol in der 1. als auch in der 2. Abtheilung wurde der Unterricht stets auf den vergleichenden Hinweis auf die lateinische Sprache basiert.

Remunerationen aus dem Studienfonde mit jährlich 240 fl.

Heinrich Walter von Waltheim.

III. Freihandzeichnen.

Der Zeichenunterricht wurde wochentlich einmal in 2 aufeinanderfolgenden Stunden ertheilt. Der vorgeschriebene Lehrplan wurde nach Thunlichkeit eingehalten, und die Hindernisse, welche sich vermöge der ungleichen Vorbildung und der verschiedenen Altersstufen der Schüler ergaben, fanden die gebührende Berücksichtigung.

Vorgenommen wurde:

Zeichnen ebener geometrischer Gebilde aus freier Hand nach Vorzeichnungen an der Schultafel; Elemente des Flachornamentes; Zeichnen nach einfachen ornamentalen Modellen; Kopiren mustergiltiger Vorlagen.

Als Unterrichtsbehelfe dienten:

Formensammlung von Roller,

Vorlagenwerk von Herdtle,

Ornamente der italienischen Renaissance von Kettlitz.

Die Popp'schen und die Stuttgarter Modelle.

Remuneration aus dem Studienfonde jährlich 120 fl. Franz Sofka.

IV. Kalligraphie

in 4 Parallelabtheilungen mit je 1 Stunde für die Schüler der I. und II. Klasse.

Lehrstoff: I. Klasse: Die Current- und Schnellschrift,

II. Klasse: Vervollkommnung in der Current- und Lateinschrift — Schnellschriftübungen.

Anempfohlen wurden die Vorlagen von Tust.

Remunerationen aus dem Studienfonde mit 200 fl. jährlich. Theodor Urban.

V. Stenographie.

Zwei Abtheilungen; es betheiligten sich am Unterrichte die Schüler der IV—VIII. Klasse

I. Abtheilung (2 Stunden wochentlich) I. Theil: Allgemeines. Wortbildungslehre II. Theil: Wortkürzungslehre. Jeder Absatz war mit zahlreichen Übungen verbunden deren Correcta in Reinhefte übertragen wurden als stenokalligraphische Übungen.

Lesebuch von Karl Engelhard. III. Theil: Allgemeines über die Satzkürzung Formkürzung.

II. Abtheilung (2 Stunden wochentlich) I. Theorie der Gabelsberger'schen Satzkürzung. — Praktische Übungen in zwei Abtheilungen mit steigender Geschwindigkeit bis zu 100 Worten in der Minute. (Einzelne Schüler schrieben noch darüber.) Diktate aus der „Prager Zeitung", dem „Pr. Abendblatte" und Faulmann's „Schule der Praxis".

Remuneration aus dem Studienfonde 240 fl. jährlich.

J. Ottokar Pražák.

VI. Gesang

in 1 Abtheilung 2 Stunden wochentlich.

Noten- und Schlüsselkenntniss. Zeitdauer der Noten. Pausen. Ueber Rhytmus und Takt. Rhytmische Formen. Taktarten. Dur- und Molltonleitern. Intervallenlehre. Das Wichtigste aus der Harmonielehre. Ueber das Tempo und seine Bezeichnung. Dynamische Vortragszeichen. Ein-, zwei- und dreistimmige Lieder aus Jessen's Liederborn.

Remuneration aus dem Studienfonde mit 180 fl. jährlich. Jos. Lugert.

VI. Statistische Notizen.

(Die in Klammern stehenden Zahlen bedeuten Privatisten.)

	I.			II.		III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Zusammen
	a	*b*	*c*	*a*	*b*							
1. Zahl der Schüler.												
Öffentliche Schüler am Anfange des Schuljahres	44	44	43	55	56	73	47	53	40	32	28	515
Privatisten am Anfange des Schuljahres	—	1	1	—	—	2	1	—	1	—	—	6
Öffentliche Schüler am Schlusse des Schuljahres	41	41	40	52	50	69	48	46	37	27	27	478
Privatist. am Schlusse des Schuljahres	—	3	—	—	—	2	1	—	1	—	—	7
2. Vaterland.												
Ortsangehörige	17	20(2)	17	17	41	23(1)	17	22	14	10	8	206(3)
Böhmen (auswärtige)	18	20(1)	21	28	6	40(1)	27(1)	20	19(1)	15	15	229(4)
Österreich unter der Enns	1	—	1	2	—	2	—	—	—	—	1	7
Österreich ob der Enns	—	—	—	1	—	1	—	—	—	—	—	2
Salzburg	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Steiermark	—	—	—	—	—	—	1	—	1	—	1	3
Krain	1	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	2
Tyrol	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Mähren	1	—	—	—	—	1	—	2	1	—	—	5
Galizien	1	—	—	1	2	—	1	—	—	1	—	6
Dalmatien	—	—	1	—	—	1	—	—	—	—	—	2
Kroatien	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
Siebenbürgen	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	1
Ungarn	—	1	—	—	—	—	1	2	—	—	2	6
Deutsches Reich, Königreich Preussen	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Deutsches Reich, Königreich Sachsen	1	—	—	1	1	—	—	—	1	—	—	4
England	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
												478(7)
3. Religionsbekenntnis.												
Katholiken	15	21(1)	19	14	26	29(2)	26	21	17(1)	16	17	221(4)
Protestanten	3	3	—	—	3	3	1	—	1	1	—	15
Israeliten	23	17(2)	21	36	21	37	21(1)	25	19	10	10	240(3)
Konfessionslos	—	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	2
												478(7)
4. Muttersprache.												
Deutsche	36	27(3)	32	28	27	52(2)	39(1)	36	32(1)	20	20	349(7)
Tschechen	5	14	8	24	23	16	8	9	5	6	7	125
Polen	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Magyaren	—	—	—	—	—	1	—	1	—	1	—	3
												478(7)

	I.			II.		III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Zusammen
	a	*b*	*c*	*a*	*b*							
5. Lebensalter am Schlusse des Schuljahres.												
Vollendetes 9. Lebensjahr	—	—	2	—	—	—	—	—	—	—	—	2
„ 10. „	4	9(1)	9	1	1	—	—	—	—	—	—	24(
„ 11. „	13	11	14	15	11	2	—	—	—	—	—	66
„ 12. „	19	15(2)	7	17	14	15	1	—	—	—	—	88(
„ 13. „	1	3	4	9	19	18(1)	6	1	—	—	—	61(
„ 14. „	3	3	2	6	3	19(1)	17(1)	11	—	—	—	64(
„ 15. „	1	—	2	4	1	13	17	11	12	—	—	61
„ 16. „	—	—	—	—	1	1	4	16	10(1)	8	1	41(
„ 17. „	—	—	—	—	—	1	1	5	8	10	6	31
„ 18. „	—	—	—	—	—	—	2	—	5	7	8	22
„ 19. „	—	—	—	—	—	—	—	2	2	1	5	10
„ 20. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	5	5
„ 21. „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	2	3
												478(
6. Fortgang.												
a) Nachtragsprüfungen pro 1876.												
Nachtragsprüfungen waren bewilligt . .	—	1	—	—	(1)	1	1(1)	—	—	3	—	6(
Hievon mit Erfolg abgelegt	—	1	—	—	(1)	—	1	—	—	—	—	2(
„ ohne „ „	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	1
„ nicht abgelegt .	—	—	—	—	—	—	(1)	—	—	3	—	3(
Wiederholungsprüfungen waren bewilligt .	5	1	2	2	2	3	3	3	2	3	(1)	26(
Hievon mit Erfolg abgelegt	4	1	2	1	2	3	3	3	1	2	—	22
„ ohne „ „	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
„ nicht abgelegt .	1	—	—	1	—	—	—	—	1	1	(1)	4
b) Klassifikationsergebnisse im II. Sem. 1877.												
α) Öffentliche Schüler.												
Erste mit Vorzug . .	4	5	5	4	6	9	10	12	5	4	4	6
Erste	29	27	26	34	35	45	32	26	27	19	22	32
Zweite	4	8	5	4	2	5	3	2	3	2	—	3
Dritte	1	1	4	4	3	6	1	—	—	—	1	2
Wiederholungsprüfung bewilligt	2	—	—	5	4	3	2	5	—	2	—	2
Nicht klassifizirt . .	1	—	—	1	—	1	—	1	2	—	—	
												47

	I.			II.		III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	Zusammen
	a	*b*	*c*	*a*	*b*							
β) Privatisten.												
Erste mit Vorzug . .	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Erste	—	1	—	—	—	2	—	—	—	—	—	3
Zweite	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	1
Dritte	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
Wiederholungsprüfung bewilligt	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
Ungeprüft	—	1	—	—	—	—	—	—	1	—	—	2
7. Frequenz der freien Gegenstände.												
Böhmisch	30	32	30	37	22	49	23	18	16	9	6	272
Französisch	1	—	1	3	5	7	13	13	5	8	—	56
Zeichnen	5	9	3	8	5	6	2	3	—	—	1	42
Kalligraphie	30	29	28	52	50	—	—	—	—	—	—	189
Stenographie	—	—	—	—	—	—	16	28	21	16	1	82
Gesang { I. Sem. .	3	3	5	11	13	10	1	—	—	—	—	46
Gesang { II. „ .	3	4	2	6	11	1	—	—	—	—	—	27
8. Schulgelderträgniss.												
I. Sem.												
Schulgeld zahlten in Summa 4112 fl. . .	44	44(1)	43(1)	38	45	52(2	32(1)	31	20(1)	22	17	388(6)
Vom Schulgelde waren ganz befreit . . .	—	—	—	16	10	21	14	21	18	10	11	121
NB. Ein Schüler der Classe 2b hat das Schulgeld in Brünn gezahlt.												
II. Sem.												
Schulgeld zahlten in Summa 3818 fl. . .	37	33(3)	34	36	40	49(2)	34(1)	32	25(1)	18	18	357(7)
Vom Schulgelde waren ganz befreit	5	10	7	10	11	21	14	16	13	9	10	126

VII. Unterstützung der Schüler.

a) Stipendien.

Post-Nro.	Name des Stipendisten	Schulklasse	Name der Stiftung	Verleihungs-Dekret	Betrag in fl.	Anmerkung
1.	**Dačický Richard** Freiherr von Hesslowa	Ia	Graf Straka Nr. 70	26. Jänner 1876 Z. 2564 L. A. S.	500	
2.	**Jüthner Julius**	Ib	Georg v. Harrucker	21. Mai 1877 Z. 9687 Statth. Wien	175	
3.	**Bolleschka Ludwig**	IIa	Jičín bgl. Abth. Nr. 74.	22. Dez. 1876 Z. 67078	80	
4.	**Smolařz Robert**	IIb	Ferdinand Nr. 45	11. März 1876 Z. 8027	120	
5.	**Eckert Karl**	III.	Wilhelm Schröder Nr. 1	5. März 1877 Z. 13226	116	
6.	**Seidl Johann**	III.	Graf Heisenstein Nr. 2	11. Mai 1876 Z. 25092	100	
7.	**Ulrich Paul**	III.	Michael Weiss	3. März 1870 Z. 6665	76	Wurde am 15. Jän 1877 wegen erreichte Normalalters der Sti tung verlustig.
8.	**Wurma Vinzenz**	IV.	Ferdinand Nr. 126	5. März 1877 Z. 63059	120	
9.	**Dačický Hugo** Freiherr von Hesslowa	V.	Graf Straka Nr. 53	24. März 1877 Z. 16457	500	
10.	**Kofránek Ernst**	V.	Ferdinand bürg. Abth. Nr. 2	15. April 1876 Z. 18969	156	
11.	**Ludwig Karl**	V.	Ferdinand bürg. Abth. Nr. 116	24. Jänner 1874 Z. 6035	120	
				Fürtrag . .	2063	

Post-Nro.	Name des Stipendisten	Schulklasse	Name der Stiftung	Verleihungs-Dekret	Betrag in fl.	Anmerkung
				Übertrag .	2063	
12.	Pick Ludwig	V.	Michael Fürth'sche Talmudstiftung	12. Jänner 1877 Z. 68141	71	
13.	Siegl Theodor	V.	Klement Nr. 6	31. Juli 1873 Z. 39978	84	
14.	Jechl August	VI.	Novotný	20. Nov. 1869 Z. 59485	300	
15	Urban Karl	VI.	David Christelli Seminarstipendium Nr. 4	2. Sept. 1875 Z. 48041	70	Auf Rechnung des mährischen Studentenstiftungsfondes
16.	Villani Karl Freiherr von	VI.	Graf Straka Nr. 41	26. Jänner 1876 Z. 2564 L. A. S.	500	
17.	Himmel Ludwig	VII.	Kaspar Lihl Nr. 4	11. Oct. 1876 Z. 52013	38	
18.	Dohnal Albert	VIII.	Adalb. Schimm	4. Jänner 1874 Z. 70711	92	
19.	Peterka Franz	VIII.	Joh. Ig. Dlouhowesky von Langendorf	29. April 1872 Z. 18358	180	
20.	Vogel Karl	VIII.	Josef Minnibe̊rger	10. Nov. 1875 Z. 55432	160	
				Summe . .	3558	

b) Locales Unterstützungswesen.

1. Die Interessen der Pallas-Stiftung im Betrage von 30 fl. 72 kr. wurden an mittellose Schüler vertheilt.
2. Der vom Berichterstatter der h. k. k. Statthalterei vorgelegte Stiftsbrief-Entwurf der Kath. Tursky-Stiftung wurde mit h. E. vom 22. Juli 1876 Z. 40176 bestätigt.

   Das Vermögen derselben besteht aus der vinculirten Staatsschuldverschreibung über 400 fl. dto. Wien 1. Feb. 1876 Z. 100145 und aus einer in der böhmischen Sparkassa gemachten Einlage von 27 fl. 43 kr. Das Einlagsbuch ist mit Fol. 50309 und dem Cassa-Nr. 4889 versehen. Aus der im Vorjahre in diesem Buche verzeichneten Einlage wurde der Betrag von 1 fl. 50 kr. zum Ankaufe der Stempel für die drei Stiftsbriefparien gehoben.

   Die vom 1. Feber 1876 bis 1. Feber 1877 aufgelaufenen Interessen von 16 fl. 80 kr. der obigen Obligation wurden würdigen Schülern der Anstalt zugewendet.
3. Aus dem Sparkassabuche (Z. 61494) wurden zur Unterstützung armer Schüler 25 fl. entnommen.

   Der vorjährige Rest betrug 106 fl. 63 kr. Gibt man hiezu den Zinsenzuwachs pr. 2 fl. 81 kr. und nimmt sodann von der Summe 25 fl. weg, so findet sich als gegenwärtiger Rest der Betrag von 84 fl. 44 kr. mit den vom 2. Nov. 1876 hievon laufenden Zinsen.
4. Zur Sicherstellung der Freitische der Schüler der 2 obersten Klassen:
   a) Die Religionsprofessoren der 3 Prager Obergymnasien haben abwechselnd die aus den Freitischconcerten für Gymnasialschüler alljährlich sich ergebenden Ueberschüsse in Verwahrung.

   Am 1. Juni 1877 ergab sich als gemeinsames Vermögen der 3 Gymnasien 9925 fl. 35 kr.

   b) In deren Verwahrung befindet sich auch die diesen 3 Anstalten gehörige Staatsobligation der Bischof-Krejči-Stiftung pr. 600 fl.

   c) Das in Verwahrung der Direction befindliche, der Anstalt allein gehörige Sparkassabuch (Fol. 103196, Cassa-Nr. 7604), aus welchem am 2. November 1876 ein Betrag von 25 fl. gehoben und dem kathol. Religionsprofessor übermittelt wurde.

   Gibt man zum Reste des Vorjahres pr. 1218 fl. 90 kr. die Zinsen pr. 30 fl. 62 kr. und nimmt von der Summe obige 25 fl. weg, so bleibt als gegenwärtiger Rest der Betrag von 1224 fl. 52 kr. mit den vom 2. Nov. 187 laufenden Zinsen.

   Nach Angabe des kath. Religionsprofessors der Anstalt wurden im Schuljahre 1877 aus dem Freitischfonde sub. *a*) für 120 fl. 480 Freitischmarken und für den sub. *c*) genannten Betrag von 25 fl. 100 Freitischmarken gekauft und an arme Schüler vertheilt.
5. Der „Verein zur Unterstützung dürftiger Schüler der Prager Mittelschulen“ spendete der Anstalt 62 fl., welche vom Lehrkörper unter arme und würdige Schüler der 6 unteren Klassen vertheilt wurden.
6. Auf Kosten der Krombholz'schen Stiftung wurden 4 Schüler der Anstalt ärztlich behandelt und verpflegt.
7. Herr Michael Löwy, Kettenbrückenpächter in Prag, schenkte für arme Schüler ohne Unterschied des Glaubensbekenntnisses 20 fl., welche vom Berichterstatter im Sinne des Spenders vertheilt wurden.
8. Herr Franz Balatka in Prag schenkte 250 Theken, 2 Gros Stahlfedern, 12 Dutzend Bleistifte und Federhalter, welche armen Schülern übergeben wurden.
9. Herr Franz Řivnač, Kunst- und Buchhändler in Prag, schenkte 10 neue Schulbücher für dürftige Schüler.
10. Frau Rosa Schobloch schenkte 11 benützte Schulbücher.
11. Der Herr Vater des verstorbenen Schülers der 2. Klasse Theodor Rix schenkte 14 benützte Schulbücher.
12. Ein Wohlthäter, der nicht genannt sein will, schenkte 13 fl., mit welchen arme Schüler betheilt wurden.
13. Zöglinge des fürsterzbischöflichen Convicts waren 16 Schüler, von welchen 12 die Verpflegung ganz unentgeltlich genossen, 4 einen geringen jährlichen Sustentationsbeitrag zwischen 15 und 30 fl. zahlten.
14. Durch Vermittlung des Berichterstatters gingen an den „Verein zur Unterstützung armer Schüler der Prager Mittelschulen“ folgende reiche Spenden ein:

    Herr Michael Adler, Rabbinatsverweser . . . . . fl. 2.—

    „ Karl Bamberger, Kaufmann . . . . . „ 20.—

Herr Franz Bauer, k. k. Oberlandesgerichtsrath	fl.	3.—
„ Josef Geitler, Ritter von Armingen, Grosshändler	„	5.—
„ Friedrich Lauseker, k. k. Oberlandesgerichtsrath	„	1.—
„ Med. Dr. Philipp Josef Pick, k. k. Universitätsprofessor	„	5.—
„ Ignaz Popper, Bräuer	„	2.—
Frau Ernestine Redlhammer	„	2.—
Herr J. U. Dr. Josef Tragy, Advocat	„	10.—
„ J. U. Dr. Ignaz Wien, Advocat	„	10.—
„ J. U. Dr. Eduard Zahn, Advocat	„	15.—
Summa	fl.	75.—

VIII. Vermehrung der Lehrmittelsammlungen.

a) Einnahmen.

A. Kassarest aus den Aufnahmstaxen und Bibliotheksbeiträgen des vorigen Schuljahres	4 fl.	46 kr.
B. Aufnahmstaxen *a*) vom Beginn des Schuljahres bis zum 10. Oktober 1876 von 154 Schülern	323 „	40 „
b) von 5 Schülern, welche im Laufe des Schuljahres eintraten	10 „	50 „
c) Geschenke	5 „	90 „
C. Für Duplicatzeugnisse *a*) vom 12. Juli 1876 bis 10. Oktober 1876 5 Semestralzeugnisse	10 „	— „
b) vom 10. Oct. 1876 bis zu Ende des Schuljahres: 1 Maturitätszeugniss	6 „	— „
5 Semestralzeugnisse	10 „	— „
D. Bibliotheksbeiträge *a*) vom Beginn des Schuljahres bis z. 10. October 1876 von 507 Schülern	507 „	— „
b) von 3 öffentl. Schülern, welche im Laufe des Schuljahres eintraten	3 „	— „
Summe der vorstehenden Einnahmen	880 fl.	26 kr.
E. Jahresdotation für das physikalische Kabinet aus dem Studienfonde	200 fl.	— kr.
F. Geschenke:		
a) Frau Louise Schmeykal in Prag schenkte für's naturhistorische Kabinet	30 „	— kr.
b) Herr Adolf Schwab, Fabrikant in Prag, schenkte für's physikalische Kabinet	25 „	— „

b) Zuwachs.

I. Bibliothek.

A. Lehrerbibliothek.

Der Stand der Lehrerbibliothek am Schlusse des Schuljahres 1876—7 ist folgender:

4999 Bände
1468 Hefte
3954 Programme.

Die Lehrerbibliothek wurde im abgelaufenen Schuljahre theils durch Geschenke, theils durch Ankauf um folgende Werke vermehrt:

a) Geschenke.

Vom h. k. k. Ministerium für Cultus und Unterricht:
Jahresbericht des k. k. Ministeriums für 1876.
Scheda Josef, Schulwandkarte von Mitteleuropa.
Streffleur-Steinhauser, Hypsometrische Übersichtskarte der österreichisch-ungarischen Monarchie.
Von der k. k. Statthalterei:
Landesgesetzblatt für das Königreich Böhmen. Jhrg. 1877.
Von der statistischen Commission der kgl. Hauptstadt Prag:
Statistisches Handbüchlein für 1875.
Von der Handels- und Gewerbekammer in Pilsen:
Statistischer Bericht für die Jahre 1870—75.

Von Herrn Philipp Teweles, Secretär der israel. Cultusgemeinde, 3 Bände und 3 Hefte.
Von Fischl Rudolf, Schüler der VI. Classe:
Reinhard H., Das Mikroskop und sein Gebrauch für den Arzt.

b) Ankauf.

Unter anderen folgende Werke:
G. F. Schœmann, Griechische Alterthümer. 2 Bde.
Th. Vœmel, Demosthenis orationes contra Aeschinem „De corona" et „De falsa legatione."
K. O. Müller, Geschichte der griechischen Literatur. 2 Bde.
Aug. Schleicher, Die deutsche Sprache.
Jul. Schmidt, Geschichte der deutschen Literatur seit Lessing's Tod. 3 Bde.
S. Th. Stein, Das Licht im Dienste wissenschaftlicher Forschung.
A. Wüllner, Einleitung in die Dioptrik des Auges.
Huxley, Handbuch der Anatomie der Wirbelthiere.
A. de Bary, Morphologie u. Physiologie der Pilze, Flechten und Myxomyceten.
Quenstedt, Handbuch der Petrefactenkunde nebst Atlas.

Fortgesetzt wurden folgende Lieferungswerke:
Grimm, Wörterbuch der deutschen Sprache.
Schmid, Encyclopædie des Erziehungs- und Unterrichtswesens.
Karmarsch-Heeren, Technologisches Wörterbuch.

An periodischen Schriften wurden gehalten:
Zeitschrift für die österreich. Gymnasien.
Hirschfelder etc., Zeitschrift für das Gymnasialwesen.
Petermann, Geograph. Mittheilungen.
Hoffmann, Zeitschrift für mathemat. und naturwissenschaftl. Unterricht.
Poggendorff, Annalen der Physik und Chemie.
Lazarus-Steinthal, Zeitschrift für Völkerpsychologie und Sprachwissenschaft.
Verhandlungen der k. k. zoologisch-botanischen Gesellschaft in Wien.
Verordnungsblatt des k. k. Ministeriums für Cultus und Unterricht.

B. Schülerbibliothek.

Dieselbe erhielt folgende Geschenke:

Vom deutschen Gabelsberger'schen Stenographenverein in Prag: Stenographisches Unterhaltungsblatt 7. und 11. Jahrgang.

Von der Verlagsbuchhandlung Dietrich Reimer in Berlin: Atlas antiquus (zwölf Karten zur alten Geschichte) von H. Kiepert in Berlin 1876.

Von der Buchhandlung I. L. Kober in Prag: Orbis pictus v řeči české a německé von Fr. Potočka, Prag 1877.

Von der k. k. Hof- und Universitätsbuchhandlung Alfred Hölder in Wien: Lehrbuch der Geschichte des Alterthums für Oberklassen der Mittelschulen von Doctor E. Hannák in Wien 1877 und Lehrbuch der Physik für die oberen Klassen der Mittelschulen von Dr. Alois Handl in Wien 1877. Griechisches Elementarbuch von Doctor Val. Hintner, 2. Aufl.

Von der Buchhandlung Vandenhoeck und Ruprecht: Cornelii Nepotis liber de excellentibus ducibus exterarum gentium edidit Dr. J. Lattmann in Göttingen 1876.

Von H. Prof. Gukler: Botanisches Excursionsbuch von Dr. Lorinser.

Der Zuwachs durch Kauf und Geschenke beträgt 155 Bände.

II. Das physikalische Kabinet.

Comtesse Carla Thun schenkte ein in London gearbeitetes zusammengesetztes Mikroskop, das in historischer Hinsicht werthvoll ist.

Herr J. U. Dr. Eduard Eiselt schenkte gegen 100 Chemikalien in Fläschchen mit Glasstöpseln und einige physikal. Utensilien.

Aus der Dotation pr. 200 fl. und dem obgenannten Geschenke des H. Adolf Schwab pr. 25 fl. wurden angekauft: ein Thermometer, ein Feldstecher von Plössl (bereits benützt), ein Projectionsapparat, eine Lampe mit Argand'schem Brenner für Gas, eine Condensirungslinse, eine kleine Dampfmaschine.

III. Naturalienkabinet.

Zuwachs durch

Geschenke.

Stück Skelett von Talpa europæa.
„ „ „ Spermophilus citillus.
„ Fuss von Equus caballus skelettisirt.
„ „ „ Bos taurus „
„ „ „ Sus scrofa domestica „
„ Skelett von Torpidonotus natrix
„ Python sp.
„ Froschlarven
„ Echeneis remora
„ Ostracion sp.
„ Mygale avicularia
„ Homarus vulgaris
„ Eledone moschata
„ Pennatula rubra
„ Doppelspath.

} Sämmtliche Stücke wurden für ein Geschenk des Herrn Carl Bamberger im Betrage von 73 fl. 50 kr. angekauft.

Für ein Geschenk der Frau Schmeykal im Betrage von 30 fl. wurde Papier zur legung des Herbars angekauft.

Stück Cavia Cobaya von dem Schüler der Ia Klasse Alfons Ritter von Adlerfels
„ Ardea Cinerea
„ Hyla viridis } „ „ „ „ „ Altschul Adolf
„ Paradaxurus typus
„ Astacus fluviatilis
„ Cassis rufa
„ Pteroceras Lambis } von dem Schüler der Ia Klasse Bamberger Rudolf
„ Koralle
„ Mustela vulgaris von dem Schüler der Ia Klasse Beck Emil
„ Cyprinus auratus
„ Gobio fluviatilis } „ „ „ „ „ Burmann Ernst
„ Phasianus nycthemerus „ „ „ „ Rich. Dacziczky Freiherr von Hesslova
„ Bubo maximus
„ Foetorius putorius } von dem Schüler der Ia Klasse Eisenbach Max
„ Hörner von Bos bubalus
„ „ „ Bos taurus
„ „ „ Capra hircus } von dem Schüler der Ia Kl. Engländer Friedrich
„ „ „ Ovis aries
„ Circus rufus
„ Erinaceus europæus } von dem Schüler der Ia Klasse Factor Alfred
„ Perdix cinerea
„ Corvus pica
„ Astur nisus } „ „ „ „ „ Fürth Franz
„ Spermophilus citillus
„ Emberiza citrinella } „ „ „ „ „ Goldschmidt Hugo
„ Maja squinado „ „ „ „ „ Heller Max
„ Mustela martes von dem Schüler der Ic Klasse Pick Gottfried
„ Trigla hirundo
„ Geweih von Cervus capreolus } v. d. Schüler der Ic Kl. Redlhammer Albert
„ Bombycilla garrula
„ Trochilus sp.
„ Flussspath
„ Opal } von dem Schüler der Ic Klasse Tragy Otto
„ Astur palumbarius
„ Turbo olerarius } „ „ „ „ „ Zahn Eduard
„ Amethyst „ „ „ „ IIa „ Kletetschka R.
„ Sturnus vulgaris „ „ „ „ IIb „ Leipen Johann
„ Turmalin „ „ „ „ „ „ Micko Vincenz
„ Aragonit „ „ „ „ „ „ Alfons Ritter v. Peyersfeld

24 Stück Eier (15 Arten)
1 „ Perlmutterschale
1 „ Haliotis sp.
1 „ Fringilla cardinalis
} von dem Schüler der IIb Klasse von Pleschner Max
1 „ Sciurus vulgaris „ „ „ „ „ „ Röder Wilhelm.
1 „ Strix flammea
1 „ Karlsbader Sprudelstein
1 „ Cuculus canorus
2 „ Marmor (bunt)
} „ „ „ „ „ „ Schenk Eduard.
1 „ Schwefelkies von „ „ „ „ „ Schmitz Max
2 „ Marmor (weiss) „ „ „ „ „ „ Taubeles Emil
1 „ Skelett von Lepus cuniculus von dem Schüler der IIb Klasse Wien Franz
1 „ Erinaceus europæus von dem Schüler der IIb Klasse Schenz Anton
1 „ Buteo sp. „ „ „ „ „ Stadler Anton
1 „ Menschenschädel
1 „ Menschenarm
1 „ Menschenbecken
} „ „ „ „ III. „ Mores Franz
1 „ Urne (gef. bei Čakowitz) „ „ „ III. „ Schöller Philipp, Ritter vo
1 „ Vorhang für einen Schaukasten von dem Schüler der VI. Klasse Fischl Rudo
1 „ Cypræa tigris von dem Schüler der VI. Klasse Wahle Richard
1 „ Buteo lagopus
1 „ Pernis apivorus
} geschenkt von dem Schüler der 2. Klasse Nemetschk Ferdinand, ausgestopft auf Kosten der Anstalt.
1 „ Strix aluco geschenkt von dem Schüler der IIb Klasse Schenk Eduard, ausgestopft auf Kosten des Schülers der Ic Klasse Tragy Otto
1 „ Anthracit
1 „ Schwefel (natürlich)
1 „ Labrador
1 „ Aragonit
1 „ Albin
} von dem Abiturienten Ritter von Forster Viktor.

219 Stück Insecten, Geschenk der k. k. zoologisch-botan. Gesellschaft in Wien.

Stand der Lehrmittelsammlungen.

	Zuwachs 1877	Stand am Schlusse des Jahres 1877
Lehrerbibliothek: Gesammtnummern		
in Bänden	96	4999
in Heften	16	1468
in Programmen	638	3954
Schülerbibliothek: Gesammtnummern		
in Bänden	155	2227
in Heften	—	100
Physikalische Apparate:		
Chemische Apparate	76	268
Chemische Präparate	—	—
Zoologische Sammlung: Wirbelthiere	80	355
Andere Thiere	232	1650
Sonstige zoologische Gegenstände	—	1
Botanische Sammlung: Herbariumblätter	—	1500
Sonstige botanische Gegenstände	—	352
Mineralogische Sammlung: Naturstücke	17	2074
Krystallmodelle	—	238
Abbildungen (Blätter)	—	24
Apparate	—	2
Technologische Objekte	—	—
Geographie: Wandkarten	9	66
Atlanten	1	15
Globen	—	2
Tellurien	—	—
Plastische Karten	—	15
Geometrie: Körper und Modelle	7	22

	Zuwachs 1877	Stand am Schlusse des Jahres 1877
Zeichnen: Drahtmodelle	—	16
Holzmodelle	—	19
Gypsmodelle	—	72
Vorlegeblätter	—	286
Utensilien	—	11

IX. Ergebnisse der Maturitäts-Prüfung.

Am Schlusse des I. Semesters 1876.

		Oeffentliche Schüler	Externe
Zur Maturitätsprüfung haben sich gemeldet		2	5
Vor oder während der Prüfung traten zurück		—	3
Von den Geprüften wurden			
approbirt	mit Auszeichnung reif	—	—
	einfach reif	1	2
reprobirt	auf ½ Jahr	1	—
	„ 1 „	—	—
	auf immer	—	—

Am Schlusse des II. Semesters 1876 und im Beginn des Schuljahres 1877.

		Oeffentliche Schüler	Privatisten	Externe
Zur Maturitätsprüfung haben sich gemeldet		40	1	11
Vor oder während der Prüfung traten zurück		4	—	2
Von den Geprüften wurden				
approbirt	mit Auszeichnung reif	1	—	—
	einfach reif	22	1	3
reprobirt	auf ½ Jahr	7	—	2
	„ 1 „	—	—	1
	auf immer	—	—	—
Hierunter befinden sich bei der gestatteten Wiederholungsprüfung aus einem einzelnen Lehrfache:				
Approbirte: reif		3	—	2
Reprobirte	auf ½ Jahr	3	—	—
	„ 1 „	—	—	1
	„ immer	—	—	—

Am Schlusse des 1. Semesters 1876, im Beginne des Schuljahres 1877, dann am nde des 1. Semesters 1877 wurde die mündliche Maturitätsprüfung unter dem Vorsitze es k. k. Landesschulinspectors Herrn Michael Achtner, am Schlusse des 2. Semesters 876 unter dem Vorsitze des k. k. Gymnasialdirectors Herrn Dr. Gottlieb Biermann, n Schlusse des 2. Semesters 1877 unter dem Vorsitze des k. k. Realgymnasialdirectors errn Dr. Ludwig Chevalier abgehalten.

Am Schlusse des 2. Semesters 1877 unterzogen sich von 32 Candidaten, welche ch zur Prüfung gemeldet hatten, 31 der Prüfung (26 öffentliche und 5 Externe). Von esen wurden 28 approbirt, (darunter 6 öffentliche Schüler mit Auszeichnung) und 1 öff. hüler und 2 Externisten zur Wiederholungsprüfung aus einem Gegenstande nach den auptferien zugelassen.

X. Chronik.

Veränderungen im Lehrkörper seit dem Schlusse des Schuljahres 1876:

1. Der Supplent *Josef Karassek* wurde mit hohem Erlasse Sr. Excellenz des Herrn Min. für C. u. U. vom 11. Juli 1876 Z. 9682 — h. E. v. 4. Aug. 1876 Z. 15049 L. S. R. — zum wirklichen Lehrer am Staatsgymnasium in Saaz ernannt.
2. Der Supplent *Jakob Stippl* wurde mit hohem Erlasse Sr. Excellenz des Herrn Min. für C. u. U. vom 11. Juli 1876 Z. 9689 — h. E. des k. k. L. S. R. vom 4. Aug. 1876 Z. 14887 — zum wirklichen Lehrer am Staatsgymnasium in Eger ernannt.

3. Der Supplent *Franz Papsch* wurde mit h. Erl. Sr. Excellenz des Herrn Min. f. C. u. U. vom 25. Aug. 1876 Z. 11306 — h. E. v. 1. Sept. 1876 Z. 17867 L. S. k. — zum Hauptlehrer an der Lehrerbildungsanstalt in Trautenau ernannt.
4. Mit h. Erl. vom 1. Oct. 1876 Z. 20712 L. S. R. wurden als Supplenten bestätigt: *Emil Riedl, Prokop Villaschek, Franz Hadwich, Theodor Kopetzky* und *Wilhelm Jerusalem.*

B. Am 13. und 14. Sept. fanden die Aufnahmsprüfungen für die 1. Klasse, am 15. und 16. Sept. jene für die übrigen Klassen statt.

Am 15. Sept. Nachtrags- und Wiederholungsprüfungen.

Am 16. Sept. um 8 Uhr wurde das Schuljahr mit einem feierlichen, vom hochwürdigen Maltheserordens-Prior Herrn Johann Jaresch celebrirten Hochamte begonnen, dem der Lehrkörper und die katholischen Schüler beiwohnten. Hierauf wurden den Schülern die Disciplinarvorschriften vorgelesen.

Am 18. September Beginn des regelmässigen Unterrichtes.

Am 25. September Maturitäts-Wiederholungsprüfungen.

Am 4. October wurde das Allerhöchste Namensfest Sr. kais. und kön. apost. Majestät unseres allergnädigsten Herrn und Kaisers Franz Josef I. mit einem feierlichen Gottesdienste in der Gymnasialkirche gefeiert.

Am 19. November feierlicher Gottesdienst aus Anlass des Allerhöchsten Namensfestes Ihrer k. k. Majestät der Kaiserin Elisabeth.

Am 10. Feber Schluss des 1. Semesters, Zeugnisvertheilung und Prüfung der Privatisten.
Am 12. Feber Maturitätsprüfungen.

Vom 19. bis 24. März unterzogen die Herren k. k. Landesschulinspectoren Michael Achtner und Dr. Ignaz Mache die Anstalt einer eingehenden Inspection, die in einer am 24. März abgehaltenen Conferenz ihren Abschluss fand.

Am 19. Mai empfingen 17 Schüler das Sacrament der Firmung.
Vom 30. Juni bis 5. Juli Maturitätsprüfung.
Am 14. Juli Schluss des Schuljahres mit einem feierlichen Te Deum, nach welchem die Zeugnisse an die Schüler vertheilt wurden.

Erste Klasse mit Vorzug erhielten folgende Schüler:

1a Klasse: **Beck** Max, **Breburda** Josef, **Adler** Emil, **Dačičky** Richard Freiherr v. Hesslova.
1b Klasse: **Jüthner** Julius, **Maličký** Josef, **Hofmann** Rudolf, **Kurz** Alois, **Lederer** Emanuel.
1c Klasse: **Škampa** Karl, **Pick** Gottfried, **Zucker** Simon, **Svoboda** Adolf, **Saxl** Alexander.
2a Klasse: **Goldberg** Heinrich, **Klepetař** Alexander, **Bergthaller** Vinzenz, **Brtnický** Rudolf.
2b Klasse: **Wien** Franz, **Zuber** Anton, **Schmalfuss** Anton, **Lokesch** Gustav, **Pleschner** Wilhelm, **Nemetschke** Ferdinand.
3. Klasse: **Kraut** Josef, **Grünbaum** Eduard, **Formanek** Arthur, **Gampert** Albrecht, **Bunzl-Federn** Emil, **Kukula** Robert, **Epstein** Hugo, **Krsch** Emil, **Kreidl** Alois.
4. Klasse: **Bloch** Rudolf, **Špotka** Johann, **Schwab** Albert, **Herrnheiser** Karl, **Pogatscher** Heinrich, **Fürth** Jakob, **Wurma** Vinzenz, **Winter** Adam, **Tschandl** Alexander, **Warta** Johann.
5. Klasse: **Wehli** Albert, **Schneider** Karl, **Schwertassek** Karl, **Kofránek** Ernst, **Pewný** Josef, **Winternitz** Alfred, **Weill** Robert, **Benedikt** Adolf, **Goldschmidt** Karl, **Ludwig** Karl, **Siegl** Theodor, **Stein** Alfred.
6. Klasse: **Fischer** Siegfried, **Fischl** Rudolf, **Herrnheiser** Isidor, **Penzler** Georg, **Heller** Max.
7. Klasse: **Srb** Karl, **Eisenbach** Julius, **Karpeles** Adolf, **Weil** Friedrich.

Aus der 8. Klasse legten die Maturitätsprüfung mit Auszeichnung ab: **Bauer** Robert, **Dohnal** Albert, **Geitler** Heinrich Ritter von, **Herrmann** Karl, **Jentsch** Julius, **Pollak** Neftali.

C. Frau Rosa Schobloch schenkte für die Gymnasialkirche ein Antipendium auf Spitzengrund mit Spitzen und zwei gestickte Altarpölster. Der Schüler der 2. Klasse Philipp Ritter von Schoeller schenkte 37 Münzen. Die Sammlung für den Bau des St. Veitsdomes ergab einen Betrag von 36 fl. 32 kr. Der Gesundheitszustand der Schüler war im Allgemeinen ein recht guter, obwohl zwei Todesfälle zu beklagen waren. Denn der Octavaner Eduard Eiselt erkrankte bereits in den verflossenen Herbstferien, der Sekundaner Theodor Rix litt seit längerer Zeit an Tuberkulose. Professoren und Mitschüler gaben ihnen das letzte Geleite.

XI. Wichtigere Verfügungen der Vorgesetzten.

Ein Erlass Sr. Excellenz des Herrn k. k. Ministers für Cultus und Unterricht vom 27. November 1876 Z. 18740 betrifft wichtige Bestimmungen über das Probejahr der Candidaten des Lehramtes an Mittelschulen. Der Wortlaut dieses hohen Erlasses ist im „Verordnungsblatt für den Dienstbericht des Ministeriums für Cultus und Unterricht“ Jahrgang 1876 Seite 180 und 181 enthalten.

XII. Kundmachung

bezüglich des Schuljahres 1877/8.

I. Aufnahme in die I. Klasse.

Anmeldung am 12. September zwischen 8 und 12 Uhr.

II. Aufnahme in die 2. bis 8. Klasse.

a) Schüler, welche dem Gymnasium bisher nicht angehörten und in eine höhere (2. bis 8.) Kl. eintreten wollen, müssen sich am 13. September zwischen 10 und 12 Uhr melden.

b) Schüler, welche dem Gymnasium bisher angehörten, haben sich zur Wiederaufnahme am 15. September um 8 Uhr Vormittags in ihren Lehrzimmern einzufinden.

II. Die Wiederholungs- und Nachtragsprüfungen beginnen am 15. September um 10 Uhr Vormittags.

Alle näheren Bedingungen hinsichtlich der Aufnahme sind auf einem während der Hauptferien im 1. Stocke des Gymnasialgebäudes affigirten Blatte zu entnehmen.

Der Unterzeichnete fühlt sich verpflichtet, im Namen der Anstalt für die Unterstützung dürftiger Schüler, sowie für die der Anstalt gemachten aussergewöhnlich reichen Geschenke den tiefgefühltesten Dank mit der Bitte auszusprechen, alle Gönner und Freunde der Jugend mögen der Anstalt auch ferner ihr Wohlwollen bewahren.

Prag, 14. Juli 1877.

Dr. And. Bauer,
k. k. Director.

Sitzung vom 7. Juli 1888.

1. Herr L. Sohncke hielt einen Vortrag über „Erweiterung der Theorie von der Krystallstruktur". Der Vortrag wird anderweit veröffentlicht werden.

2. Herr Gust. Bauer spricht über „Flächen 4. Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an 2 Tetraeder knüpft".

Über Flächen 4. Ordnung, deren geometrische Erzeugung sich an 2 Tetraeder knüpft.

Von G. Bauer.

(Eingelaufen 8. Oktober.)

1. Es seien im Raume vier Punkte A gegeben, welche ein Tetraeder (A-Tetraeder) bilden. Die Ecken dieses Tetraeders mögen einfach durch 1, 2, 3, 4 bezeichnet sein, die denen gegenüberliegenden Seitenflächen des Tetraeders durch I, II, III, IV. Den Punkten A (1, 2, 3, 4) sollen vier Ebenen I′, II′, III′, IV′ entsprechen, welche ein zweites Tetraeder (das C-Tetraeder) bilden, dessen Ecken C den vier Ebenen gegenüberliegend nach der Reihe mit 1′, 2′, 3′, 4′ bezeichnet werden mögen. Wird nun ein Punkt P so bestimmt, dass die vier von ihm ausgehenden Strahlen, welche die Ecken 1, 2, 3, 4 des A-Tetraeders projiciren, die diesen Ebenen entsprechenden Ebenen I′, II′, III′, IV′ in Punkten Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 treffen, welche in einer Ebene liegen, so ist

der Ort des Punktes P bei allgemeiner Lage der beiden Tetraeder eine Fläche 4. Ordnung mit 4 Knotenpunkten und 10 Geraden. Je nach der Lage der Tetraeder können neue Knotenpunkte und Gerade auf der Fläche sich bilden, kurz dieselbe kann sich in mannigfachster Weise abändern, so dass eine grosse Reihe von Flächen 4. Ordnung der angegebenen geometrischen Construktion unterliegt. Es ist nicht meine Absicht, hier diese ganze Reihe von Flächen zu untersuchen, sondern ich beabsichtige nur auf einige Fälle hinzuweisen, die auf bekannte Flächen führen und theils hiedurch theils durch die besondere Lage der zwei Tetraeder zu einander einiges Interesse zu gewähren scheinen.

2. Nehmen wir das C-Tetraeder zum Coordinaten-Tetraeder; seien ferner α_i (i = 1, 2, 3, 4) die Coordinaten der ersten, β_i, die Coordinaten der zweiten, γ_i die der dritten und δ_i die der vierten Ecke des A-Tetraeders, so wie x_i die Coordinaten des Punktes P, so ergibt sich sofort die Gleichung der Fläche F, welche nach obiger Construktion der Ort des Punktes P ist, in der Form

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2 x_1) & (\alpha_3 x_1) & (\alpha_4 x_1) \\ (\beta_1 x_2) & 0 & (\beta_3 x_2) & (\beta_4 x_2) \\ (\gamma_1 x_3) & (\gamma_2 x_3) & 0 & (\gamma_4 x_3) \\ (\delta_1 x_4) & (\delta_2 x_4) & (\delta_3 x_4) & 0 \end{vmatrix} = 0, \qquad (I)$$

wo allgemein $(\lambda_k x_i)$ für $\lambda_k x_i - \lambda_i x_k$ gesetzt ist. In der Th sind die Elemente dieser Determinante, welche in ein Horizontalreihe stehen, nichts anderes als die Coordinaten eines der Punkte Q, in welchen die vom Punkte x nach d Ecken des A-Tetraeders gezogenen Geraden die entsprechen den Seitenflächen des Coordinaten- (oder C-Tetraeders) durc stossen, und die Gleichung (I) drückt aus, dass diese v Punkte Q in einer Ebene liegen.

Aus der Gleichung (I) ersieht man, dass dieselbe erfü wird, wenn der Punkt x in eine Kante des C-Tetraeders fä

wie auch geometrisch evident ist. Die Fläche F enthält mithin die sechs Kanten des C-Tetraeders und die Ecken desselben sind Knotenpunkte derselben. Von dem A-Tetraeder aber liegen nur die Ecken auf der Fläche (denn die Gleichung (I) wird erfüllt, wenn z. B. α_i statt x_i gesetzt wird), und zwar sind dieselben im allgemeinen einfache Punkte derselben.[1])

3. Eine einfache geometrische Betrachtung zeigt ferner, dass die Fläche ausser den sechs Kanten des C-Tetraeders noch vier Gerade enthält, nämlich die Durchschnitte der Tetraederseiten

$$(\mathrm{I\,I'}),\ (\mathrm{II\,II'}),\ (\mathrm{III\,III'}),\ (\mathrm{IV\,IV'}),$$

so dass die Fläche F im Allgemeinen 4 Knotenpunkte und 10 Gerade enthält. Diese vier letzten Geraden sollen der Kürze halber im folgenden als die Geraden g_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ bezeichnet sein. Dass dieselben auf der Fläche liegen, geht auch aus der Gleichung der Fläche hervor, wenn wir dieselbe entwickeln. Ersetzen wir die Nullen in der Determinante resp. durch $\alpha_1 x_1 - \alpha_1 x_1$, $\beta_2 x_2 - \beta_2 x_2$, u. s. f. und zerlegen dieselbe sodann nach den Summanden der Hori-

---

1) Es ist leicht die Tangentialebene an einem dieser Punkte, z. B. an der Ecke 1 anzugeben. Die Kanten (12), (13), (14) des A-Tetraeders treffen die Ebenen II′, III′, IV′ des C-Tetraeders in drei Punkten Q_2^1, Q_3^1, Q_4^1 und die Ebene $Q_2^1\ Q_3^1\ Q_4^1$ schneidet die Ebene I des C-Tetraeders in einer Geraden m_1. Die Tangentialebene der Fläche an der Ecke 1 des A-Tetraeders geht durch diese Gerade m_1. Denn bewegt sich der Punkt P (x) auf dieser Ebene unendlich nahe an der Ecke 1, so bleiben auch die Punkte Q_2, Q_3, Q_4 unendlich nahe der Ebene $Q_2^1\ Q_3^1\ Q_4^1$ und mithin der Punkt P unendlich nahe der Fläche. Die Gleichung dieser Tangentialebene in der Ecke 1 findet sich demnach leicht in der Form

$$\begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2 x_1) & (\alpha_3 x_1) & (\alpha_4 x_1) \\ (\beta_1 \alpha_2) & 0 & (\beta_3 \alpha_2) & (\beta_4 \alpha_2) \\ (\gamma_1 \alpha_3) & (\gamma_2 \alpha_3) & 0 & (\gamma_4 \alpha_3) \\ (\delta_1 \alpha_4) & (\delta_2 \alpha_4) & (\delta_3 \alpha_4) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

zontalreihen, so erhalten wir folgende Gleichung für die Fläche:

$$\alpha_1 x_2 x_3 x_4 (x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) + \beta_2 x_1 x_3 x_4 (\alpha_1 x_2 \gamma_3 \delta_4) + \gamma_3 x_1 x_2 x_4 (\alpha_1 \beta_2 x_3 \delta_4)$$
$$+ \delta_4 x_1 x_2 x_3 (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 x_4) - x_1 x_2 x_3 x_4 (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) = 0, \quad (I')$$

wo nach bekannter Bezeichnung die Faktoren $(x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4)$ u. s. w. Determinanten 4. Ordnung bezeichnen. Da $(x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) = 0$ die Gleichung der Ebene (234) oder I des A-Tetraeders darstellt und diese Gleichung in Verbindung mit $x_1 = 0$, die Gleichung der Fläche erfüllt, so liegt die Gerade (I I′) auf der Fläche.

4. Die vier Geraden g der Fläche schneiden sich bei allgemeiner Lage der beiden Tetraeder nicht. Sollen sich zwei derselben schneiden, z. B. (I I′) und (II II′), so müssen sich in demselben Punkte auch die Kanten (I II), (I′ II′) der beiden Tetraeder schneiden, und umgekehrt, schneiden sich diese beiden Kanten, so schneiden sich auch die beiden Geraden (I I′), (II II′) in diesem Punkte. Dann wird aber offenbar dieser Schnittpunkt der beiden Kanten Knotenpunkt der Fläche. So oft sich also zwei gleichbezeichnete Kanten der beiden Tetraeder schneiden, erhält die Fläche einen neuen Knotenpunkt, ohne dass desshalb die betreffende Kante des A-Tetraeders auf die Fläche rückt. Nun sind die Bedingungen

dass die Kante (III IV) die Kante (III′ IV′) treffe $-(\alpha_3 \beta_4) = 0$
(II IV) „ (II′ IV′) „ $-(\alpha_4 \gamma_2) = 0$
(II III) „ (II′ III′) „ $-(\alpha_2 \delta_3) = 0$
(I IV) „ (I′ IV′) „ $-(\beta_1 \gamma_4) = 0$
(I III) „ (I′ III′) „ $-(\beta_3 \delta_1) = 0$
(I II) „ (I′ II′) „ $-(\gamma_1 \delta_2) = 0$ } (a

wo $(\alpha_3 \beta_4)$, . . die Determinanten $\alpha_3 \beta_4 - \alpha_4 \beta_3$, . . . bezeichnen

Diese sechs Bedingungsgleichungen sind nicht unabhängig von einander. Sind fünf derselben erfüllt, so ist es auch die sechste; man überzeugt sich davon sofort, wenn

man in irgend fünf dieser Gleichungen die zweiten Glieder der Determinanten auf die rechte Seite bringt und sodann die linken Gleichungsseiten wie auch die rechten mit einander multiplicirt. Schneiden sich also fünf Paare dieser Kanten, so schneidet sich auch das sechste Paar. Es können sich demnach 1, 2, 3, 4 oder 6 dieser Kantenpaare schneiden und die erzeugte Fläche F wird dann zwar immer 10 Gerade, aber 5, 6, 7, 8, oder 10 Knotenpunkte besitzen.

5. Wir betrachten spezieller den letzteren Fall, in welchem die Fläche 10 Knoten und 10 Gerade enthält, indem sich die sechs Kantenpaare schneiden. Da in diesem Falle jede der vier Geraden g die andern schneidet, so liegen diese Geraden in einer Ebene und mithin sind die zwei Tetraeder perspektivisch gelegen. Die Ebene der vier Geraden ist die Ebene des perspektivischen Durchschnitts der zwei Tetraeder, die Ebenen I und I′, II und II′, . . sind homologe Ebenen, die Ecken 1 und 1′, 2 und 2′, u. s. f. homologe Ecken der zwei Tetraeder. Die durch diese zwei perspektivisch liegenden Tetraeder erzeugte Fläche F ist die Hesse'sche Fläche einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung. Das C-Tetraeder und die Ebene der vier Geraden g bilden das Pentaeder der Fläche; von dem A-Tetraeder liegen nur die Ecken auf der Fläche.

Dass die Fläche F in diesem Falle in der That die Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung ist, lässt sich leicht nachweisen und man kann auch sogleich die Gleichung der Fläche 3. Ordnung aufstellen, von welcher sie die Hesse'sche ist. Denn die Seitenflächen I und I′ der zwei Tetraeder schneiden sich auf der Ebene der vier Geraden g. Ist mithin $z = 0$ diese Ebene, so muss die Gleichung der Ebene I sich vermöge der Bedingungsgleichungen (a) unter die Form $\mu x_1 + \lambda z = 0$ bringen lassen; d. h. $(x_1 \beta_2 \gamma_3 \delta_4) = \mu_1 x_1 + \lambda_1 z$. Aus demselben Grunde muss $(\alpha_1 x_2 \gamma_3 \delta_4) = \mu_2 x_2 + \lambda_2 z$ sein u. s. w., wo die μ und λ leicht zu

berechnende Constante bezeichnen. Damit geht aber die Gleichung (I′) der Fläche in die bekannte Form

$$\alpha_1\lambda_1 x_2x_3x_4z+\beta_2\lambda_2 x_1x_3x_4z+\gamma_3\lambda_3 x_1x_2x_4z+\delta_4\lambda_4 x_1x_2x_3z \\ -\{(\alpha_1\beta_2\gamma_3\delta_4)-\alpha_1\mu_1-\beta_2\mu_2-\gamma_3\mu_3-\delta_4\mu_4)\}x_1x_2x_3x_4=0 \quad (1)$$

der Hesse'schen Fläche, bezogen auf ihr Pentaeder, über.

Durch die Bedingungsgleichungen (a) sind, wie wir sahen, fünf Coordinaten durch die übrigen bestimmt, so dass die Coordinaten der Eckpunkte eines zum Coordinaten-Tetraeder perspektivisch liegenden Tetraeders allgemein durch das Schema gegeben sind:[1])

$$\left.\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \dfrac{\alpha_4\beta_3}{\alpha_3} \\ \gamma_1 & \dfrac{\alpha_2\beta_3\gamma_1}{\alpha_3\beta_1} & \gamma_3 & \dfrac{\alpha_4\beta_3\gamma_1}{\alpha_3\beta_1} \\ \delta_1 & \dfrac{\alpha_2\beta_3\delta_1}{\alpha_3\beta_1} & \dfrac{\beta_3\delta_1}{\beta_1} & \delta_4 \end{array}\right\} \quad (2)$$

Ist nun die Gleichung der Hesse'schen Fläche irgend einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung gegeben, und man nimmt vier Pentaederebenen zur Bestimmung des C-Tetraeders, so werden die sieben zur Bestimmung des A-Tetraeders noch übrigen Grössen dazu hinreichen, die Ebene $z=0$ mit der fünften Pentaederebene und die Coëfficienten der Gleichung (1) mit denen der gegebenen Flächengleichung übereinstimmend zu machen. Man ersieht hieraus, dass jede Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung ohne besondere Singularitäten auf die angeführte Weise mittelst

1) Abgesehen von speziellen Lagen, in welchen die Fläche F entartet, kann hier keine der Coordinaten Null werden und daher auch allenfalls α_1, β_1, γ_1, δ_1 gleich Eins gesetzt werden.

zweier perspektivisch liegender Tetraeder construirt werden kann.[1])

6. Die Gleichung der Fläche F lässt in dem eben behandelten Falle, wenn die zwei Tetraeder perspektivisch liegen, eine bemerkenswerthe Transformation zu. Dividirt man nämlich in der Gleichung (I) die 2., 3., 4. Vertikalreihe der Determinante resp. mit α_2, α_3, α_4 und sodann die 2. Horizontalreihe mit $\frac{\beta_3}{\alpha_3}$, die 3. mit $\frac{\gamma_2}{\alpha_2}$, die 4. mit $\frac{\delta_3}{\alpha_3}$, indem man beachtet, dass vermöge der Bedingungsgleichungen (a) $\frac{\beta_3}{\alpha_3} = \frac{\beta_4}{\alpha_4}$, $\frac{\gamma_2}{\alpha_2} = \frac{\gamma_4}{\alpha_4}$, $\frac{\delta_3}{\alpha_3} = \frac{\delta_2}{\alpha_2}$ ist, so wird die Gleichung von F

$$\begin{vmatrix} 0 & x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} x_2 & x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_3} x_3 & x_1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_4} x_4 \\ \frac{\beta_1 \alpha_3}{\beta_3} x_2 - \frac{\beta_2 \alpha_3}{\beta_3} x_1 & 0 & x_2 - \frac{\beta_2}{\beta_3} x_3 & x_2 - \frac{\beta_2}{\beta_4} x_4 \\ \frac{\gamma_1 \alpha_4}{\gamma_4} x_3 - \frac{\gamma_3 \alpha_4}{\gamma_4} x_1 & x_3 - \frac{\gamma_3}{\gamma_2} x_2 & 0 & x_3 - \frac{\gamma_3}{\gamma_4} x_0 \\ \frac{\delta_1 \alpha_2}{\delta_2} x_4 - \frac{\delta_4 \alpha_2}{\delta_2} x_1 & x_4 - \frac{\delta_4}{\delta_2} x_2 & x_4 - \frac{\delta_4}{\delta_3} x_3 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

Aber nach den Relationen (a) ist

$$\frac{\beta_1 \alpha_3}{\beta_3} = \frac{\beta_1 \alpha_3 \delta_1}{\delta_3 \beta_1} = \frac{\alpha_3 \delta_1}{\delta_3} = \frac{\alpha_2 \delta_1}{\delta_2} = \frac{\alpha_2 \gamma_1}{\gamma_2} = \frac{\alpha_4 \gamma_1}{\gamma_4};$$

1) Mit Benützung der Coordinaten (2) wird, wenn

$$= \alpha_1\beta_3 - \alpha_3\beta_1,\ \varkappa_2 = \alpha_3\beta_2 - \alpha_2\beta_3,\ \varkappa_3 = \frac{\alpha_3\gamma_3\beta_1}{\gamma_1} - \alpha_3\beta_3,\ \varkappa_4 = \frac{\alpha_3\delta_4\beta_1}{\delta_1} - \alpha_4\beta_3,$$

$$z = \frac{x_1}{\varkappa_1} + \frac{x_2}{\varkappa_2} + \frac{x_3}{\varkappa_3} + \frac{x_4}{\varkappa_4},$$

e Gleichung der Fläche (1)

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_1 \cdot \frac{x_2 x_3 x_4 z}{\varkappa_1} + \frac{\alpha_2\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{x_1 x_3 x_4 z}{\varkappa_2} + \frac{\alpha_3\gamma_3}{\gamma_1} \cdot \frac{x_1 x_2 x_4 z}{\varkappa_3} + \frac{\alpha_4\delta_4}{\delta_1} \cdot \frac{x_1 x_2 x_3 z}{\varkappa_4} \\ &\left(\frac{\alpha_1}{\varkappa_1} + \frac{\alpha_2}{\varkappa_2} + \frac{\alpha_3}{\varkappa_3} + \frac{\alpha_4}{\varkappa_4}\right)\left(\frac{1}{\varkappa_1} + \frac{\beta_2}{\beta_1} \cdot \frac{1}{\varkappa_2} + \frac{\gamma_3}{\gamma_1} \cdot \frac{1}{\varkappa_3} + \frac{\delta_4}{\delta_1} \cdot \frac{1}{\varkappa_4}\right) x_1 x_2 x_3 x_4 = 0 \end{aligned}\right\} \quad (1')$$

mithin sind die Coëfficienten von x_2, x_3, x_4 in der 1. Vertikalreihe gleich. Dividirt man mit diesem Coëfficienten, so werden die Elemente der 1. Vertikalreihe

$$0,\quad x_2 - \frac{\beta_2}{\beta_1} x_1,\quad x_3 - \frac{\gamma_3}{\gamma_1} x_1,\quad x_4 - \frac{\delta_4}{\delta_1} x_1 .$$

Die Gleichung der Fläche nimmt sodann folgende Form an:

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_2}{\alpha_2} & \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_3}{\alpha_3} & \frac{x_1}{\alpha_1} - \frac{x_4}{\alpha_4} \\ \frac{x_2}{\beta_2} - \frac{x_1}{\beta_1} & 0 & \frac{x_2}{\beta_2} - \frac{x_3}{\beta_3} & \frac{x_2}{\beta_2} - \frac{x_4}{\beta_4} \\ \frac{x_3}{\gamma_3} - \frac{x_1}{\gamma_1} & \frac{x_3}{\gamma_3} - \frac{x_2}{\gamma_2} & 0 & \frac{x_3}{\gamma_3} - \frac{x_4}{\gamma_4} \\ \frac{x_4}{\delta_4} - \frac{x_1}{\delta_1} & \frac{x_4}{\delta_4} - \frac{x_2}{\delta_2} & \frac{x_4}{\delta_4} - \frac{x_3}{\delta_3} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

oder auch, wenn man die Vertikalreihen und auch die Horizontalreihen nach der Reihe mit x_1, x_2, x_3, x_4 dividirt

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & (\alpha_2' x_1') & (\alpha_3' x_1') & (\alpha_4' x_1') \\ (\beta_1' x_2') & 0 & (\beta_3' x_2') & (\beta_4' x_2') \\ (\gamma_1' x_3') & (\gamma_2' x_3') & 0 & (\gamma_4' x_3') \\ (\delta_1' x_4') & (\delta_2' x_4') & (\delta_3' x_4') & 0 \end{vmatrix} = 0 , \qquad (3')$$

wo α', β', γ', x' für $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$, $\frac{1}{\gamma}$, $\frac{1}{x}$ gesetzt ist. Diese Gleichung hat dieselbe Form, wie die Gleichung (I). Liegen also die beiden Tetraeder perspektivisch, sodass die Fläche F eine Hesse'sche Fläche wird, so wird die Gleichung (I) derselben nicht geändert, wenn man für alle Coordinaten ihre reciproken Werthe setzt, und dasselbe gilt natürlich auch von der entwickelten Gleichungsform (I').

7. Bei der perspektivischen Lage der beiden Tetraeder liegt jede Seitenfläche des einen Tetraeder perspektivisch zu der entsprechenden Seitenfläche des andern Tetraeder und die in diesen entsprechenden Seitenflächen der beiden Tetraeder liegenden Kanten schneiden sich mithin; ebenso liegen auch zwei entsprechende Trieder der beiden Tetraeder perspektivisch und ihre Kanten schneiden sich. Bei der perspektivischen Lage der beiden Tetraeder schneiden also die drei Kanten, welche durch eine Ecke gehen, wieder drei Kanten, welche durch eine Ecke gehen im anderen Tetraeder und drei Kanten in einer Ebene schneiden wieder drei Kanten in einer Ebene des anderen Tetraeders; und umgekehrt schneiden sich die Kanten zweier Tetraeder in dieser Weise, so sind die Tetraeder in perspektivischer Lage und die sechs Schnittpunkte liegen in der Collineationsebene. Es gibt aber noch eine andere, hievon wesentlich verschiedene, Lage zweier Tetraeder, deren Kanten sich schneiden; nämlich die beiden Tetraeder können so liegen, dass drei Kanten durch eine Ecke drei Kanten in einer Ebene und drei Kanten in einer Ebene drei Kanten durch eine Ecke schneiden. Bei dieser Lage sind die Tetraeder nicht perspektivisch gelegen; drei der sechs Schnittpunkte liegen auf einer Ebene des einen Tetraeders, und die drei anderen auf einer Ebene des anderen Tetraeders.

Diese Lage tritt ein, wenn sich folgende Kantenpaare des A-Tetraeders und C-Tetraeders schneiden:

$$\left.\begin{array}{llll} \text{(I IV), d. i. (12) mit (I' II'),} & \text{Bedingung} & (\alpha_1 \beta_2) = 0 & \\ \text{(13) „ (I' III'),} & \text{„} & (\alpha_1 \gamma_3) = 0 & \\ \text{(14) „ (I' IV'),} & \text{„} & (\alpha_1 \delta_4) = 0 & \\ \text{(23) „ (II' III'),} & \text{„} & (\beta_2 \gamma_3) = 0 & \\ \text{(24) „ (II' IV'),} & \text{„} & (\beta_2 \delta_4) = 0 & \\ \text{(34) „ (III' IV'),} & \text{„} & (\gamma_3 \delta_4) = 0 & \end{array}\right\} \text{(b)}$$

Die sechs Bedingungsgleichungen sind in diesem Falle abhängig von einander, so dass wir sechs Coordinaten

des A-Tetraeders durch die übrigen darstellen können und erhält man hiedurch folgendes Schema für die Coordinaten der Ecken des A-Tetraeder:

$$\left.\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \dfrac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1} & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \dfrac{\alpha_2\alpha_3\beta_1\gamma_1}{\alpha_1^2\beta_3} & \dfrac{\alpha_3\gamma_1}{\alpha_1} & \gamma_4 \\ \delta_1 & \dfrac{\alpha_2\alpha_4\beta_1\delta_1}{\alpha_1^2\beta_4} & \dfrac{\alpha_3\alpha_4\gamma_1\delta_1}{\alpha_1^2\gamma_4} & \dfrac{\alpha_4\delta_1}{\alpha_1} \end{array}\right\} \quad (4)$$

Man kann daher die Ecke (α) beliebig wählen, die Ecke (β) auf einer bestimmten Ebene, die 3. Ecke (γ) auf einer bestimmten Geraden; dann ist aber auch die 4. Ecke vollkommen bestimmt, wie diess auch die geometrische Betrachtung leicht erkennen lässt.

8. Es ist nun leicht zu sehen, dass, wenn eine der Bedingungen (b) erfüllt ist, z. B. (12) die Kante (I′ II′) schneidet die Gerade (12) ganz auf der Fläche F liegt. Denn projicirt man den Punkt 1 auf die Ebene I′ und den Punkt 2 auf II′ von irgend einem Punkt P der Geraden (12) aus so fallen die Projektionspunkte Q_1, Q_2 in dem Schnittpunkt von (12) und (I′ II′) zusammen und folglich liegen die vier Punkte Q in einer Ebene. Sind mithin die Bedingungen (b) für 1, 2, 3, 4 Kanten des A-Tetraeders (von denen nicht drei durch eine Ecke gehen) erfüllt, so rücken diese Kanten auf die Fläche und man kann so Flächen mit 4 Knoten und resp. 11, 12, 13, 14 Gerade erzeugen. Andernfalls werden neue Knotenpunkte hinzutreten. Sind endlich die sechs Bedingungen (b) sämmtlich erfüllt, so enthält die Fläche F ausser dem C-Tetraeder auch das A-Tetraeder vollständig; die Ecken des letzteren werden neue Knotenpunkte derselben und die Fläche F hat als

dann 8 Knoten und 16 Gerade.[1]) Die Gleichung dieser Fläche nimmt, wenn man in (I) die Determinante in den Horizontalreihen mit α_1, β_2, γ_3, δ_4 resp. dividirt und der Kürze halber

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \varkappa_{12}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \varkappa_{31}, \quad \frac{\alpha_4}{\alpha_1} = \varkappa_{14}$$
$$\frac{\beta_3}{\beta_2} = \varkappa_{23}, \quad \frac{\beta_4}{\beta_2} = \varkappa_{24}, \quad \frac{\gamma_4}{\gamma_3} = \varkappa_{34}$$

(wobei β_2 und γ_3 aus dem Schema (4) entnommen werden können), ferner

$$\varkappa_{12} x_1 - x_2 = X_{12}, \quad \varkappa_{31} x_3 - x_1 = X_{31}, \quad \varkappa_{14} x_1 - x_4 = X_{14}$$
$$\varkappa_{34} x_3 - x_4 = X_{34}, \quad \varkappa_{24} x_2 - x_4 = X_{24}, \quad \varkappa_{23} x_2 - x_3 = X_{23}$$

etzt, vermöge der Relationen (1) folgende Form an

$$F \equiv \begin{vmatrix} 0 & X_{12} & -\frac{1}{\varkappa_{31}} X_{31} & X_{14} \\ -\frac{1}{\varkappa_{12}} X_{12} & 0 & X_{23} & X_{24} \\ X_{31} & -\frac{1}{\varkappa_{23}} X_{23} & 0 & X_{34} \\ -\frac{1}{\varkappa_{14}} X_{14} & -\frac{1}{\varkappa_{24}} X_{24} & -\frac{1}{\varkappa_{34}} X_{34} & 0 \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

ler entwickelt, wenn

$$X_{12} X_{34} = Z_1, \quad X_{31} X_{24} = Z_2, \quad X_{14} X_{23} = Z_3,$$

$$\frac{1}{\varkappa_{14}} + \frac{1}{\varkappa_{12} \varkappa_{31} \varkappa_{24}} = \lambda_{12}, \quad \frac{1}{\varkappa_{14}} + \frac{1}{\varkappa_{12} \varkappa_{23} \varkappa_{34}} = \lambda_{13}, \quad \frac{1}{\varkappa_{24}} + \frac{1}{\varkappa_{31} \varkappa_{14} \varkappa_{23}} = \lambda_{23},$$

1) Man bemerke, dass sich diese Fläche wesentlich unterscheidet n der in Nr. 4 erwähnten Fläche mit 8 Knoten, nicht nur durch e Anzahl der Geraden, sondern auch durch die Lage der Knoten, bei letzterer Fläche alle Knoten auf den Kanten des C-Tetraeders lgen.

$$F \equiv \frac{1}{\varkappa_{12}\varkappa_{34}} Z_1^2 + \frac{1}{\varkappa_{31}\varkappa_{24}} Z_2^2 + \frac{1}{\varkappa_{14}\varkappa_{23}} Z_3^2 \qquad (5')$$
$$+ \lambda_{12} Z_1 Z_2 + \lambda_{13} Z_1 Z_3 + \lambda_{23} Z_2 Z_3 = 0.$$

Die Fläche ist mithin ein spezieller Fall einer Fläch 4. Ordnung, deren Gleichung aus den Gleichungen dreie Flächen 2. Ordnung quadratisch zusammengesetzt ist un welche demnach die 8 Schnittpunkte der drei Fläche 2. Ordnung zu Doppelpunkten hat.[1]) Diese Flächen 2. Ord nung zerfallen in unserem Falle in Ebenenpaare.

9. Indem wir nun einzelne Kantenpaare der beide Tetraeder den Bedingungen (b) Nr. 7, andere den Bedingunge (a) Nr. 4, welche bei der perspektivischen Lage der beide Tetraeder gelten, unterwerfen, können wir eine grosse Reih verschiedener Flächen 4. Ordnung erhalten, indem dadurc theils einzelne Kanten des A-Tetraeder auf die Fläche falle andererseits neue Doppelpunkte auf derselben entstehe Jedoch ist hiebei wohl darauf zu sehen, dass die Bedingunge auch verträglich seien. Hier gilt nun folgender Satz: „Sin 1, 2, 3, 4 die Ecken eines unebenen Vierecks und I′ II′ III′ IV die Ebenen eines zweiten unebenen Vierecks und es schneide die Seiten (12), (23), (34), (41) die aufeinander folgenden Seite (I′ II′), (II′ III′), . . des anderen, so kann zwar die Dia gonale (13) des ersten Vierecks die Diagonale (I′ III′) des zweite Vierecks schneiden oder die Diagonale (24) kann (II′ IV schneiden, oder es kann beides zusammen eintreffen; schneide aber die Diagonale (13) die Diagonale (II′ IV′), so schneide sich auch nothwendig die Diagonalen (24) und (I′ III′) de beiden Vierecke.“ Der erste Theil dieses Satzes folgt au der schon erwähnten Unabhängigkeit der Bedingungen (b) der zweite Theil folgt daraus, dass aus den Gleichungen

1) Cayley „On Quartic Surfaces“. Proc. of the London Mat Soc. Vol. III. p. 19.

$$\alpha_1 \beta_2 = \alpha_2 \beta_1$$
$$\beta_3 \gamma_2 = \gamma_3 \beta_2$$
$$\gamma_3 \delta_4 = \gamma_4 \delta_3$$
$$\alpha_4 \delta_1 = \alpha_1 \delta_4$$

sofort folgt $\alpha_4 \gamma_2 \cdot \beta_3 \delta_1 = \alpha_2 \gamma_4 \cdot \beta_1 \delta_3$, sodass, wenn $\alpha_4 \gamma_2 = \alpha_2 \gamma_4$, auch $\beta_3 \delta_1 = \beta_1 \delta_3$ ist. Dies sind aber (Nr. 4) die Bedingungen, dass (13) und (II′ IV′), (24) und (I′ III′) sich schneiden.

10. Nichts hindert ferner, dass eine oder mehrere Kanten des A-Tetraeders je zwei gegenüberliegende Kanten des C-Tetraeders schneidet, wobei die betreffende Kante des A-Tetraeders zugleich auf die Fläche rückt und einen Knotenpunkt auf derselben veranlasst. Wir können hiedurch die zwei Tetraeder noch in nähere Verbindung bringen, als in den zwei schon betrachteten Fällen, in welchen jede Kante des einen Tetraeders je eine des anderen schneidet. Gehen wir von dem zweiten Falle aus, in welchem die sechs Bedingungen (b) des Nr. 7 gelten, und die zwei Tetraeder ganz auf der Fläche liegen. Es folgt dann sofort aus dem Satze im vorigen Nr., dass wenn eine der Kanten des A-Tetraeders zwei gegenüberliegende Seiten des C-Tetraeders schneidet, dies auch für die gegenüberliegende Kante des A-Tetraeders eintritt. Es tritt mithin hiedurch immer ein Paar von neuen Knotenpunkten auf der Fläche auf.

Nehmen wir z. B. an die Kante (12) schneide nicht nur die Kante (I′ II′), sondern zugleich (III′ IV′) des C-Tetraeders, so kommt die Bedingung $(\alpha_3 \beta_4) = 0$ hinzu; hiedurch ist $\beta_4 = \frac{\alpha_4 \beta_3}{\alpha_3}$ in dem System (4) Nr. 7 der Coordinaten der Ecken des A-Tetraeders zu setzen, und man ersieht, dass dann zugleich $\gamma_1 \delta_2 = \gamma_2 \delta_1$ wird, also zugleich auch (34) dieselben gegenüberliegenden Kanten (III′ IV′) und (I′ II′) schneidet. Die Fläche F hat dann 10 Knotenpunkte und 15 Gerade; indem die zwei Knotenpunkte (12, III′ IV′) und

(34, I′ II′) hinzugekommen; die Lage der 10 Knotenpunkt ist jedoch ganz wesentlich verschieden von der Lage de 10 Knoten der Hesse'schen Fläche (Nr. 5), bei welcher fünf mal je 6 Knoten in einer Ebene liegen.

Kommt zu den vorigen Bedingungen noch die Be dingung $(\beta_1 \delta_3) = 0$ hinzu, so folgt aus den Coordinaten (4 der Ecken des A-Tetraeders

$$\beta_1 \cdot \frac{\alpha_3 \alpha_4 \gamma_1 \delta_1}{\alpha_1^2 \gamma_4} = \beta_3 \delta_1 .$$

Diese Bedingung ist identisch mit $(\alpha_2 \gamma_4) = 0$; es schneide dann auch die Kanten (24) und (13) die beiden gegenübe liegenden Kanten (I′ III′) und (II′ IV′) des C-Tetraede Die Fläche F hat 12 Doppelpunkte und 16 Gerade. zwei gegenüberliegende Kanten des einen und des ander Tetraeders, nämlich (14), (23) und (I′ IV′), (II′ III′), trag je zwei Knotenpunkte, die übrigen Kanten je drei. D Coordinaten der Ecken des A-Tetraeders werden nun

$$\left.\begin{array}{llll} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \dfrac{\alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} & \beta_3 & \dfrac{\alpha_4 \beta_3}{\alpha_3} \\ \gamma_1 & \dfrac{\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \gamma_1}{\alpha_1^2 \beta_3} & \dfrac{\alpha_3 \gamma_1}{\alpha_1} & \dfrac{\alpha_3 \alpha_4 \beta_1 \gamma_1}{\alpha_1^2 \beta_3} \\ \delta_1 & \dfrac{\alpha_2 \alpha_3 \beta_1 \delta_1}{\alpha_1^2 \beta_3} & \dfrac{\beta_3 \delta_1}{\beta_1} & \dfrac{\alpha_4 \delta_1}{\alpha_1} \end{array}\right\} \quad (6)$$

11. Kommt endlich noch die Bedingung hinzu, dass e Kante (14) auch (II′ III′) schneide, so wird $(\alpha_2 \delta_3) = 0$. Di Bedingung in das vorige System (6) der Coordinaten ein führt, liefert die Gleichung

$$\frac{\alpha_3^2}{\beta_3^2} = \frac{\alpha_1^2}{\beta_1^2}$$

nd damit wird dann auch die Bedingung $(\beta_1 \gamma_4) = 0$ erfüllt, h. die Gerade (23) schneidet auch (I′ IV′). Führt man un in obiges Schema für $\frac{\alpha_3}{\beta_3}$ den Werth $-\frac{\alpha_1}{\beta_1}$ ein (für $= +\frac{\alpha_1}{\beta_1}$, würden die vier Punkte 1, 2, 3, 4 zusammen-llen), so ergeben sich für die Ecken des A-Tetraeders bei eser engsten Verbindung der beiden Tetraeder die Coordinaten

$$\left.\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \frac{\alpha_2\beta_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_3\beta_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_4\beta_1}{\alpha_1} \\ \gamma_1 & -\frac{\alpha_2\gamma_1}{\alpha_1} & \frac{\alpha_3\gamma_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_4\gamma_1}{\alpha_1} \\ \delta_1 & -\frac{\alpha_2\delta_1}{\alpha_1} & -\frac{\alpha_3\delta_1}{\alpha_1} & \frac{\alpha_4\delta_1}{\alpha_1} \end{array}\right\} \quad (7)$$

er auch

$$\begin{array}{cccc} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & \alpha_3 & -\alpha_4 \\ \alpha_1 & -\alpha_2 & -\alpha_3 & \alpha_4 \end{array}$$

Man sieht, dass in diesem Falle die besondere Lage der den Tetraeder eintritt, welche man auch die „desmische" annt hat, und dass diese Lage eben dadurch bedingt ist, ; jede Kante des einen Tetraeders je zwei gegenüber-ende des andern schneidet. Es sind in diesem Falle die lf Bedingungen (a) Nr. 4 und (b) Nr. 7 erfüllt; gleich-l ist, wenn die Lage des einen Tetraeders gegeben ist, Lage des anderen Tetraeders noch in soweit willkürlich ein Eckpunkt beliebig gewählt werden kann; die anderen n dann vollkommen bestimmt. Diess hat eben darin seinen rnd, dass, wie wir (Nr. 9) sahen, wenn die sechs Be-nungen (b) erfüllt sind und noch drei der Bedingungen (a)

auch die übrigen erfüllt sind, sodass wenn das C-Tetraed gegeben ist, die Coordinaten der Ecken des A-Tetraede nur 9 Bedingungen zu erfüllen haben, damit die desmisch Lage der zwei Tetraeder eintrete.

Wir gelangen zu demselben Resultat, wenn wir von d perspektivischen Lage der zwei Tetraeder ausgehend, Anzahl der Bedingungen aufsuchen, die nöthig sind, dan die desmische Lage eintrete. Man beweist nämlich leic den Satz: „Wenn von 4 Kanten des einen Tetraeders, ein unebenes Viereck bilden, z. B. (12), (34), (13), (2 drei je zwei gegenüberliegende Seiten des anderen Tetraed schneiden, so wird auch die vierte Kante (24), wenn sie ei Kante (I′ III′) schneidet, auch die gegenüberliegende (II′ I schneiden und umgekehrt.“ Es folgt daraus auch: „We die zwei Tetraeder perspektivisch liegen und drei Kan durch einen Punkt (oder in einer Ebene) und noch e vierte Kante des einen Tetraeders schneiden auch noch gegenüberliegenden Seiten des anderen Tetraeders, so fin dasselbe auch für die zwei übrigen Kanten statt.“ Es müs mithin noch vier Bedingungen zu den Bedingungen (a) Nr welche, wie wir sahen, nur für fünf Bedingungen zäh hinzutreten, um die desmische Lage der Tetraeder her zubringen.

12. Die Fläche, welche durch die zwei Tetraeder, w sie in desmischer Lage sich befinden, erzeugt wird, hat Knotenpunkte und 16 Gerade. Sie ist, wie sogleich ersi lich, die Hesse'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung vier Knotenpunkten. Das A-Tetraeder bildet das Kno tetraeder der Fläche 3. Ordnung, das C-Tetraeder in bindung mit der Ebene des perspektivischen Durchschn d. i. der vier Geraden g, das Pentaeder der Hesse'schen Flä

Die Fläche gehört aber auch zu den in Nr. 8 be delten Flächen; daher kommt es, dass ihre Gleichung, wi kannt, sowohl in der Form (1) Nr. 5 als auch in der For

Nr. 8 geschrieben werden kann. Nehmen wir z. B. für die Coordinaten der Ecken des A-Tetraeders (Nr. 11)

$$\begin{matrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

o ergibt sich für die Gleichung der Fläche, als Hesse'sche läche (1) Nr. 5

$$x_2 x_3 x_4 z + x_1 x_3 x_4 z + x_1 x_2 x_4 z + x_1 x_2 x_3 z - 4 x_1 x_2 x_3 x_4 = 0,$$

o

$$z = x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$$

ährend sich nach (5) Nr. 8 die Gleichung der Fläche in er Form ergibt

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 - 2 Z_1 Z_2 - 2 Z_1 Z_3 - 2 Z_2 Z_3 = 0$$

er auch

$$\sqrt{Z_1} + \sqrt{Z_2} + \sqrt{Z_3} = 0,$$

o

$= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4)$, $Z_2 = (x_1 + x_3)(x_2 + x_4)$, $Z_3 = (x_1 + x_4)(x_2 + x_3)$.

13. Da die beiden Tetraeder mit ihrem perspektivischen rchschnitt die Fläche F vollkommen bestimmen, so ersieht n, dass, wenn bei der geometrischen Construktion der che die beiden Tetraeder ihre Rolle vertauschen, die Fläche geändert bleibt, aber sie ist dann die Hesse'sche Fläche er anderen Fläche 3. Ordnung, für welche das C-Tetraeder Tetraeder der Knotenpunkte ist, während das A-Tetraeder zum Pentaeder der Hesse'schen Fläche gehört. Die se'sche Fläche einer Fläche 3. Ordnung mit vier Knotenkten ist also zugleich Hesse'sche Fläche von zwei solchen hen 3. Ordnung.[1]) Diese beiden Flächen 3. Ordnung

1) Dies hat schon Eckardt (Math. Ann. V. S. 41), aus der analchen Form, in welche er die Gleichung einer solchen Hesse'schen gebracht, geschlossen.

haben ihre drei unären Geraden gemeinsam, nämlich die drei Diagonalen des perspektivischen Durchschnitts der zwei Tetraeder, oder also des Vierseits gebildet aus den vier Geraden g.

Wenn nun zwei Tetraeder A und C sich in desmischer Lage befinden, so haben sie, wie bekannt, die merkwürdige Eigenschaft, dass sie in vierfacher Weise perspektivisch liegen. Die vier Centren und die vier zugehörigen Collineationsebenen bilden die Ecken und Seitenflächen eines dritten Tetraeders (es mag das B-Tetraeder heissen), welches mit den beiden Tetraedern A und C im Bunde ist und zu jedem derselben in derselben Weise liegt, wie die beiden ersten zu einander.

Diesen vier perspektivischen Beziehungen entsprechend erhalten wir also bei desmischer Lage der zwei Tetraeder A und C vier solche Flächen 4. Ordnung mit 14 Knotenpunkten, die alle die zwei Tetraeder A und C ganz enthalten während bei dem Uebergang von der ursprünglichen perspektivischen Beziehung zu einer der drei anderen sich die Ebene des perspektivischen Durchschnitts um je eine der Diagonalen dieses Durchschnitts dreht und eine andere Seite des B-Tetraeders bildet. Zu diesen vier Hesse'schen Flächen gehören sodann acht Flächen 3. Ordnung, von welchen vier das A-Tetraeder, vier das C-Tetraeder zum Knotentetraeder haben und deren unäre Geraden die Kanten des B-Tetraeders bilden, indem die drei in einer Seitenfläche liegenden Kanten als unäre Geraden zu je zweien dieser Flächen 3. Ordnung gehören.

Verzeichniss der eingelaufenen Druckschriften

Januar bis Juni 1888.

Die verehrlichen Gesellschaften und Institute, mit welchen unsere Akademie in Tauschverkehr steht, werden gebeten, nachstehendes Verzeichniss zugleich als Empfangsbestätigung zu betrachten. — Die zunächst für die philosophisch-philologische Classe bestimmten Druckschriften sind in deren Sitzungsberichten 1888 Bd. II Heft 1 verzeichnet.

Von folgenden Gesellschaften und Instituten:

K. Akademie der Wissenschaften in Amsterdam:

Verdeeling der warmte over de aarde, door C. H. D. Buys Ballot. 1888. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Augsburg:

Bericht 1887. 8°.

Johns Hopkins University in Baltimore:

American chemical Journal. Vol. X. Nr. 1. 2. 1888. 8°.
American Journal of Mathematics. Vol. X. Nr. 2. 1888. 4°.
Circulars. Vol. VII. Nr. 60—65. 1887—88. 4°.
Studies. 5 Series. Nr. 12. 1887. 8°.

Kgl. natuurkundige Vereeniging in Batavia:

Natuurkundige Tijdschrift voor Nederlandsch-Indië. Deel 47. 1888. 8°.

Meteorological Observatory in Batavia:

Weenwaarnemingen. 8. Jaargang 1886. 1887. 8°.
Observations made at the Observatory. Vol. IX. 1886. 1887. Fol.

Commission für die Beobachtung des Venusdurchgangs in Berlin:

Die Venusdurchgänge 1874 und 1882. Bd. III. 1888. 4°.

Deutsche chemische Gesellschaft in Berlin:

Berichte. 20. Jahrg. Nr. 18 u. 19. 21. Jahrg. Nr. 1—10. 1887—88. 8

Deutsche geologische Gesellschaft in Berlin:

Zeitschrift. Bd. XXXIX. Heft 3 und 4. 1888. 8°.

Medicinische Gesellschaft in Berlin:

Verhandlungen aus d. Jahre 1887. Bd. XVIII. 1888. 8°.

Physiologische Gesellschaft in Berlin:

Centralblatt für Physiologie 1887 Nr. 21—26 a u. b. 1888 Nr. 1—6.
Verhandlungen. Jahrg. 1887/88. Nr. 4—12. 1887—88. 8°.

K. meteorologisches Institut in Berlin:

Ergebnisse der meteorologischen Beobachtungen im J. 1885. 1888.

K. Geolog. Landesanstalt und Bergakademie in Berlin:

Jahrbuch f. d. J. 1886. 1887. gr. 8°.

Verein zur Beförderung des Gartenbaues in den K. Preuss. Staa in Berlin:

Gartenflora. Zeitschrift für Garten- und Blumenkunde. Jahrg. 1887.

Zeitschrift für Instrumentenkunde in Berlin:

Zeitschrift. 8. Jahrg. 1888. Heft 2—6. gr. 8°.

Allgem. Schweizerische Gesellschaft für die gesammten Naturwis schaften in Bern:

Neue Druckschriften. Bd. XXX. Abth. 1. Basel 1888. 4°.

Schweizerische naturforschende Gesellschaft in Bern:

Mittheilungen. Jahrg. 1887. Nr. 1169—1194. 1888. 8°.
Verhandlungen. 70. Jahresversammlung 1887. Frauenfeld 1887.
Compte rendu des travaux de la 70. session de la société helvét des sciences naturelles. Génève 1887. 8°.

Schweizerische geologische Kommission in Bern:

Beiträge zu einer geologischen Karte der Schweiz. Lief. XXII. und Atlas und Mayer-Eymar, Palaeontol. Beilage zu Lief. X 1887. 4°.

Museum in Bergen:

M. Sars, J. Koren og D. C. Danielssen, Fauna littoralis Norve Liv. 2. 1856. Fol.
J. Koren und D. C. Danielssen Fauna littoralis Norvegiae. Livr 1877. Fol.
Olaf S. Jensen, Turbellaria ad litora Norvegiae occidentalia. 1878

Joh. Koren og D. C. Danielssen, Nye Alcyonider, Gorgonider og Pennatulider. 1883. Fol.
Fridjof Nansen, Myzostomernes Anatomi. 1885. Fol.

Naturhistorischer Verein der preussischen Rheinlande in Bonn:
Verhandlungen. 44. Jahrg. 2. Hälfte. 1887. 8°.

Société de géographie commerciale in Bordeaux:
Bulletin. 1887 Nr. 24. 1888 Nr. 1—12. 1887—88. 8°.

Société des sciences physiques et naturelles in Bordeaux:
Mémoires. 3e Sér. Tom. 3, cahier 1. 2.
Observations pluviométriques. 1885—1886. 1886. 8°.

American Academy of Arts and Sciences in Boston:
Proceedings. N. Ser. Vol. XIV. (= Whole Ser. Vol. XXII.) Part. 2. 1887. 8°.
Memoirs. Vol. XI. part 5 Nr. 6. Cambridge 1887. 4°.

Boston Society of Natural history in Boston:
Memoirs. Vol. IV. Nr. 1—4. 1886—87. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Bremen:
Abhandlungen. Bd. X. Heft 1. 2. 1888. 8°.

Naturforschende Gesellschaft in Brünn:
Verhandlungen. Band XXV. 1886. 1887. 8°.
. Bericht der meteorologischen Commission. 1887. 8°.

Académie R. de médecine in Brüssel:
Bulletin. IV. Ser. Tom. I. Nr. 11. Année 1887. Tom. II. Nr. 1—5. Année 1888. 8°.
Mémoires des concours et des savants étrangers. Tom. VIII. Fasc. 2. 3. 1888. 4°.

Société Royale malacologique de la Belgique in Brüssel:
Procès-verbaux 1887. p. LXXXI—CXLI. 8°.

Société entomologique de Belgique in Brüssel:
Table générale des Annales. Tom. 1—XXX. 1887. 8°.

Institut météorologique de Roumanie in Bukarest:
Annales. Tom. II. 1886. 1888. 4°.

K. Ungarische Akademie der Wissenschaften in Budapest:
Mathematische und naturwissenschaftliche Berichte aus Ungarn. Bd. V. (Juni 1886—Juni 1887.) 1887. 8°.

K. Ungarische geologische Anstalt in Budapest:

Földtani Közlöny. Bd. XVII. Heft 7—12. 1887. 8⁰.
Ueber ungarische Porzellanerden v. L. Petrik. 1887. 8⁰.
Geologische Aufnahmen. 4 Karten, bezeichnet D. 5, E. 6, 16 XXVI und 18 XXVIII. 1888. Fol.

Instituto y Observatorio di marina de San Fernando in Cadiz:

Anales. Seccion 2ª. Observaciones meteorológicas. Anno 1886. 1887. F

Meteorological Department of the Government of India in Calcutt

Meteorological Observations. July—December 1887 und Vorrede. F
Report on the Administration in 1886—87. 1887. Fol.
Cyclone Memoirs. Part I. 1888. 8⁰.
Indian Meteorological Memoirs. Vol. III. part 2. 1887. Fol.

Geological Museum in Calcutta:

Records of the Geological Survey of India. Vol. XX. Part
Vol. XXI. Part 1. 1887—88. 4⁰.

Indian Museum in Calcutta:

A Catalogue of the Moths of India, by E. C. Cotes. Part II. 1887.

Philosophical Society in Cambridge:

Proceedings. Vol. VI. Part 3. 1888. 8⁰.

Museum of comparative Zoölogy in Cambridge, Mass.:

Bulletin. Vol. XIII. Nr. 6—8. Vol. XVI. Nr. 1. 1887—88. 8⁰.
Memoirs. Vol. XV. 1887—88. 4⁰.

Astronomical Observatory of Harvard College in Cambridge, Ma

Annals. Vol. XIII. Part 2. 1888. 4⁰.
Henry Draper Memorial. Second annual Report of the photogra
Study of Stellar spectra, by Edw. C. Pickering. 1888. 4⁰

K. Sächsisches meteorologisches Institut in Chemnitz:

Jahrbuch. III. Abtheilung des Jahrganges IV. 1886. 1888. 4⁰.

Observatory in Cincinnati:

Publications. Nr. 9. Zone Catalogue of 4050 Stars. 1888. 4⁰.

Chemiker Zeitung in Cöthen:

Chemiker Zeitung. 1887. Nr. 103. 104. 1888. Nr. 1—26. Fol.

Academia nacional de ciencias in Cordoba (Rep. Argent.):

Boletin. Tomo X. entr. 1. Buenos Aires 1887. 8⁰.

Naturforschende Gesellschaft in Danzig:

Die prähistorischen Denkmäler der Provinz Westpreussen von A. Lissauer. Leipzig 1887. 4°.
Schriften. N. F. Bd. VII. Heft 1. 1888. 8°.

École polytechnique in Delft:

Annales. Tom. III. livr. 4. Leide 1888. 4°.

Colorado Scientific Society in Denver:

Proceedings. Vol. I u. II, 1. 1884—86. 8°.

Naturforschende Gesellschaft bei der Universität Dorpat:

Schriften. IV. 1888. 4°.

Union géographique du Nord de la France in Douai:

Bulletin. Tom. 8. Mars—Octob. 1887. 8°.

Observatory of Trinity College in Dublin:

Astronomical Observations. Part VI. 1887. 4°.

Botanical Society in Edinburgh:

Transactions and Proceedings. Vol. XVII. Part 1. 1887. 8°.

Royal Physical Society in Edinburgh:

Proceedings. Session 1886—87. 1887. 8°.

Reale Accademia dei Georgofili in Florenz:

Atti. 4. Serie. Vol. X. disp. 3. 4. Vol. XI. disp. 1. 1887—88. 8°.

Senckenbergische naturforschende Gesellschaft in Frankfurt a/M.:

Abhandlungen. Bd. XV. Heft 1. 2. 1887—88. 4°.

Naturwissenschaftl. Verein des Reg.-Bez. Frankfurt in Frankfurt a/O.:

Monatliche Mittheilungen. 5. Jahrg. 1887/88. Nr. 7—12. 8°.
Societatum Litterae. 1887. Nr. 12. 1888. Nr. 1—4. 8°.

Société de physique et d'histoire naturelle in Genf:

Mémoires. Tom. XXIX. Part 2. 1886—87. 4°.

Museo Civico di storia naturale in Genua:

Annali. Ser. II. Vol. 3—5. 1886—88. 8°.

K. Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen:

Nachrichten 1887. Nr. 15—21. 1888. Nr. 1—7. 1887—1888. gr. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Greifswald:

Mittheilungen. 19. Jahrgang 1887. Berlin 1888. 8°.

Leopoldinisch-Carolinische deutsche Akademie der Naturforscher in Halle:

Leopoldina. Heft XXIII. Nr. 21—24. Heft XXIV. Nr. 1—10. 1887—88. 4°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Sachsen und Thüringen in Halle a/S.:

Zeitschrift für Naturwissenschaften. Bd. 60. Heft 3—6. 1887. 8°.

Gesellschaft für Botanik in Hamburg:

Berichte. Heft I—III. 1886—87. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg:

Abhandlungen aus dem Gebiete der Naturwissenschaften. Bd. X. 1887. 4°.

Naturhistorische Gesellschaft zu Hannover:

34 - 37. Jahresbericht für die Jahre 1883—87. 1888. 8°.

Société Hollandaise des sciences in Harlem:

Oeuvres complètes de Christiaan Huygens. Tom. I. La Haye 1888. 4°

Siebenbürgischer Verein für Naturwissenschaften in Hermannstadt:

Verhandlungen und Mittheilungen. 36. Jahrg. 1886. 8°.

Naturwissenschaftlich-medicinischer Verein in Innsbruck:

Berichte. 16. Jahrg. 1886/87. 1887. 8°.

Medicinisch-naturwissenschaftliche Gesellschaft in Jena:

Jenaische Zeitschrift für Naturwissenschaft. N. F. Bd. 14. Heft 3. 1887. 8°.

Naturwissenschaftlicher Verein für Schleswig-Holstein in Kiel:

Schriften. Bd. VII. Heft 1. 1888. 8°.

Siebenbürgische Museumsgesellschaft in Klausenburg:

Orvos-természettudományi Értesitö. (Medicinisch-naturwissenschaftliche Mittheilungen). 1879—1887. 70 Hefte. 8°.
Jahrgang 1888: 1. Aerztlicher Theil. Heft 1.
2. Naturwissenschaftlicher Theil. Heft 1.
3. Populärer Theil. Heft 1. 2.
Az Erd. Muzeum-egylet évkönyvei. (Jahrbücher der siebenbürgischen Museumsgesellschaft). 1874—1878. 15 Hefte. 8°.
Publicationen. 1887 Nr. 1. 1887. 8°.

K. Akademie der Wissenschaften in Kopenhagen:

Skrifter. Naturvid. Afdel. Vol. IV. Nr. 4—7. 1887/88. 4°.

Akademie der Wissenschaften in Krakau:

Pamiętnik (Abhandlungen). Mathem.-physik. Classe. Bd. XIII. 1887. 4°.
Rozprawy (Sitzungsberichte). Mathem.-physik. Classe. Bd. 15. 16. 1887. 8°.
Antropologija. Tom. XI. 1887. 8°.

Société Vaudoise des sciences naturelles in Lausanne:

Bulletin. 3e Série. Vol. 23. Nr. 97. 1888. 8°.

Archiv der Mathematik und Physik in Leipzig:

Archiv. II. Reihe. Theil 6. Heft 1. 1887. 8°.

Astronomische Gesellschaft in Leipzig:

Vierteljahresschrift. 22. Jahrg. Heft 4. 1887. 8°.

K. Sächsische Gesellschaft der Wissenschaften in Leipzig:

Abhandlungen der math.-phys. Classe. Bd. XIV. Nr. 5—8. 1887—88. gr. 8°.
Berichte der math.-phys. Classe. 1887. Nr. 1. 2. 1887. 8°.

Journal für praktische Chemie in Leipzig:

Journal. N. F. Bd. 36. Heft 9—11. Bd. 37. Heft 1—9. 1887. 8°.

Royal Asiatic Society in London:

The Journal. N. Serie. Vol. XX. Part. 1. 2. 1888. 8°.

R. Astronomical Society in London:

Monthly Notices. Vol. 48. Nr. 2—7. 1887—88. 8°.
Memoirs. Vol. 49. Part 1. 1888. 4°.

Chemical Society in London:

Journal. January—June 1888. Nr. 302—307. 8°.
Abstracts of the Proceedings. Session 1888—89. Nr. 53—55. 1888. 8°.

Geological Society in London:

The quarterly Journal. Vol. 43. Part 1—4 (Nr. 167—172). 1887. 8°.
List of Members, 1. Nov. 1887. 8°.

Medical and Chirurgical Society in London:

Medico-chirurgical Transactions. Vol. 70. 1887. 8°.

Royal Microscopical Society in London:

Journal. 1888. Part 1—3. 1887. Supplementary Number. 1888. 8°.

Royal Society in London:

Proceedings. Vol. 43. Nr. 260—265. Vol. 44. Nr. 266. 267. 1887. 8

Zoölogical Society in London:

Transactions. Vol. XII. Part 7. 1888. 4°.
Proceedings. 1887. Part 4. 1888. Part 1. 1888. 8°.

Zeitschrift „Nature" in London:

Nature. Vol. 37. Nr. 944—974. 1887—88. 8°.

Société Royale des Sciences in Lüttich:

Mémoires. II. Série. Tom. 14. Bruxelles 1888. 8°.

Real Academia de ciencias exactas in Madrid:

Anuario. 1888. 8°.
Memorias. Vol. XII. XIII, 1. 1887. 4°.

Reale Osservatorio di Brera in Mailand:

Pubblicazioni. Nr. VI. 1875. Fol. Nr. XXVII. 1885. Fol. Nr. XX
1887. 4°.

Société d'histoire naturelle in Metz:

Bulletin. 2e Série. cahier 16. 17. 1884—87. 8°.

Sociedad de historia natural in Mexico:

La Naturaleza. II. Ser. Tom. I. Nr. 1. 2. 1887. Fol.

Società dei Naturalisti in Modena:

Atti. Memorie. Vol. VI. Anno XXI. 1887. 8°.
Atti. Rendiconti. Ser. III. Vol. III. p. 49—128. 1888. 8°.

Académie des sciences et lettres in Montpellier:

Mémoires. Section des sciences. Tom. XI, 1. 1887. 4°.

Geological and Natural History Survey of Canada in Montreal:

Catalogue of Canadian Plants. Part III. Apetalae. By John Macou
1886. 8°.

Société Impériale des Naturalistes in Moskau:

Bulletin. Année 1887. Nr. 4. Année 1888. Nr. 1. 1887—88. 8°.
Meteorologische Beobachtungen. 1887. I. Hälfte. 4°.

Statistisches Bureau der Stadt München:

Mittheilungen. Bd. IX. Heft 3. 1888. 4°.

Deutsche Gesellschaft für Anthropologie in Berlin und München

Correspondenzblatt. 1888. Nr. 5. München 4°.

Société des sciences in Nancy:

Bulletin. Ser. II. Tom. 8. Fasc. 20. Paris 1887. 8°.

Zoologische Station in Neapel:

Mittheilungen. Bd. VII. Heft 3. 4. Bd. VIII. Heft 1. 1887—88. 8°.

Institute of Engineers in Newcastle-upon-Tyne:

Transactions. Vol. 37. Part II. III. IV. 1888. 8°.

American Journal in New-Haven:

The American Journal of science. Vol. 34. Nr. 203—205. Vol. 35. Nr. 206—209. 1887—88. 8°.

Academy of Sciences in New-York:

Transactions. Vol. IV. 1884—85. Vol. VI. 1886—87. Vol. VII, 1 u. 2. 1886—87. 8°.
Annals. Vol. 4. Nr. 3. 4. 1888. 8°.

American geographical Society in New-York:

Bulletin. Vol. XIX. Nr. 4 u. Supplement. 1887. Vol. XX. Nr. 1. 1888. 1887—88. 8°.

Neurussische naturwissenschaftliche Gesellschaft in Odessa:

Zapiski. Tom. XII. Heft 2. 1888. 8.

Verein für Naturkunde in Offenbach:

26—28. Bericht 1884—87. 1888. 8°.

Radcliffe Observatory in Oxford:

Results of Observations made in the year 1884. Vol. 42. 1887. 8°.

Società Veneto-Trentina di scienze naturali in Padua:

Atti. Vol. XI. Fasc. 1. 1888. 8°.

Circolo matematico in Palermo:

Rendiconti. Tom. I. 1884—1887. Tom. II. Fasc. 1. 2. 3. 1887—88. 8°.

Académie de médecine in Paris:

Bulletin. 1888. Nr. 1—26. 8°.

Académie des sciences in Paris:

Comptes rendus. Tom. 106. Nr. 1—26. 1888. 4°.
Bulletin. 3. Série. Tom. 15. Nr. 1. 1888. 8°.
Mission scientifique du Cap Horn. Tom. IV. Géologie.
Tom. VI. Zoologie. Arachnides. 1887. 4°.

Moniteur scientifique in Paris:

Moniteur scientifique. Livr. 554—559. Févr.—Juillet 1888. gr. 8°.

Revue internationale de l'électricité in Paris:

Revue. 4e Année. Tom. VI. Nr. 49—60. 1888. gr. 8°.

Société d'anthropologie in Paris:

Bulletins. 3e Série. Tom. X. Fasc. 3. 4. 1887. 8°.
Mémoires. 2e Sér. Tom. III. Fasc. 3. 4. 1888. 8°.

Société de géographie in Paris:

Compte rendu. 1888. Nr. 1—4. 9—12. 1888. 8°.
Bulletin. 1887. 4e trimestre. 1887. 8°.

Société mathématique de France in Paris:

Bulletin. Tom. XI—XV. 1883—87. 8°.

Société zoologique de France in Paris:

Bulletin. Vol. II. Part. 2—4. 1887. 8°.

Botanischer Garten in Petersburg:

Acta horti Petropolitani. Tom. X. Fasc. 1. 1887. 8°.

Chemisch-physikalische Gesellschaft an der Kais. Universität in Petersburg:

Schurnal. Tom. XIX. Heft 9. Tom. XX. Heft 1—4. 1887—88. 8°.

Russische geographische Gesellschaft in Petersburg:

Beobachtungen der Russischen Polarstation an der Lena-Mündu
Bd. II, 2. 1883—84. 1887. 4°.

Physikalisches Central-Observatorium in Petersburg:

V. Supplementband zum Repertorium für Meteorologie, mit Atl
1887. 4°.
Annalen. Jahrg. 1886. Theil II. 1887. 8°.

Academy of natural sciences in Philadelphia:

Proceedings. 1887. Part III. 1888. Part I. 1887—88. 8°.

American Pharmaceutical Association in Philadelphia:

Proceedings. 35th annual Meeting at Cincinnati, Septb. 1887. 8°.

American Philosophical Society in Philadelphia:

Proceedings. Vol. XXIV. Nr. 126. 1887. 8°.

Second Geological Survey of Pennsylvania in Philadelphia:

Annual Report for 1886. Parts 1—3 with Atlas. 1887. 8°.
Western Middle Anthracit Field. Atlas, part II. 1887. 8°.
Bucks and Montgomery Counties. Atlas. C. 7. 1887. 8°.

Società Toscana di scienze naturali in Pisa:

Atti. Processi verbali. Vol. VI. p. 1—36. 1887—89. 8°.

K. Böhmische Gesellschaft der Wissenschaften in Prag:

Spisuo poctěnych jubilejní (Mathem. Jubiläums-Schriften). Nr. 1. 1888. 8°.

Verein für Natur- und Heilkunde in Presburg:

Verhandlungen. N. F. Heft 5. 6. 1884—87. 8°.

Sternwarte in Pulkowa:

Observations de Poulkova publiées par Otto Struve. Vol. XII. S. Petersburg 1887. 4°.

Stern Ephemeriden auf d. J. 1888 von W. Döllen. S. Petersburg 1887. 8°.

Jahresbericht des Directors der Sternwarte. St. Petersburg 1887. 8°.

Accademia Pontificia de' Nuovi Lincei in Rom:

Atti. Anno 38. Sessione 5—7. 1886. 4°.

R. Comitato geologico d'Italia in Rom:

Bollettino. 1887. Nr. 9—12. 1888. Nr. 1—4. 1887—88. 8°.

Ministero della pubblica Istruzione in Rom:

Per la edizione nazionale delle opere di Galileo Galilei, esposizione e disegno di Antonio Favaro. Firenze 1888. gr. 8°.

American Association for the Advancement of science in Salem:

Proceedings. 36th Meeting held at New-York. August 1887. 1888. 8°.

Naturwissenschaftliche Gesellschaft in Sanct Gallen:

Bericht über die Thätigkeit im J. 1885/86. 1887. 8°.

California Academy of sciences in San Francisco:

Bulletin. Vol. II. Nr. 8. 1888. 8°.
Memoirs. Vol. II. Nr. 1. 1888. 4°.

Lick Observatory in San José, California:

Publications of the Lick Observatory of the University of California. Vol. I. Sacramento. 1887. 4°.

Deutscher wissenschaftlicher Verein zu Santiago in Chile:

Mittheilungen. Heft 5. Valdivia 1887. 8°.
Verhandlungen. Heft 6. Santiago 1888. 8°.

Société des Sciences in Strassburg:

Bulletin mensuel. Tom. 21. Fasc. 12. Tom. 22. Fasc. 1—6. 1887—88. 8°.

Department of Mines of New-South-Wales in Sydney:

Annal Report of the Department of Mines for the year 1886. 1887. Fol.

Geology of the vegetable creek tin-mining Field, New-England District, New-South-Wales, by T. W. Edgeworth David. 1887. 4°.

Royal Society of New-South-Wales in Sydney:

Journal and Proceedings for 1886. Vol. XX. XXI. 1887/88. 8°.

Physikalisches Observatorium in Tiflis:

Meteorologische Beobachtungen. Jahr 1886. 1888. 8°.

Kaiserliche Universität in Tokyo (Japan):

The Calendar for the year 1887—88. 1888. 8°.

Mittheilungen aus der medicinischen Fakultät. Bd. I. Nr. 2. 1888. 4°.

College of Science. Journal. Vol. II. Part. 1. 1888. 4°.

Canadian Institute in Toronto:

Annual Report. Session 1886—87. 1888. 8°.

Proceedings. 3. Series. Tom. V. Fasc. 2. 1888. 8°.

Zeitschrift „der Naturforscher" in Tübingen:

Der Naturforscher. XXI. Jahrg. 1888. Nr. 3—10. 12—28. 4°.

Universität in Upsala:

Bulletin mensuel de l'observatoire météorologique. Vol. XIX. Année 1887. 1887—88. 8°.

Institut Royal météorologique des Pays-Bas in Utrecht:

Nederlandsch meteorologisch Jaarboek voor 1887. 1888. 4°.

Superintendent of the Nautical Almanac in Washington:

Report for the year ending June 30. 1887. 8°.

Smithsonian Institution in Washington:

Miscellaneous Collections. Vol. XXXI. 1888. 8°.

United States Naval Observatory in Washington:

Observations made in the year 1883. 1887. 4°.

Signal Office, War Department, in Washington:

Annual Report of the Chief Signal Officer of the Army for the year 1886. 1886. 8°.

Bericht

über

die Königl. Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen

vom October 1850 bis zum September 1851,

womit

zur öffentlichen Prüfung der Schüler der Anstalt

Freitag am 29. August

ergebenst einladet

Dr. Lehme,
Dir. der Prov.-Gewerbeschule.

Inhalt:

Herleitung der Fundamentalsätze der Elementarplanimetrie mit Hilfe der Lehre vom unendlich Kleinen von Dr. Lehme. (Mit einer Figurentafel.)

Die Gewerbeschule in ihrer Stellung zum praktischen Leben.

Nachrichten über die Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen.

Gedruckt bei Gustav Butz in Hagen.

Herleitung

der Fundamentalsätze der Elementarplanimetrie mit Hilfe der Lehre von unendlich Kleinen.

In dem Grade, als die analytische Geometrie durch ie Einheit ihrer Methode und die Eleganz und Allgemeinheit ihrer ntwicklungen vorzugsweise den Charakter einer Wissenschaft sich ndiciren darf, bleibt der Umstand, daß sie in ihren ersten Anfän- en die Resultate der Euklidischen Methode benutzen muß, ein ebelstand, dessen Beseitigung sich die Mathematiker sollten ange- gen sein lassen. Zu den Hilfstruppen, deren sie aus der Eukli- schen Geometrie bedarf, gehören im Allgemeinen die Lehrsätze über n **Parallelismus grader Linien** und insbesondere die Winkel- und erhältnißsätze an Parallelen.

Die Trigonometrie, ein Theil der analytischen Geometrie, setzt enfalls diese Lehrsätze voraus. Außerdem wird zur Bestimmung s Abstandes zweier durch Coordinaten gegebener Punkte der pytha- reische Lehrsatz benutzt.

Es gesellen sich also zu jenen Lehrsätzen über den Parallelis- us noch die Sätze über **Rechtwinkligkeit der graden Linien**, im lgemeinen also die wesentlichsten Resultate der Euklidischen ethode. Gelingt es nicht, dieselben nach einer analytischen Me- de abzuleiten, so führt der Weg zur analytischen Geometrie ade durch den Theil der mathematischen Disciplinen, welcher am naigsten einen wissenschaftlichen Ausbau erlangt hat.

Möge man die folgenden Auszüge aus einer umfangreicheren handlung der Elementarplanimetrie nach den bisherigen Bemer- gen beurtheilen. Beiläufig lag der Bearbeitung auch das Stre- zu Grunde, die Anfangsgründe einer geometrischen alysis des Unendlichen — wenn ich mich dieses Aus- cks bedienen darf — in ei[illegible]häre zu entwickeln, noch nicht eine Fülle [illegible]meln das geometri- Wesen der Sache verdeckt. Von diesem Gesichtspunkte

aus würden wir eine ausführlichere Behandlung des Gegenstandes eine einleitende Formenlehre zur Analysis des Unendlichen nennen dürfen. **Für die Gewerbeschule würde sie allerdings sich nicht empfehlen.** Für diese wird die Euklidische Methode ihren Werth behalten. Vergleiche Lehrbuch und Repetitionstafeln der ebenen Geometrie von Zehme. Hagen 1850.

Eine Definition der Ebene und der graden Linie, welche sich auf die Theorie „identischer Gebilde" gründet, und die ich hier übergehen will, weil sie sich zu tief in das Gebiet abstracter Begriffe verliert, erklärt zunächst die folgenden 5 Sätze:

Eine Grade.

1) Eine unendliche (nach beiden Seiten in's Unendliche verlängerte Grade) theilt die Ebene in zwei congruente Theile. Jeden dieser Theile nennen wir Seite der Graden.

Nennen wir den Flächenraum der ganzen Ebene E, so ist also jede Seite der graden Linie $= E/_2$. (Fig. 1)

2) Nehmen wir in einer unendlichen Graden einen Punkt A an, so halbirt dieser die grade Linie. Nennen wir also die ganze Grade L, so ist jeder der Theile $L/_2$. (Fig. 2)

3) Nehmen wir in einer Graden 2 Punkte A und B an (Fig 3), und ist C der im Unendlichen liegende Endpunkt der Graden, so ist nach dem 2. Satze

$AC = L/_2$ und $BC = L/_2$ also

$AC - BC = 0$, oder $AB = 0$, das heißt:

Jede endliche Grade (AB) ist im Vergleich zu jeder unendlichen Graden oder zu jedem endlichen Theile (z. B. der Hälfte) derselben gleich 0 zu setzen.

Zwei Grade.

4) Gleichlange grade Linien kann man zur Coincidenz bringen.

5) Zwei Grade können sich nur in einem Punkt schneiden.

Wenn eine unendliche Grade AB (Fig. 4) eine andere L schneidet, so wird jede der Seiten der einen Graden, z. B. C seite von AB durch die andere Grade DC in zwei Theile theilt. Die ganze Ebene wird also durch zwei sich schneidende endliche Grade in 4 Theile getheilt.

Ein Winkel ist der Theil der Ebene, welchen eine Seite ei unendl. Graden mit einer Seite einer andern unendlichen Gra gemein hat. Der Winkel ist also eine Fläche. Die Gren eines Winkels sind zwei halbe unendliche Grade und ihr gem

samer Endpunkt. Diesen gemeinsamen Endpunkt nennt man Scheitel, die beiden Graden, Schenkel des Winkels.

Der Winkel, ein endlicher (also nicht der unendlichste) Theil der unendlichen Ebene ist, wie diese, eine unendliche Fläche, also im Vergleich zur Ebene größer als Null.

Zwei sich schneidende unendliche Grade geben also 4 Winkel. Von diesen 4 Winkeln bilden je zwei ein Winkelpaar. Wir haben zwei verschiedene Winkelpaare an dem Gebilde zu unterscheiden:

Nebenwinkel sind Winkel, welche
einen gemeinsamen Scheitel und
einen gemeinsamen Schenkel haben und deren andere beiden Schenkel eine Grade bilden.
AEC und BEC (Fig. 4) sind Nebenwinkel.

Scheitelwinkel sind Winkel, welche
einen gemeinsamen Scheitel haben und deren Schenkel so liegen, daß die Schenkel des einen je die Verlängerungen der Schenkel des andern bilden.
AEC und DEB sind also Scheitelwinkel.

6) Nebenwinkel sind zusammen gleich der halben Ebene. Folgt unmittelbar aus 1.

7) Scheitelwinkel sind gleich. Es ist (Fig. 4)

$$\left.\begin{aligned} a + b &= E/_2 \\ b + c &= E/_2 \end{aligned}\right] \text{(Satz 6) also}$$

$$a + b = b + c \text{ also}$$

$$a = c.$$

8) Sind zwei Winkel gleich, so kann man sie jederzeit so aufeinanderlegen, daß sie nur einen Winkel bilden.

Ein Winkel, der gleich ist seinem Nebenwinkel, heißt ein rechter Winkel oder ein Rechter (R). Es ist also $E/_4$ und R, $E/_2$ und 2R, E und 4R gleichbedeutend.

Der gemeinsame Schenkel gleicher Nebenwinkel heißt Senkrechte, Loth oder Perpendikel.

Ein spitzer Winkel ist ein Winkel, der kleiner; ein stumpfer, der größer ist, als sein Nebenwinkel. Bilden die Schenkel eines Winkels eine Grade, so nennt man den Winkel einen gestreckten Winkel. —

Liegt der Durchschnittspunkt zweier unendl. Graden im Unendlichen, so sagt man, die Graden sind parallel. Die Graden AB und CD (Fig. 5) treffen sich im Unendlichen, sind also parallel. Es muß jede von ihnen in einer Seite der andern vollständig liegen. Demnach wird die Ebene durch zwei parallele Grade nur in 3 Theile getheilt. Den Theil zwischen den Parallelen nennen wir einen linearen Flächenstreifen.

9) Der lineare Flächenstreifen oder ein endlicher Theil (z. B. die Hälfte) desselben ist im Vergleich zur halben Ebene, also zur gan-

zen Ebene, also auch zu einem endlichen Theile der Ebene (einem Winkel) gleich Null zu setzen.

Es ist nämlich

$$\left.\begin{aligned} a &= E/_2, \text{ auch} \\ a + b &= E/_2 \end{aligned}\right] \text{(Satz 1)}$$

also durch Subtraction $b = o$. Daraus ergiebt sich mit Hilfe der indirecten Beweismethode

10) Ist die zwischen zwei unendl. Graden liegende Fläche im Vergleich zur Ebene oder zu einem Winkel gleich Null, so ist es die Fläche eines linearen Flächenstreifen.

Drei unendliche Grade.

Da von zwei Graden die eine der andern entweder parallel ist, oder sie schneidet, so liegen drei unendliche Grade entweder so, daß keine einer andern parallel ist, oder daß eine nur einer der andern parallel ist, oder daß eine den beiden andern parallel ist.

Keine von den drei unendlichen Graden sei einer andern parallel.

Zu zwei sich schneidenden Graden fügen wir noch eine Grade hinzu (Fig. 6), die jedoch nicht durch den Durchschnittspunkt der beiden Graden gehen mag. Dann ergiebt sich ohne Weiteres, daß sich 3 Grade in 3 Punkten schneiden, und daß sie die Ebene in 7 Theile zerlegen.

Einer dieser Theile ist von 3 endlichen Graden rings umschlossen; er heißt Dreieck, die Graden heißen Seiten des Dreiecks. Ein von 4 endlichen Graden umschlossener Theil der Ebene heißt Viereck, ꝛc. Dreiecke, Vierecke, Fünfecke ꝛc. sind gradlinige Figuren. **Jede gradlinige Figur ist ein unendlichster Theil der Ebene, also gegen diese gleich Null zu setzen.**

11) Die Außenwinkel (a, b, c, d, e, f,) jeder gradlinigen Figur (Fig. 7) betragen zusammen 4 Rechte.

Es ist nämlich $a + b + c + d + e + f + F = 4R.$

Zugleich ist F als endliche Fläche gegen die Winkel, welche unendliche Flächen sind, $= 0$, also

$$a + b + c + d + e + f = 4R.$$

Die Nebenwinkel der Außenwinkel heißen innere Winkel.

12) Die innere Winkel einer gradlinigen Figur von n Seiten betragen $(2n - 4)$ Rechte.

Nennen wir die Summe der Außenwinkel s, die Summe der innern Winkel S, dann ist

$S + s = n.\ 2R.$ weil je ein Außenwinkel mit einem innern Winkel 2R. beträgt. Da aber nach Satz 11

$s = 4\ R.$ ist, so ist

$S + 4R. = n.\ 2\ R.$, also $S = (2n - 4)\ R.$

13) Die Summe der innern Winkel des Dreiecks beträgt 2 Rechte.

Setzen wir in Satz 12, $n = 3$, so ist

$$S = (2.\ 3 - 4)\ \mathfrak{R} = 2\ \mathfrak{R}.$$

Ein Dreieck, in welchem ein Winkel ein Rechter ist, heißt ein rechtwinkliges Dreieck. Die Seiten des rechtwinkligen Dreiecks, welche verlängert den rechten Winkel bilden, heißen Katheten, die dritte Seite Hypotenuse.

Zwei Grade seien parallel, die dritte schneide beide.

Werden zwei Grade AB und CD (Fig. 8) von einer dritten geschnitten, so entstehen um die Durchschnittspunkte herum 8 Winkel. Von diesen kann man je zwei zusammennehmen, so erhält man, außer Neben- und Scheitelwinkeln, folgende Winkelpaare:

Gegenwinkel sind Winkel, welche auf ein und derselben Seite der schneidenden Graden liegen und nicht Nebenwinkel sind.

Wechselwinkel sind Winkel, welche auf verschiedenen Seiten der schneidenden Graden liegen und weder Neben- noch Scheitelwinkel sind.

Ein Winkel liegt innerhalb der geschnittenen beiden Graden, wenn das Stück der schneidenden Graden zwischen den Durchschnittspunkten in einem seiner Schenkel liegt. Ein Winkel liegt außerhalb der geschnittenen Graden, wenn jenes Stück in keinem seiner Schenkel liegt. Danach unterscheiden wir innere, äußere und gemischte Gegen- und Wechselwinkel, je nachdem die beiden Winkel des Paares beide innerhalb, oder beide außerhalb liegen, oder der eine innerhalb, der andere außerhalb.

Die 6 Gleichungen:

Innere Gegenwinkel sind gleich zwei Rechten.
Aeußere „ „ „ „ „ „
Gemischte Wechselwinkel „ „ „ „
Innere „ „ sind gleich.
Aeußere „ „ „ „
Gemischte Gegenwinkel „ „

wollen wir die Grundgleichungen in Bezug auf zwei durch eine dritte geschnittene Grade nennen.

Mit Anwendung von Satz 6 und 7 ergeben sich auf sehr einfache Weise die folgenden Sätze:

14) Werden zwei Grade von einer dritten geschnitten, und gilt eine der Grundgleichungen für ein Paar, so gilt sie auch für jedes andere Paar.

Der folgende Satz faßt 30 leicht erweisliche Sätze zusammen:

15) Werden zwei Grade von einer dritten geschnitten und gilt eine der Grundgleichungen, so gelten auch die übrigen.

Werden zwei parallele Grade durch eine dritte geschnitten, so wird die Ebene in 6 Theile getheilt. Vier von diesen 6 Theilen sind Winkel, die übrigen nennen wir Paralleldreiseite, (GJC und DJGB) (Fig. 9)

Wir stellen nun folgende Sätze auf:

16) Werden zwei parallele Grade durch eine dritte geschnitten, so gelten die Grundgleichungen.

Es ist W. EGB (Fig. 9) = a

und W. EJD = a + b.

Da nun b = 0 ist im Vergleich zu a (Satz 9), so ist a = a + b oder W. EGB = W. EJD. Dann folgt aus Satz 15, daß die Grundgleichungen statt finden.

17) Werden zwei Grade von einer dritten so geschnitten, daß die Grundgleichungen statt finden, so sind die Graden parallel.

Es ist nämlich (Fig. 9)

a = EGB

a + b = EJD da nun EGB = EJD sein soll, so ist

b = 0 im Vergleich zur Ebene.

Auf dieselbe Weise folgt, daß b, = 0 ist, also b + b, = 0.

Also ist AB parallel CD (nach Satz 10).

Ein Paralleldreiseit ist durch drei Linien, welche zwei Winkel AGJ und CJG (Fig. 9) bilden, begrenzt.

Ist die begrenzte Grade eines Paralleldreiseits gleich der begrenzten eines andern und ist ein Winkel des einen gleich einem Winkel des andern, so kann man beide so aufeinanderlegen, daß sie nur eine Größe bilden. Wir können also sagen

18) Paralleldreiseite sind gleich aus Gleichheit der begrenzten Graden und eines Winkels.

Zwei Grade seien ein und derselben dritten Graden parallel.

19) Sind zwei Grade CD und EF (Fig. 10) einer dritten Graden AB parallel, so sind sie einander parallel.

Ist CD parallel AB, so ist b = 0 im Vergleich zur Ebene.

Ist EF parallel AB, so ist b + c = 0 im Vergleich zur Ebene (nach Satz 9), also c = 0 im Vergleich zur Ebene, also ist der lineare Flächenstreifen zwischen CD und EF gleich Null im Vergleich zur Ebene, also ist CD parallel EF (nach Satz 10).

Vier Grade.

Vier Grade seien parallel.

Dieser Fall giebt nichts Neues.

Drei Grade seien parallel, die vierte schneide sie.

Wir wollen namentlich die beiden linearen Flächenstreifen und die beiden endlichen Graden OP und PQ (Fig. 11) betrachten.

20) Werden drei parallele Grade durch eine vierte geschnitten, so verhalten sich die beiden linearen Flächenstreifen AD und CF (Fig. 11) wie die zugehörigen Graden OP und PQ.

Man theile OP und PQ durch die messende Längeneinheit, und ziehe durch die Theilpunkte Parallen zu den gegebenen Parallelen, dann entstehen lauter gleiche Paralleldreiseite (cf. Satz 16 und 18), wonach der Satz ebenso folgt, wie der Euklidische Satz: Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie die Grundlinien.

Obgleich also zwei lineare Flächenstreifen im Vergleich zur Ebene gleich Null sind, haben sie dennoch ein bestimmtes Verhältniß, welches durch das Verhältniß grader Linien ausgedrückt werden kann. —

Zwei parallele Grade werden von zwei sich schneidenden Graden geschnitten.

Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel durch Parallelen geschnitten, so nennen wir die Abstände der Durchschnittspunkte der Graden vom Scheitel des Winkels oder der Scheitelwinkel, Scheitelabstände der Durchschnittspunkte.

21) Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel durch Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Scheitelabstände der Durchschnittspunkte auf dem einen Schenkel, wie die auf dem andern.

Es ist (Fig. 12) AB parallel CD; beide werden durch EF und GJ geschnitten. Man lege durch O eine Grade KL parallel AB (also nach Satz 19) parallel CD.

Nun verhalten sich nach Satz 20 die linearen Flächenstreifen KB und AD wie OP und PQ, zugleich wie OR und RS, also

$$\frac{OP}{PQ} = \frac{OR}{RS} \text{ oder } \frac{OP}{OQ} = \frac{OR}{OS}.$$

Rückt O in Fig. 12 in das Unendliche, werden also die Graden GJ und EF auch parallel, so ist $OP = OR = \infty$

also auch $PQ = RS$, oder in Worten:

22) Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

23) Werden die Schenkel eines Winkels oder zweier Scheitelwinkel durch Parallelen geschnitten, so verhalten sich die Scheitelabstände der Durchschnittspunkte auf dem einen Schenkel wie die Abschnitte der Parallelen.

Der Satz folgt aus 21 und 22 unmittelbar.

24) Die Kathete im rechtwinkligen Dreieck ist die mittlere Proportionale zwischen ihrer Projection auf die Hypotenuse und der Hypotenuse.

BAC sei das rechtwinklige Dreieck, AD senkrecht auf BC, so ist BD die Projection von BA auf BC.

Man hebe das Dreieck BAC von der Figur ab, und lege es wieder darauf, daß B wieder auf B, dagegen BA entlang BC und BC entlang BE fällt. Dann ist also Dreieck BA, C, mit

dem Dreieck BAC identisch, also BA, = BA und BC, = BC. Da die Winkel bei A, und D Rechte, also AD || C, A, (nach Satz 17) also (nach Satz 21)

$$\frac{BD}{BA} = \frac{BA,}{BC,} \text{ also } = \frac{BA}{BC}.$$

25) Das Quadrat der Hypotenuse ist gleich der Summe der Quadrate der Katheten.

Es ist (Fig. 14) $\frac{x}{a} = \frac{a}{c}$ (nach Satz 24), oder $xc = a^2$,

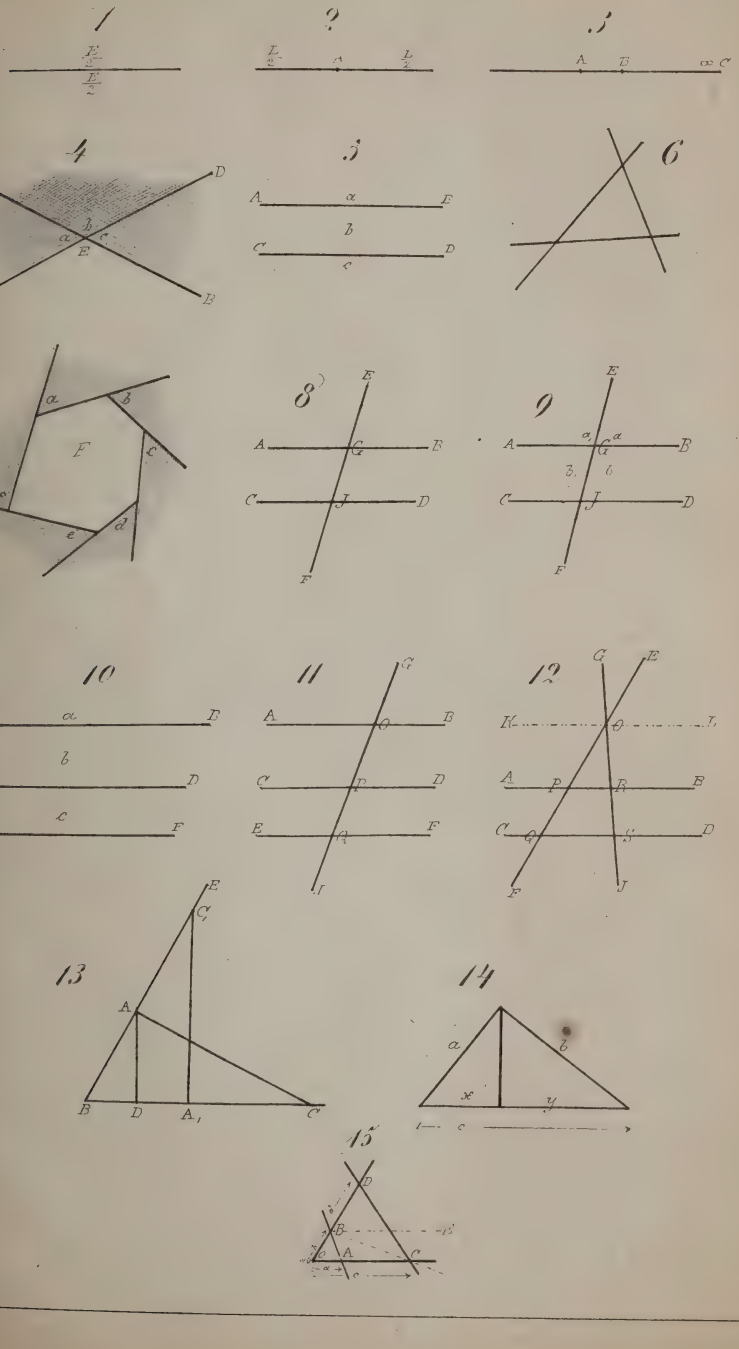
ferner $\frac{y}{b} = \frac{b}{c}$ oder $yc = b^2$, also

$$xc + yc = a^2 + b^2 \text{ oder}$$
$$(x + y)\, c = a^2 + b^2 \text{ oder}$$
$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Die bisherigen in sich zusammenhängenden Hauptsätze der gesammten Elementarplanimetrie reichen hin zur Begründung der Trigonometrie und analytischen Geometrie. Den Nerv der Methode bildet der Satz: „Jede endliche Größe verschwindet gegen jede unendliche Größe derselben Art." Zwei Dreiecke sind zwar im Vergleich zur Ebene gleich Null zu setzen, haben aber nichtsdestoweniger ein endliches Verhältniß zu einander. Dasselbe gilt für zwei lineare Flächenstreifen im Vergleich zur Ebene, für zwei endliche Grade im Vergleich zur unendlichen Graden. Der lineare Flächenstreifen verschwindet gegen die Ebene und ist unendlich groß gegen jede begrenzte Figur. Es ergiebt sich dieß auch anderweitig auf sehr einfache Weise. In Figur 15 ist △ BOA : △ DOC = a. b : c. d; bewegt sich CD so, daß D in OB und C in OA in das Unendliche rückt, so wird aus dem △ DOC der Winkel DOC, also △ BOA : Winkel DOC = a. b : ∞. ∞; also ist das Dreieck im Vergleich zum Winkel eine verschwindend kleine Größe der zweiten Ordnung.

Es ist ferner △ BOA : △ BOC = a : c; bewegt sich BC um B so, daß C in der Linie OA in das Unendliche rückt, so wird aus BOC das Paralleldreiseit EBOC, also △ BOA : Paralleldreiseit EBOC = a : ∞; also ist das Dreieck eine verschwindend kleine Größe der ersten Ordnung im Vergleich zum Paralleldreiseit oder auch zum lineare Flächenstreifen.

Schließlich sei bemerkt, daß die bisherige Methode auch d Herleitung der Sätze aus der Kreislehre wesentlich vereinfach


1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15

THE LIBRARY
OF THE
UNIVERSITY OF ILLINOIS

Die Gewerbeschule in ihrer Stellung zum praktischen Leben.

Eine der wichtigsten Erscheinungen der Zeit, welcher namentlich die Gewerbeschule ihre ganze Aufmerksamkeit zu widmen hat, ist die faktische Annäherung der Wissenschaft und des praktischen Lebens. Absichtlich stellen wir der Praxis nicht die Theorie, sondern dem praktischen Leben die Wissenschaft gegenüber, insofern man mit Theorie das zu bezeichnen pflegt, was unpraktisch ist. Das Leben mit seiner Mannigfaltigkeit concreter Erscheinungen decorirt durch eine Fülle von Beispielen das abstracte Gerüst der Wissenschaft; während diese die Methode der Verallgemeinerung dem praktischen Leben einimpft und somit zugleich das Streben in den Einzelnen legt, über die Grenzen des ihm ausschließlich Nützlichen hinaus zu schauen in das weite Gebiet gleichberechtigter Bestrebungen. Die Wissenschaft hat zur Gefährtin die Humanität. Beide werden in immer engerer Befreundung ihre Wanderung unaufhaltsam durch die Jahrhunderte fortsetzen, und durch die Nacht des Materialismus und Egoismus siegreich der Verwirklichung ihres göttlichen Berufs zu eilen.

Wir stellten die Annäherung der Wissenschaft und des praktischen Lebens als ein Faktum hin. Dieß Faktum erweist sich als solches in jeder besonderen Richtung. Nehmen wir zunächst die Maschinenmechanik. Die Vermittelung zwischen einer wissenschaftlichen Behandlung der Mechanik, wie sie sich unter Anderem in dem traité de mécanique von Poisson findet und den praktischen Zahlentabellen, welche in den Maschinenwerkstätten z. B. zu jeder Belastung die Zapfenstärke, zur Zapfenstärke die verschiedenen Dimensionen des Lagers, oder zum Halbmesser

der Kurbel die Dimensionen des Balanciers ꝛc. ꝛc. angeben, bilden eine Reihe von Handbüchern für Praktiker, wie
Resultate für den Maschinenbau von F. Redtenbacher;
Der Ingenieur von J. Weisbach;
Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinenmechanik v. J. Weisbach;
Vademecum des Mechanikers v. J. G. Bernoulli;
Vademecum für den praktischen Ingenieur und Baumeister von Fr. Schubert, K. Schinz ꝛc.
Praktisches Lehrbuch der Mechanik von N. W. Schulze — und andere, sämmtlich aus der neusten Zeit.

Diese Handbücher geben zum Theil Regeln für die Construction der Maschinen. Sobald eine Stärke von einer anderen irgendwie abhängig ist, läßt sich diese Abhängigkeit wenigstens annäherungsweise durch eine Formel oder Gleichung ausdrücken. Dergleichen Formeln machen die voluminösen Zahlentabellen, welche namentlich in früherer Zeit üblich waren, überflüssig. Da sich jede Gleichung zwischen veränderlichen Größen durch ein Curve darstellen läßt, deren Abscisse die unabhängige Veränderliche, deren Ordinate die abhängige Veränderliche ist, so kann auch die Abhängigkeit einer Stärke von einer anderen durch eine Curve geometrisch wiedergegeben werden. Diese Curven der im Maschinenbau vorkommenden Dimensionen sind größtentheils Parabeln des zweiten und dritten Grades, noch häufiger grade Linien und bei geometrisch-ähnlichen Maschinentheilen grade Linien, welche durch den Coordinatenanfang gehen.

Wir wollen nicht untersuchen, auf welche Weise die Constructeurs, welche „nach dem Gefühle" construiren, dieses Gefühl gestärkt haben; wir behaupten aber, daß sich die Resultate der Construction nach einem durch die Erfahrung ausgebildeten Gefühle gegen eine Unterordnung unter eine Gleichung unbedingt nicht sträuben werden. Der Constructeur erspart sich Zeit, wenn er sich kurze Regeln in Bezug auf die einzelnen Stärken, wie sie in der besonderen Fabrik üblich sind, selbstständig ableitet und durch Tabellen detaillirt. Indem wir dieß aussprechen, wollen wir den Handbüchern für Praktiker durchaus nicht das Wort reden. Die Regeln dieser Hilfsbücher sind in den Maschinenfabriken größtentheils unbrauchbar, denn selbst wenn sie die Dimensionen von Musterwerkstätten wiedergeben, passen sie nicht zu den Modellen der besonderen Werkstätte. Es ist aber wohl hinlänglich bekannt, daß jede Fabrik, wenn es sich um Benutzung alter Modelle handelt, höchst conservativ ist. Selbst für eine neu einzurichtende empfehlen sich die meisten Vademecum's nicht, denn in ihren Angaben ist der wichtigste Coefficient unberücksichtigt geblieben, nämlich der kaufmännische, wenn ich mich so ausdrücken darf, der Coefficient welcher durch die Concurrenz vorgeschrieben ist. Bekanntlich findet sich in jeder Formel, durch welche eine Stärke angegeben wird, ein Coefficient für die Festigkeit.

Der Coefficient für die Sicherheit ist ein aliquoter Theil des Festigkeitscoefficienten, also zum Beispiel bei nfacher Sicherheit der nte Theil desselben. Ein erfahrner Mechaniker wird diese Größe n unter Berücksichtigung aller mechanischen Eventualitäten bestimmen. Allein nimmt er die Sicherheit zu groß an, so wird der Maschinentheil zu stark, also zu schwer, also zu theuer. Die Fabrik hält die Concurrenz nicht aus, und es bleibt nichts übrig, als bei der Wahl der Sicherheit auch das kaufmännische Interesse zu befragen. Naturgemäß kann dieß Interesse nur bis zu einer gewissen Grenze maaßgebend sein. Die Fabriken, welche bei der Wahl ihrer Stärken von dem eigentlichen Boden der Mechanik zu weit sich entfernen, und Maschinen construiren, welche hinter eleganter und gefälliger Ausstattung ihre Schwäche verbergen sollen, werden über kurz oder lang dem Beispiel ihrer Maschinen folgen, und unter allen Coefficienten der Sicherheit wird der Coefficient ihrer eignen Sicherheit und ihres eignen Fortbestehens den kleinsten Werth annehmen.

Wenn nun die Constructeurs die Angaben der praktischen Hilfsbücher zum Theil nicht brauchen können, so wird eine Kenntniß der Methode, nach welcher sich dergleichen Regeln unter Berücksichtigung des Concurrenzpunkts ableiten lassen, immerhin nicht als ein überflüssiger Ballast zu betrachten sein. Durch diese Methode zeichnen sich die Vorträge des Herrn Professor Redtenbacher in Karlsruhe aus.

Wie in der Mechanik, so ließe sich die Annäherung der Wissenschaft und des praktischen Lebens auch in anderen Gebieten nachweisen.

Noch gegenwärtig gehört die Chemie auf den Universitäten zu einer Facultät und hat sonderbarer Weise in dieser Facultät die Philosophie zur Collegin. Hier liest man mit Pathos über Hegelsche Logik, und daneben unter demselben Dache über die zweckmäßigste Methode zu düngen. Die Frage, ob die hervorragendsten Laboratorien der Universität mehr angehören dürfen als den polytechnischen Schulen, verdient wenigstens der Beachtung. Die Universität Gießen wird ihr Laboratorium nicht gern einer polytechnischen Schule überlassen, der technische Chemiker dagegen wünschen, daß er sich da zu seinem Berufe ertüchtigen könnte, wo auch die mechanisch technische Richtung in gleicher Weise vertreten wäre.

Es würde nun die Frage zu erörtern sein, in wie weit der Unterricht auf der Gewerbeschule der Wissenschaft oder dem praktischen Leben Rechnung tragen müsse. —

Als das letzte Programm vor nunmehr einem Jahre die Aufgabe der Gewerbeschule besprach, war der Organisationsplan vom 5. Juni 1850 vom Königlichen Ministerium soeben bekannt gemacht worden. Zufällig veröffentlichte an demselben Tage das französische Kriegsministerium ein Programm, durch welches den

zur Pariser école polytechnique vorbereitenden Schulen bestimmte Grenzen ausführlich vorgezeichnet wurden. Die Anforderungen des französischen Programms sind beiweitem gesteigerter, als die des preußischen Organisationsplans. Zu den Aufnahmebedingungen gehört unter Anderem Bekanntschaft mit der analytischen Geometrie, sogar mit den Anfangsgründen der Differentialrechnung. Wenn die Franzosen, denen man in praktischen Dingen einen glücklichen Takt nicht absprechen wird, von ihren technischen Eleven eine umfangreichere wissenschaftliche Vorbildung fordern, so werden wir Deutsche, beinahe verrufen wegen allzu großer Wissenschaftlichkeit, ohne Bedenken mindestens das vom preußischen Handels-Ministerium uns zugewogene Quantum wissenschaftlicher Unterrichtsgegenstände hinnehmen können, und die Ansicht, als bewegten sich die Gewerbeschulen in neuerer Zeit auf einem übertrieben wissenschaftlichen Terrain, als vollständig unbegründet erachten. Diese Ansicht ist auch wohl nur von solchen Persönlichkeiten geltend gemacht worden, welche festgelaufen in eine besondere Richtung der Geistescultur, die Fortschritte der Technik etwa nur aus den Zeitungen kennen, denen eine Dampfmaschine für das A und O der Erzeugnisse des Maschinenbaues gilt, oder andrerseits von deren Antipoden, nämlich den Praktikern, welche indifferent sind gegen Alles, was außerhalb des Bereichs ihrer vielleicht höchst speziellen Fabrikation liegt, weil es „ihnen nichts einbringt."

Wir weisen jenen Vorwurf allzugroßer Wissenschaftlichkeit sobald er dem neuen Plane selbst und den nach seinen Bestimmungen eingerichteten Gewerbeschulen gilt, zurück, ohne jedoch in Abrede stellen zu wollen, daß die didaktische Bewegung innerhalb der Grenzen dieses Planes, die eigentliche Befolgung seiner Vorschriften en détail, in vielen Fällen eine Richtung verfolgt, welche den Bedürfnissen der Gegenwart und namentlich den Anforderungen der Praxis nicht genügend Rechnung trägt.

Es ist immerhin für den Lehrer eine nicht geringe Aufgabe bei dem Unterricht das richtige Maaß in der Berücksichtigung der Bedürfnisse der Praxis, sowie der Forderungen der Wissenschaft einzuhalten. Die Aufgabe ist schwierig, weil die einzelnen Richtungen der Technik zum Theil so divergiren, daß der nach Disposition strebende Geist, ohne sich Gewalt anzuthun, ihre Ende kaum vereinigen kann; sie ist schwierig, weil die Methode des gewerblichen Unterrichts gegenwärtig noch nicht auf eine lange Reihe von Erfahrungen gegründet ist, im Gegentheil nach einer bestimmten Gestaltung erst ringen muß. Wollte der Lehrer die Wissenschaften des Organisationsplans im hergebrachten Schlendrian, ohne Rücksicht auf den wachsenden Stoff, welchen namentlich die Technik liefert, behandeln, und ausschließlich solche abstracte Lehrgänge der Mathematik und Mechanik wählen, die auch nach hundert Jahren ihre Geltung behalten müssen, so würde er seine Stellung vollkommen unrichtig auffassen und der Freudigkeit entbehren

welche aus dem fortwährend durch die Gegenwart genährten Streben fließt, die Scheidewand zwischen der Wissenschaft und dem Leben zu beseitigen.

Insbesondere ist die Mechanik ohne Zweifel zu theoretisch vorgetragen worden. Docirt man sie nach physikalischen Lehrbüchern, so verkennt man zunächst vollständig die Aufgabe des Unterrichts. Selbst wenn man Beispiele an den theoretischen Lehrgang anlehnen wollte, würde man immer noch die Wissenschaft auf Kosten der praktischen Bedürfnisse begünstigen. Im Gegentheil müssen wir umgekehrt die Theorie an die Praxis anlehnen. Ein Vortrag in diesem Sinne hat seine Schwierigkeiten, da er durch ein Produkt unserer Literatur nicht unterstützt wird. So bleibt dem Lehrer der Mechanik nichts übrig, als sich selbstständig Bahn zu brechen. Der Entwurf eines wirklich ersprießlichen Lehrgebäudes verlangt große Umsicht, und wir können nicht dringend genug selbstständiges Arbeiten in diesem Artikel anempfehlen und vor Compilationen warnen; er verlangt aber vor Allem ungetheilte Aufmerksamkeit und auch in dieser Beziehung ist die baldige Einführung des Fachunterrichts nach dem Organisationsplan vom 5. Juni v. J. auf allen Gewerbeschulen höchst wünschenswerth. Der Lehrer der Mathematik und Mechanik wird die Mathematik mit stetem Hinblick auf die Mechanik durchzuarbeiten haben. Die Trigonometrie, die Algebra, die Stereometrie, die Kegelschnitte, die beschreibende Geometrie, und namentlich schon der elementare Unterricht in der 3. Klasse bedürfen einer ganz besonderen Behandlung. Daß sich ein solches in sich zusammenhängendes Lehrgebäude nicht über Nacht, am wenigsten aber dann entwerfen läßt, wenn man in allen Lehrgegenständen der Gewerbeschule unterrichten soll, liegt in der Natur der Sache. Der Entwurf des Lehrgebäudes setzt eine fortwährende Kommunikation zwischen dem Lehrer der Mathematik und Mechanik und dem Zeichnenlehrer voraus; denn auch der Zeichnenunterricht mit seinen Erläuterungen der Vorlegeblätter gehört in dieses in sich einige Lehrgebäude. Möchten sich die betreffenden Lehrer in dieser Beziehung gegenseitig ohne alle Nebenrücksicht freundlich entgegenkommen.

Man wird uns einwenden, daß ein Unterricht in dem angedeuteten Sinne nur die Ausbildung von Mechanikern erzielen würde. Diesen Einwand nehmen wir an, sobald man uns irgend eine andere Wissenschaft nachweisen kann, deren Inhalt so mannigfaltig und vielseitig ist, deren Methode so zahlreiche Uebergänge vom Concreten zum Abstracten darbietet, wie die Mechanik. Die Lehre von der Festigkeit der Materialien, das weitverzweigte Kapitel von den Motoren führt uns in das Gebiet der Physik und Chemie, die Lehre von dem geometrischen Zusammenhange der Maschinentheile liefert stoffliche Anwendungen aus der Planimetrie und Stereometrie, die verschiedenen erläuternden Zeichnungen beschäftigen die geo-

metrische Phantasie in immer neuer Weise und fortwähren
Zifferrechnungen, Umformungen von Gleichungen mit und oh
goniometrische Funktionen liefern ununterbrochen Stoff zur Uebu
in der Arithmetik. Keine andere Wissenschaft malträti
so energisch den Geist des Schülers. Aus geistiger Qu
resultirt aber geistige Tüchtigkeit. Ueberdieß lockt die Mechanik
und dieß hat sie mit der technischen Chemie gemein — den Zö
ling in das praktische Leben. Möge sie nur auch Brücken schlag
zum Uebergang. Die Erfahrung hat gelehrt, daß mitunter i
tüchtigsten Schüler die unbeholfensten Praktiker geworden sind, d
sie sich nicht haben lossagen können von dem Heimweh nach d
Lieblingsstationen ihres Jünglingsalters, nach den Tummelplätzen r
abstracter Geistesübungen. Der grübelnde, nach Uebersicht ringer
Gedanke kann seine Colonien gründen in allen Gebieten des
bens; es wird ihm aber nur dann gelingen, wenn er die Beschränk
heiten des Alltagslebens, welche ihre Berechtigung stets behal
werden, ertragen gelernt hat, wenn er in seiner Isolirung i
erste Beschränktheit erkennt. Dergleichen unpraktische Grübler w
die Gewerbeschule ebenso wenig liefern, als materielle Fachmensch
sobald die Mechanik umsichtig vorgetragen wird. Macht man i
allerdings „zur Kuh, die uns mit Butter versorgen soll," bemh
man sich, die Zöglinge größtentheils zu Mechanikern auszubild
so verfehlt man den Zweck des Unterrichts vollkommen. Man wi
also der Mechanik alle Aufmerksamkeit, weise aber gleichzeitig da
hin, daß die Maschinenfabriken gegenwärtig, zum Th
hinlänglich mit Constructeurs und Zeichnern v
sehen, eines Zuwachses nicht bedürfen.

Insofern einzelne Theile der Mechanik vorzugsweise eine hu
ristische Behandlung zulassen, und in dieser Weise behan
einen außerordentlichen Reiz darbieten, gewinnt die Mechanik
besondere Bedeutung. Die gefährlichste aber, auch wohlthätigste Kra
des Geistes ist seine Productionskraft. Ueberfluthet sie
Ufer, welche eine reiche Erfahrung ihr gezogen hat, so verni
sie die Mühe und den Fleiß ganzer Jahrhunderte; baut sie dage
vom Gegebenen ausgehend, allmälig weiter, durchforscht sie u
aufhörlich die Gebiete, welche der oberflächliche Blick als ge
schlossen bezeichnet, so dient sie dem guten Geiste des Mensch
schlechts. Eine irregeleitete Productionskraft wirkt destructiv.
sie dagegen vom Gegebenen aus, klammert sie sich unaufhörlic
die Thatsachen in der Weise, daß sie jedes ihrer Resultate
mals und abermals der nüchternsten Kritik unterwirft, so ist sie
gressiv und conservativ zugleich. In der Mathematik
ihren Anwendungen findet die Productionskraft ihre geeig
Nahrung, weil diese Wissenschaft einer heuristischen Behandlun
ungezwungen fügt. Beschäftigen sich die Schüler im Allgem
gern mit der Lösung geometrischer Aufgaben, so bietet name
der Abschnitt der Mechanik, welcher die Bewegungsmecha

men betrachtet, ein ungleich größeres Interesse dar. Diese Bewegungsmechanismen sind größtentheils einzeln erfunden worden. Eine durchgreifende Interpolation aller Uebergangsmechanismen ist noch nicht erfolgt. Man studirt die Eigenthümlichkeiten der losen Rolle und den einfachen Differentialmechanismus, jedes für sich, während doch beide Mechanismen im innigsten Zusammenhange stehen, und sich nur durch den Modus ihrer Benutzung unterscheiden, insofern man denselben Mechanismus in der einen Form zur Uebertragung der Kraft, in der andern, zur Umwandlung der Bewegung verwendet.

Wie die Rolle im Wesentlichen ein gleicharmiger, das Rad an der Welle ein ungleicharmiger Hebel ist, der Konus aber die Vermittelung zwischen beiden bildet, so lassen sich die meisten Mechanismen in geometrischen Zusammenhang bringen und die spezielleren von den allgemeineren in ähnlicher Weise ableiten, wie der besondere Kegelschnitt aus der allgemeinen Gleichung des zweiten Grades. Das Forschen nach dem allgemeineren Falle, wobei jederzeit die Entdeckung unbekannter Zwischenfälle einfließt, findet schon in den Elementen der Wissenschaften Nahrung. Die Methode der allmäligen Verallgemeinerung sollte sich der Lehrer der Gewerbeschule in allen Punkten seines Vortrags angelegen sein lassen; sie bringt Leben in den Unterricht und Zusammenhang in das Wissen. Das Einzelne wird vergessen, aber die Methode selbst wird wahres Eigenthum des Schülers. Er kann sie in der Folge mit aller Gewalt nicht mehr aus sich verbannen. Dem in dieser Weise geübten Schüler ist der banc à broches nicht mehr ein wunderbares Erzeugniß des Menschengeistes, er ist ihm eine höchst natürliche Zusammensetzung einfacher Mechanismen. Er schaut nicht verwirrt bald auf dieses Rädchen, bald auf jene Axe. Das Ganze tritt als Inbegriff von einigen Bewegungssystemen hervor, deren jedes, aus einzelnen Apparaten bestehend, eine bestimmte Funktion übernommen hat.

Wie für die oberen Klassen der Gewerbeschule die Mechanik und technische Chemie, so übernimmt in der Vorbereitungsklasse und der **Handwerkerfortbildungsschule** das Zeichnen die Vermittelung zwischen der Schule und dem praktischen Leben.

Wenn auch die Fortbildungsschulen nicht in demselben Grade wichtiger sind als die Gewerbeschulen, in welchem die Zahl der Handwerker die Zahl der höheren Gewerbetreibenden übertrifft, so ist ihre größere Wichtigkeit nicht in Abrede zu stellen. Man ist allerdings längst darüber einig, daß aus einer gesteigerten Ausbildung der Handwerker und einer Schärfung ihrer Fassungskraft eine Steigerung des Gesammtwohlstandes des Staats resultirt. Doch wird andererseits die Befürchtung laut, daß eine größere Aufklärung Gefahrbringend sei. Sobald die Aufklärung mit der Halbheit des Wissens identificirt wird, ist die Befürchtung nicht grundlos. Die Fortbildungsschulen müßten deshalb streben, die jungen Handwerker

für die besondere materielle Arbeit zu begeistern. Aus dem Grade des Ansehens, welches die materielle Arbeit in einem Staate genießt, läßt sich unbedingt auf die Größe seines Wohlstandes schließen.

Die oberste Aufgabe der Fortbildungsschule ist also, auf die Sittlichkeit zu wirken. Zufriedenheit im Berufe knüpft sich unmittelbar an den Glauben, daß die eigene Arbeit, auch die geringste, unbedingt nöthig ist zur Erhaltung und Förderung des Ganzen. Man suche das Element einer wohlthätigen Bewegung im Berufe, nicht außerhalb desselben und schreite da vorwärts, wo man einen sichern Boden unter sich fühlt. Jeder Vortheil in der Fabrikation muß mit Energie aufgesucht werden, wenn nicht ein noch weiteres Rückgehen einzelner Fabrikationszweige erfolgen soll. Die Handelsstraßen früherer Jahrhunderte sind zum Theil verlassen, ein Netz anderer Communikationswege ist auf dem Erdball verzeichnet, die Handelsverträge sind in Folge dessen modificirt, Völker in den Vordergrund der Concurrenz getreten, die bisher in stiller Abgeschlossenheit sich selbst genügten. Der Mechanismus des Welthandels ist gegenwärtig nicht im Beharrungszustande. Wo Schwankung im Verkehr, da ist Speculation. Die sicherste Speculation ist die, welche sich auf die größere Vorzüglichkeit der Fabrikation gründet. Wenn also zu irgend einer Zeit, so richtet sich in diesem Augenblick die Aufmerksamkeit der Staatsangehörigen auf die Industrie. Stillstand in diesem Punkte ist gegenwärtig Verrath am Vaterlande. Die nächste Aufgabe der Fortbildungsschulen ist also eine gründliche, nicht halbe Vorbereitung für den speziellen Beruf.

Wenn gleich in jeder Stadt jedes Handwerk vertreten ist, so heben sich doch ganze Districte, je nachdem sie einen wichtigeren Rohstoff verarbeiten, durch besondere Fabrikationszweige hervor. Danach wird nicht allein die Dichtigkeit der Fortbildungsschulen sondern auch ihr Lehrplan verschieden sein. Preußen, Pommern die Mark und Posen, wo durchschnittlich 17 Morgen Ackerland auf einen arbeitsfähigen Bewohner kommen, ist vornehmlich ackerbautreibend. In Sachsen und Schlesien kommen 10 Morgen auf einen arbeitsfähigen Bewohner. Ackerbau und Fabrikthätigkeit sind in diesen Provinzen mit einander verbunden. Rheinland und Westphalen sind beide vorzugsweise fabrikthätig und kommen hier $8^2/_3$ Morgen durchschnittlich auf jeden arbeitsfähigen Bewohner.

Für die hiesige durch ihre Industrie ausgezeichnete Gegend sind die Fortbildungsschulen bereits vom Publikum dringend gewünscht. Man verwechselte diese Schulen mit den Gewerbeschulen, und verkannte die letzteren soweit, daß man von ihnen ein unmittelbares Eingehen auf die Interessen des niederen Handwerkerstandes verlangte. Man vergißt dabei, daß die Gewerbeschule zunächst die höheren Gewerbetreibenden auszubilden hat. Der Unterricht sollte zu sehr gehoben, die Beschäftigung zu wenig praktisch sein. Die Bänke der Lehrzimmer wünschte man durch Hobel- und Drehbänke

bänke, die Schule durch eine Werkstatt ersetzt. Will man Werkstätten gründen, so bedarf es dazu nicht der Umwandlung einer Schule. Fordert ein Fabrikant eine solche Metamorphose, so fordert er im Grunde nichts anderes, als eine vom Staate theilweise erhaltene, von Beamten beaufsichtigte Fabrik. Vor der Einrichtung derselben müßte die wichtige Frage zur Erledigung gebracht sein, ob der Staat als Concurrent gegen die Staatsangehörigen auftreten dürfe. Die Idee von Staatsmusterwerkstätten soll hier nicht weiter ausgesponnen werden, weil, wie der Gegenstand selbst, so seine Besprechung unfruchtbar bleiben dürfte. Das Einfachere und minder Kostspielige führt vielleicht sicherer zum Zweck.

Der Verfasser dieser Zeilen zog vor, bisher die allgemeineren Ideeen über die Fortbildungsschulen zurückzuhalten und sofort mit der That zu beginnen. Er erließ daher einen Aufruf an die Industriellen der hiesigen Gegend, in welchem auf die Nothwendigkeit einer **Fabrikatensammlung** als Unterrichtsmittel aufmerksam gemacht und zu freiwilligen Beiträgen aufgefordert wurde. Der Aufruf erschien am 21. Mai c. und bereits Ende Juli, also nach zwei Monaten, zählte die Sammlung die folgenden 32 Nummern:

1, Eine polirte, zusammengeschweißte Messingfitze,
2, „ „ „ „ „ Eisenfitze mit Eichelknöpfen,
3, „ „ „ „ 2mal verkröpfte Thürenfitze,
4, „ geschlichtete, schwere, gerollte Thürenfitze,
5, „ hamburger geschlichtete Lappenfitze,
6, „ polirte Messingfitze mit Eichelknöpfen,
7, „ „ Messingfitze, das Blatt in der Mitte,
8, „ kupfernes Adreßschloß,
9, „ messingnes größeres Adreßschloß,
10, „ „ kleineres Adreßschloß,
11, „ Kniebankmesser,
12, „ belgische Pieke,
13, „ flanderische Pieke,
14, „ französische Sense,
15, „ holländische Sense,
16, „ blaues steyrisches Doppeldrückstrohmesser,
17, „ amerikanische Strauch- oder Haidesense,
18, „ Rattenfalle mit dem Zeichen 3—0
19, „ Maulwurfsfalle,
20, Ein feiner englischer 7zölliger Küperzirkel,
21, „ „ „ „ „ grader Zirkel,
22, Eine „ „ „ „ schwarze, englische, 7zöllige Kneipzange ohne Schulter,
23, „ feine, englische, polirte, 8zöllige Kneipzange,
24, „ ordinäre, englische, braunpolirte 11zöllige Schaffscheere,
25, „ englische, braunpolirte 11zöllige Schaffscheere mit schorigem Rücken,
26, „ feine, beste 11zöllige Schaffscheere,

27, Eine 10zöllige Pferdescheere,
28, „ pariser Raupenscheere,
29, Ein 3zölliges Pinngehänge mit ausgehauenem Winkel,
30, „ Thorschloß im größten Format,
31, „ Modell einer Locomotive,
32, „ Modell einer Dampfmaschine mit Transmission zu einer Walzwerk.

Nro. 1 bis 7 vom Fitzenschmied Carl Steinhaus aus Voerde
8 — 10 vom Schlösser August Nitzmann aus Voerde,
8 — 15 von einem Ungenannten,
16 — 17 vom Hammerschmied Franz Carl Brenne, in de Stöcken, Gemeinde Gevelsberg,
18 — 19 vom Fallenschmied Daniel Ischebeck auf d Boesebecke bei Voerde,
20 — 21 vom Zangenschmied Daniel Störring aus Voerd
22 — 23 vom Zangenschmied P. Kleinjung aus Kückelhau
24 — 28 vom Schaffscheerenschmied Wilhelm Schilken, i den Erlen bei Voerde,
— 29 vom Gehängeschmied Daniel Hülsenbeck, zu Wil ringhausen, Gemeinde Rüggeberg,
— 30 vom Schlösser Peter Friedrich Timmebeul i Rehsiepen, Gemeinde Hagen,
31 — 32 vom Bäcker Heinrich Ruttkamp aus Enneperstraß

Allerdings sind die bisherigen Einsendungen nur als der Anfa der Sammlung zu betrachten, allein deren fortwährende Erweiteru berechtigt zu der Hoffnung, daß die Hagener Gewerbeschule na einiger Zeit die Fabrikate der hiesigen Gegend in größerer Vo ständigkeit, also ein mehr oder weniger vollständiges Eisenwaare lager besitzen werde. Der Verfasser dieser Zeilen betreibt die Sam lung um so lieber, als sie ihm Gelegenheit bietet, die industriell Eigenthümlichkeiten der Umgebung von Hagen, den Gang der ei zelnen Fabrikation, und die Anschauungsweise der Fabrikant kennen zu lernen. Erfreulich und überraschend ist die Thatsac daß Kleinschmieden, in notorisch dürftigen Verhältnissen lebend, ih Theilnahme an der Schule durch verhältnißmäßig ansehnliche Sche kungen an den Tag legten.

Alle eingesandten Gegenstände sollen in verschiedenen Manier gezeichnet werden. Auf diese Weise ergeben sich Vorlegeblätt welche nach der größeren oder geringeren Einfachhe für die Zeichnenschüler jedes Alters sich empfehle.

Sobald die Sammlung der Zeichnungen einigermaßen co plet ist, soll sie dem Königlichen Handelsministerium eventuali zur Vervielfältigung vorgelegt werden. Eine zwar noch unvollstä dige aber in Bezug auf den Zeichnenunterricht immerhin noch re

brauchbare Sammlung der Fabrikate der Eisenindustrie dürfte nicht über 100 Thlr. kosten. Rechnet man dazu den geringen Preis der Vorlegeblätter, so kann sich jede Gewerbeschule, vielleicht sogar jede Real- und höhere Bürgerschule, sowie jedes Seminar ein Unterrichtsmittel verschaffen, dessen zweckmäßige Benutzung sicher von gutem Erfolge sein wird. Wenigstens läßt sich andrerseits bezweifeln, daß ein astronomisches Instrument im Werthe von einigen hundert Thalern einer Gewerbeschule allgemein nützlicher sein sollte, als eine vergleichen Sammlung. Gegenwärtig müssen unsere Schüler penibel ausgeführte Zeichnungen zum Theil ausländischer Maschinen copiren. Sollte sich denn unser Zeichnenunterricht nicht auf vaterländischem Boden bewegen können, sollen wir in allen Dingen Sklaven des Auslandes bleiben?! Kann Anfängern mit Entwürfen gedient sein, welche auf etwa 2 Quadratfuß Papier eine complicirte Dampfmaschine wiedergeben?

Es möge eine Zusammenstellung der Fabrikate der hiesigen Gegend in den gröbsten Umrissen und unter Weglassung der mannigfaltigen Unterabtheilungen folgen:

Werkzeuge: Hämmer, Beile, Aexte, Meißel, Hobeleisen, Bohre, Bohrwinden, Feilen, Messer, Sägen, Zugmesser, Schneideisen, Schneidekluppen, Schraubstöcke, Klebschrauben, Ambose, Sperrhörner, Lineale, Winkeleisen, Zirkel, Scheeren, Rechen, Schaufeln, Spaden, Hacken, Sensen, Sicheln u. A.

Andere Fabrikate: Fallen, Lampen, Waagen, Winden, Wagenschlüssel, Charniere, Gewerbe, Bänder, Haken, Fensterbeschläge, Knöpfe, Handgriffe, Schlösser, Riegel, Ketten, Schrauben, Bletteisen, Kaffeemühlen, Kaffeebrenner, Kaffeetrommeln, Dreifüße, Gratroste, Feuerzangen, Feuerkrätzer, Feuerschaufeln, Stocheisen, Ronfoirs, Pfannen, Deckel, Stampfeisen, Spundzieher, Spundbber u. v. A.

Ehe wir über die Benutzung der Fabrikatensammlung unsere maaßgebliche Ansicht aussprechen, würde zunächst der Lectionsplan der Fortbildungsschule in Hagen aufzustellen sein. Die Handwerkerschulen sollen für den speciellen Beruf vorbereiten. Zunächst sind also vom Stundenplan die Disciplinen auszuschließen, welche dem spätern Berufe zu fern liegen. Man führe also den angehenden Handwerker weder in die wissenschaftliche Mathematik, noch zu tief in das Gebiet der Naturwissenschaften ein. Das praktische Rechnen und eine sichere Benutzung der Formeln zur Berechnung der Körper und Flächen ist gründlich einzuüben. Ein planloses Besprechen naturwissenschaftlicher Gegenstände würde am unrechten Orte sein und Unzufriedenheit im Berufe, sowie ein unerhaltsames Vordrängen in die Berufskreise herbeiführen, welche angemessen nur ein gewisses Personenquantum zu fassen vermögen.

Der wichtigste Lehrgegenstand für die Handwerkerschulen ist das Zeichnen, nächstdem für die hiesige Gegend der Abschnitt der Technologie, welcher die Eisenfabrikate behandelt.

Diese specielle Technologie gehe mit dem Zeichnen Hand in Hand. Der Schüler copirt also zunächst die Zeichnungen der einfachsten Fabrikate, stellt sich darauf den Gegenstand so, wie er aufgenommen ist, vergleicht und mißt, versucht das Modell nach der Natur zu zeichnen, vergleicht seine Aufnahme mit dem Vorlegeblatt, und geht endlich dazu über, das Fabrikat in neuen Stellungen aufzunehmen. Er lernt auf diese Weise die Erzeugnisse des Gewerbefleißes spielend kennen. Zeigt man ihm darauf, in welcher Weise dieselben für verschiedene Zwecke abgeändert werden müssen, deute man ihm die constructiven Uebergänge des einen Fabrikats in ein anderes an, so wird das Material, welches sich später unter seinen Händen formen soll, zum Träger einer reichen Mannigfaltigkeit von Gestaltungen, deren jede einzelne durch ein Bedürfniß geschaffen wurde. Man nehme z. B. den Hammer vor, gebe an in welchen Fällen man Hämmer mit flacher, convexer oder concaver Bahn anwendet, in welchen die Contouren der Bahn kreisrund oval, quadratisch, viereckig, achteckig sind, warum der Stiel im Querschnitt oval ist und das Loch für denselben im Allgemeinen durch den Schwerpunkt des Hammers geht ꝛc. ꝛc.

Die Werkzeugs- und Apparatenkunde soll dem junger Handwerker den Reichthum des Gebiets aufdecken, welchem er sein späteres Leben zu widmen gesonnen ist.

Sobald die Liniensprache erst in weitere Kreise verbreitet sein wird, können namentlich die mit den Gewerbeschulen verbundenen Handwerkerschulen die Organe werden, durch welche die neuesten Constructionen anderer Länder unter das arbeitende Publikum fließen. Diese Schulen müssen dann die Mittelpunkte der übrigen Handwerkerschulen werden. Als Mittel einer leichteren Communikation würden sich Fabrikatenjournale empfehlen, in denen die Wünsche der Consumenten sowohl als die Erfindungen der Producenten, durch Zeichnungen möglichst verdeutlicht, zu besprechen wären. Man bedenke, daß einzelne Gegenstände in vielen tausend Exemplaren über das Land verbreitet werden, daß also eine kleine Unbequemlichkeit, z. B. in einem Griff, sich ebenso oft vervielfältigt, daß der Gebrauch solcher unbequemer Apparate zeitraubend ist und den Ertrag des Geschäfts verringert und man wird auch dem geringsten Artikel umsomehr Aufmerksamkeit zu widmen geneigt sein, je größer sein Absatz ist. **Man spare im Kleinsten, so wird es im Großen nicht fehlen.**

Es giebt überall Handwerker, nicht allein in den Orten, wo sich Gewerbeschulen befinden. Namentlich von dem städtischen Lehrer kann das Publikum fordern, daß er an der Fortbildungsschule sich betheilige. Will er junge Handwerker mit Blumen-, Frucht- und Thierstücken, sowie mit Landschaften regaliren, so wird man ihm wenig Dank wissen. Daraus ergiebt sich, daß auch die Seminarien für Stadtschullehrer im Zeichnen nach einem bestimmten

Plane arbeiten müßten. Wir empfehlen auch den Seminarien für Stadtschulen die Fabrikatensammlungen dringend.

Spätere Programme werden uns vielleicht Gelegenheit geben, über die weitere Entwickelung eines Unternehmens zu berichten, welches wir, erfüllt mit dem lebhaftesten Interesse für die Blüthe des Vaterlandes, in dem festen Glauben begonnen haben, daß Gewinnsucht und Eigennutz noch nicht alle Kreise der Gesellschaft verpestet haben. Unsere bisherigen Erfahrungen haben diesen Glauben befestigt.

Wie vor einem Jahre den Gewerbeschulen, so rufen wir heute den Handwerker-Fortbildungsschulen ein herzliches Glückauf zu.

Jehme.

Nachrichten über die Provinzial-Gewerbeschule zu Hagen.

I. Unterricht.

Seit dem 1. October v. J. wurde der Unterricht in aller Strenge nach den Bestimmungen von §. 4 des Organisationsplans vom 5. Juni v. J. ertheilt.

Erste Klasse.

Winter-Semester.

1) Buchstabenrechnung und Trigonometrie, wöchentlich 3 Stunden. Die Gleichungen des 1. Grades mit mehren unbekannten Größen. Die Gleichungen des 2. Grades. Die arithmetischen und geometrischen Progressionen. Die Rechnung mit Logarithmen. — Die bezüglichen Abschnitte aus der Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von E. Heis wurden durchgerechnet.

Trigonometrie nach eignem Vortrag. Repetition nach dem Lehrbuche der Geometrie von F. Wolff. Lösung vieler Aufgaben.

2) Stereometrie, beschreibende Geometrie. 3 Stunden. Flächenstereometrie nach dem Lehrbuche der Geometrie von F. Wolff.

Beschreibende Geometrie nach der beschreib. Geomet
von F. Wolff.

Berechnung der Körper nach verschiedenen Methoden. R
petition der Körperstereometrie nach dem Lehrbuche der G
ometrie von F. Wolff.

3) Praktisches Rechnen. 2 Stunden. Die Rechnungsart
des gewöhnlichen Lebens.

4) Mechanik und Maschinenlehre.*) Winter- und So
mer-Semester, 3 Stunden.

Die einfache Bewegung. Die gleichförmige und u
gleichförmige Bewegung. Experimente mit der Fallmaschi
Aufstellung der Gesetze zu den Beobachtungen. Graphis
Darstellung der Gesetze durch Geschwindigkeitscurven. Unte
schied dieser Curven, je nachdem sie eine rapid oder allmäl
beschleunigte oder verzögerte Bewegung bildlich wiedergebe
Beurtheilung der wesentlichsten Formeln der Resultate a
dem Maschinenbau von F. Redtenbacher mit Rücksi
auf die bildliche Darstellung der Gesetze durch Curven. W
lassen sich Zahlentabellen der Maschinenwerkstätten in kur
Formeln concentriren.

Die einfache Kraft. Abhängigkeit der Bewegung v
der Kraft. Begriff der Masse eines Körpers. Experimen
mit der Fallmaschine. Welche Bewegungen erfolgen, we
das Uebergewicht constant bleibt, oder wenn es wächst, od
allmälig abnimmt und endlich negativ wird. Unterschi
zwischen einer momentan und continuirlich wirkenden Kra
mit Rücksicht auf die Geschwindigkeit der resultirenden B
wegung. Nochmalige Betrachtung der Geschwindigkeitscurv
mit Rücksicht auf die Kraft. Charakteristik der drei Bew
gungsperioden einer Maschine: Anlauf, Beharrungszustan
Endlauf.

Hauptgesetz für den Beharrungszustand. Unterschied zw
schen Gleichgewicht der Kräfte in der Ruhe und in der B
wegung. —

Die zusammengesetzte Bewegung. Die einfachen B
wegungen sind gleichförmige oder ungleichförmige; die B
wegungsrichtungen fallen zusammen oder bilden einen Wink
Uebergang zu dem Parallelogramm der Kräfte.

Zusammensetzung und Zerlegung der Kräfte. E
greifen in einem Punkte an und ihre Richtungen fallen
eine Ebene oder nicht. Sie greifen in mehren Punkten
und die Richtungen fallen in eine Ebene. Satz der statisch
Momente. Verschiebung der Kräfte. Die Richtungen fal

*) Anmerkung. Man wolle die ausführlichere Darstellung dieses U
terrichtsganges als Beitrag zur zweiten Abhandlung dieses Programm
ansehen. —

nicht in eine Ebene. Gleichgewichtsbedingung in Bezug auf Drehung um eine Grade. Die parallelen Kräfte. Kräftepaare und ihre Wirkung an freibeweglichen und festgehaltenen Körpern. Mittelpunkt der Kräfte. Dieser Abschnitt wurde mit steter Unterscheidung von Intensität, Lage und Richtung der Kräfte behandelt.

Wirkung der Kräfte an Körpern mit spezieller Rücksicht auf ihre materielle Constitution.

Dichtigkeit, spezifisches Gewicht; bestimmter Ausdruck für die Masse eines Körpers.

Die Gesetze der Reibung.

Gleichgewichtsbedingungen der Kräfte an den theoretischen Organen.

Hebel. Verschiedene Arten desselben. Druck, den die Zapfen auszuhalten haben. Discussion des allgemeinsten Hebels.

Rolle. Die lose und feste Rolle. Die Flaschenzüge.

Rad an der Welle. Zapfendruck, je nachdem die Seilrichtungen verschiedene Winkel bilden. Discussion des allgemeinsten Falls. Der Konus. Die Räderübersetzungen.

Schiefe Ebene. Discussion des allgemeinsten Falles mit Rücksicht auf die Reibung.

Der Keil.

Die Schraube.

Die Lehre von den Wirkungsgrößen, dem Effekt, der Pferdekraft, zunächst an den theoretischen Organen erläutert.

Von hier ab wurde die angewandte Mechanik getrennt von der theoretischen behandelt.

Die theoretische Mechanik: Vom Schwerpunkt. Gleichgewicht festgehaltener und unterstützter Körper. Von dem Trägheitsmoment. Von der Centrifugalkraft. Vom Stoß.

Die angewandte Mechanik, im Allgemeinen nach den Resultaten von F. Redtenbacher.

Construction der wesentlichsten krummen Linien. Kegelschnitte, Cycloiden, Evolventen ꝛc.

Construction der wesentlichsten Verzahnungen. Geometrische Erfüllung der Hauptbedingung „die Zahnräder müssen sich so bewegen, als rollten die Theilkreise aufeinander."

Die Bewegungsmechanismen. Verwandlung einer Fundamentalbewegung in eine andere. Zerlegung einzelner Maschinen in die Bewegungsmechanismen mit besonderer Rücksicht auf die geometrische Bedingung, welche sie erfüllen ꝛc.

Die Festigkeit der Materialien. Namentlich die respective Festigkeit mit Rücksicht auf verschiedene Querschnitte. Formen stabförmiger Körper, welche in allen Querschnitten

gleichmäßig in Anspruch genommen sind, je nachdem diese Querschnitte geometrisch ähnlich sind, oder nicht. Annäherungsformen.

Construction der angewandten Organe.

Die Constructionen wurden in den Zeichnenstunden in großem Maaßstabe ausgeführt.

5) Physik. 2 Stunden. (Winter- und Sommer-Semester.) Wiederholung des Pensums der 2. Klasse. Die Aufgaben der Physik von Fliedner wurden größtentheils durchgerechnet. Mündliche Uebungen in der Beschreibung der Apparate, nach den Figurentafeln zu Grothes Physik.

6) Chemie. 2 Stunden (Winter- und Sommer-Semester) Repetition des Pensums der 2. Klasse. Chemische Technologie nach R. Wagner.

7) Mineralogie. 2 Stunden (Winter- und Sommer-Semester.)

8) Bauconstructionslehre. 3 Stunden (Winter- und Sommer-Semester.) Der Umfang, in welchem sie gelehrt wurde, bestimmte sich nach dem Reglement über die Prüfung der Bauhandwerker. Vortrag nach einem gedruckten Heft von W. Mannstaedt.

9) Zeichnen und Modelliren. 16 Stunden (Winter- und Sommer-Semester.) Zeichnen nach Vorbildern für Maschinenwesen, Architectur und bildende Kunst. Situationszeichnen nach der Lehmann'schen Methode. Construction der einzelnen Maschinentheile nach Aufgaben von W. Zehme. Aufnahme von Dampfmaschinen und Gebäuden. Entwerfen ganzer Gebäude und deren Veranschlagung. Modelliren in Gyps. —

Sommer-Semester.

Fortsetzung der beschreibenden Geometrie. Kegelschnitte (synthetisch behandelt) 3 Stunden.

Anwendung der Algebra und Trigonometrie zur Lösung planimetrischer und stereometrischer Aufgaben. 3 Stunden. Nach dem Lehrbuche der Geometrie von F. Wolff.

Praktisches Rechnen. 2 Stunden. Wurzelausziehungen logarithmisches Rechnen, Körperberechnungen. Nach der Aufgabensammlung von E. Heis.

Mechanik, Physik, Chemie, Mineralogie, Bauconstructionslehre, Zeichnen, Modelliren, siehe oben Winter-Semester.

Zweite Klasse.

Sommer- und Winter-Semester.

1) Planimetrie. 4 St. Nach Lehrbuch und Repetitionsta

feln der ebenen Geometrie von W. Zehme. Constructionen nach dem Lehrbuch der Geometrie von F. Wolff. 1. Theil. 9. Kapitel.

2) Zahlenlehre. Buchstabenrechnung. 4 St. Die Hauptrechnungsarten angewendet auf einfache und zusammengesetzte Größen. Gebrauch der Klammern. Die Hauptrechnungsarten mit Potenzen und Wurzeln. Reductionen. Die Gleichungen des 1. Grades mit einer und mehren Unbekannten. Lösung sehr vieler Aufgaben nach der Sammlung von Aufgaben und Beispielen aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra von E. Heis.

3) Praktisches Rechnen. 3 St. Die gewöhnliche Arithmetik mit vielen Aufgaben des praktischen Rechnens.

4) Physik. 4 St. Die statischen und mechanischen Gesetze wurden in dieser Klasse übergangen. Einleitung in die Physik. Die festen Körper: Dichtigkeit (Bestimmung des spezifischen Gewichts), Dehnbarkeit, Elasticität, Festigkeit, Sprödigkeit, Struktur (Krystallisation). Die flüssigen Körper: Dichtigkeit, Zusammendrückbarkeit, Gleichgewicht in Gefäßen und communicirenden Röhren, Druck auf die Wände des Gefäßes, Kapillarität, Endosmose. Die luftförmigen Körper: Elasticität, Dichtigkeit, Barometer, Mariotte'sches Gesetz, Luftpumpe, Mischungsgesetz, Absorption durch Flüssigkeiten und feste Körper. — Akustik. — Die Lehre von den Imponderabilien, welchen der größte Theil der Zeit gewidmet wurde.

5) Chemie. 4 St. Anorganische Chemie. Die organische Chemie nur mit Rücksicht auf besondere technische Zwecke. Die Processe wurden mit Hilfe der chemischen Zeichensprache erläutert. Vollkommene Sicherheit im Gebrauche derselben wurde den Schülern als unerläßliche Bedingung für den Eintritt in die 1. Klasse bezeichnet.

6) Zeichnen. 16 St. Handzeichnen nach freien Entwürfen des Lehrers an der Wandtafel, später nach dergleichen Zeichnungen einzelner Schüler und zuletzt nach guten Vorlegeblättern. Linearzeichnen nach planimetrischen und stereometrischen Constructionen des Lehrers an der Wandtafel und Projectionen einfacher und zusammengesetzter Körper in verschiedenen Lagen. Zeichnen einzelner Maschinentheile nach Vorlegeblätttern von Le Blanc und Redtenbacher, sowie nach Vorlegeblättern für Maurer und Zimmerleute u. s. w. Modelliren in Gyps.

Den wissenschaftlichen Unterricht in der 1. Klasse ertheilt der Dr. Zehme, in der 2. Klasse der Lehrer Grundmann. Den

Unterricht im Zeichnen, Modelliren und in der Bauconstructionslehre der Lehrer Mannstaedt.

Wie erwähnt, richtete sich der Unterricht nach den Bestimmungen des neuen Plans, nach welchen die obere Klasse in einen organischen Zusammenhang mit der untern gesetzt, die Zahl der Lehrgegenstände aber um einige vermehrt wurde. Außer den bisherigen Unterrichtsgegenständen wurde die Mineralogie, die beschreibende Geometrie und die Lehre von den Kegelschnitten vorgetragen, die Mechanik aber ausführlicher behandelt als früher. Das geringere Pensum der 1. Klasse wurde in früheren Jahren in einem zweijährigen Cursus und in zwei Abtheilungen der 1. Klasse durchgenommen, während gegenwärtig das größere in einem Jahre absolvirt werden muß.

Die Aufnahme der Zöglinge in die untere Klasse der Gewerbeschule ist an folgende Bedingungen geknüpft:

1) daß der Aufzunehmende mindestens 14 Jahr alt sei;
2) daß er nicht bloß deutsch geläufig lesen, sondern auch durch Lesen eines seinem Gesichtskreise entsprechenden Buches sich unterrichten könne;
3) daß er deutsch ohne grobe orthographische Fehler zu schreiben verstehe und eine leserliche Handschrift besitze;
4) daß er mit ganzen Zahlen und gewöhnlichen Brüchen geläufig rechnen könne und die Anwendung dieser Rechnungen auf die gewöhnlichen arithmetischen Aufgaben kenne, sowie daß er ebene gradlinige Figuren und prismatische Körper praktisch auszumessen wisse;
5) daß er Uebung im Zeichnen besitze.

Junge Handwerker, welche keinen anderen als elementaren Unterricht genossen haben und in die Provinzial-Gewerbeschule eintreten wollen, können ihre Vorbildung durch den Besuch einer Handwerker-Fortbildungsschule vervollständigen, welche demnächst eingerichtet und mit der Gewerbeschule verbunden werden soll.

Für andere junge Leute wird der Besuch einer gut eingerichteten höheren Bürger- oder Stadtschule oder eines Gymnasiums genügen. Auch soll vom 1. October c. ab mit der Gewerbeschule eine Vorbereitungsklasse verbunden werden, welche nur als eine höhere Elementarschule und nicht als ein Theil der Gewerbeschule behandelt werden wird; sie wird ein in sich abgegrenztes Pensum haben, welches das der Gewerbeschule nicht zum Theil anticipirt, so daß sie auch solchen, welche die letztere nicht zu besuchen beabsichtigen, nützlich werden kann.

Der Uebergang von der untern Klasse der Gewerbeschule in die obere findet auf Grund einer sorgfältigen

Prüfung statt, welche sich auf alle Gegenstände des Unterrichts der untern Klasse erstreckt. Zöglingen, welche diese Prüfung nicht bestehen, ist die einmalige Wiederholung der untern Klasse und der Prüfung gestattet. Schüler von anderen Lehranstalten können auf Grund der durch dieselbe Prüfung nachgewiesenen Reife unmittelbar zu der obern Klasse zugelassen werden.

Der Cursus in jeder der beiden Klassen ist einjährig und beginnt am 1. October jeden Jahres. Der Eintritt in die obern Klassen zu Ostern ist gegenwärtig nur ausnahmsweise und später gar nicht gestattet. Ueber die Entlassungsprüfung der Gewerbeschule vergleiche Verordnungen über die Organisation des Gewerbeschulwesens in Preußen. Berlin 1850.

Für Logis, Kost, Heizung ꝛc. zahlen die Schüler ihren Wirthen durchschnittlich 100 bis 120 Thlr., einzelne weniger, andere bis 150 Thlr. — Das Schulgeld beträgt jährlich 15 Thlr.

II. Chronik.

Im März c. trat Herr C. W. Lenzmann aus dem Curatorium der Gewerbeschule, und im April c. Herr C. Elbers sen. Beiden Herren bezeugte das Curatorium sein lebhaftes Bedauern über den Austritt. Namentlich gebührt dem regen Interesse des Herrn C. Elbers für die Schule, sowie seinem steten Eifer in der Führung der Geschäfte als Vorsitzender des Curatoriums, die vollste Anerkennung.

Durch eine Verfügung der Königl. Regierung vom 2. April c. ging das Präsidium des Curatoriums auf den Landrath Herrn v. Holzbrinck über.

Die Schule wurde zu wiederholten Malen von Commissaren der Königl. Regierung zu Arnsberg revidirt.

Das Inventar der Schule wurde auch im verflossenen Schuljahre theils durch das Königliche Ministerium, theils durch die Mittel der Schul-Kasse, endlich durch zahlreiche Schenkungen von Privaten (vergleiche Seite 17 u. 18 dieses Programms) erweitert und im Stande gehalten. Im Namen der Gewerbeschule sprechen wir nochmals den innigsten Dank für die freundlichen Gaben aus.

III. Statistik.

Personal, welches mit der Schule in Verbindung steht.

Die Curatoren:

1) Der Landrath Herr von Holzbrinck.
2) Herr C. Hesterberg.
3) Herr C. Pechem.
4) Herr Pastor Florschütz.
5) Der Dir. Dr. Zehme.

Die Lehrer:

1) Dr. Zehme, Dir. und Lehrer der Physik, Chemie, Mechanik und Mathematik.
2) Herr Grundmann, Lehrer der Physik, Chemie und Mathematik.
3) Herr Mannstädt, Lehrer im Zeichnen, Modelliren und den Bauwissenschaften.

Der Rendant der Schule:
Herr Sparkassen-Rendant Schürmann.

Die Schüler.

Erste Klasse:

1) Carl Lindemann, aus Kückelhausen.
* 2) Eduard Müller, aus Berleburg.
3) Julius Reinhard, aus Neuwied.
4) Carl Westhoff, aus Soest.
* 5) August Ibing, aus Wengern.
6) Oscar Wassermann, aus Rennebaum.
* 7) August Hermanni, aus Dortmund.
* 8) Ewald Schüller, aus Jauer.
9) Leopold Schulz, aus Neuwied.
10) Wilhelm Mannstädt, aus Hagen.
*11) Ewald Franzen, aus Hagen.
12) Julius Herberholz, aus Herbede.
13) Wilhelm Kauermann, aus Westerbauer.
14) Wilhelm Wilmsmann, aus Hörde.
15) Heinr. Frackmann, aus Iserlohn.
16) Christian Stellberg, aus Gimborn.
17) Joseph Wagner, aus Friedberg.
* 18) Hubert Wolff, aus Ratingen.
19) Carl Lindner, aus Ende.
20) Friedr. Heubing, aus Westerbauer.
* 21) Christian Mücher, aus Sundwig.
* 22) Ernst Stöter-Tillmann, aus Sprockhövel.
23) Ludwig Fischer, aus Werdohl.
*24) Carl Brand, aus Wittenberg.
25) Heinrich Spelten, aus Iserlohn.
26) Paul Schaberg, aus Hagen.
*27) Friedrich Dahlhaus, aus Hagen.
*28) Anton Finke, aus Blintrop.
29) Conrad Dewies, aus Brüggen.
30) Heinr. Jacobi I, aus Sterkrade.
31) Karl Lueg, aus Sterkrade.
32) Friedrich Eckart, aus Eilpe.
33) Wilh. Schumacher, aus Lüdenscheid.
*34) Heinr. Hagemann, aus Dortmund.
35) Heinrich Poth, aus Herbede.
36) Heinr. Brügmann, aus Dortmund.
37) Ferd. Overbeck, aus Lüdenscheidt.
*38) Wilhelm Berkenhoff, aus Altena.
*39) Bernhard Rath, aus Eckesey.
40) Hermann Webers, aus Münster.
41) William Roddewig, aus Westerbauer.
42) Joseph Biesenbach, aus Wipperfürth, wurde im Nov. v. J. zum Militär eingezogen.
*43) Jul. Kannegießer, aus Herdecke.
*44) Gust. Kirchhof, aus Oese bei Hemer.
45) Wilh. Grollmann, aus Eppendorf.

Zweite Klasse:

1) Friedrich Lange, aus Boele.
2) Friedrich Brüning, aus Lünen.
3) Karl Stämmler, aus Sundwig.
4) Gustav Baerst, aus Herdecke.
5) Heinr. Bettermann, aus Eppenhausen.
6) Friedr. Külpmann, aus Bathey bei Boele.
7) Hugo Jacobi II, aus Sterkrade.
8) Karl Harkort, aus Wetter.
9) Louis Blumberg, aus Oberhausen bei Sterkrade.

10) Franz Forsbach, aus Mülheim am Rhein.
* 11) Wilh. Langenscheid, aus Altena.
12) Heinr. Weißpfenning, aus Dortmund.
* 13) Ludwig Schmitz, aus Dortmund.
14) Ludwig Schürmann, aus Iserlohn.
15) Karl Pütter, aus Wehringhausen.
* 16) Wilh. Peters, aus Kückelhausen.
* 17) Robert Grevel, aus Hagen.
* 18) Heinrich Hesse, aus Hattingen.
19) Julius Niggemann, aus Wetter.
20) Carl Steinhaus, aus Voerde.
* 21) Wilhelm Richter, aus Harpen.
22) Ludwig Schmidt I, aus Hagen.
23) Friedr. Frink, aus Barmen.
24) Gustav Bauer, aus Barmen.
* 25) August Schulte, aus der Selbecke.
26) Johann Schlösser, aus Ratingen.
27) Hermann Vorster, aus Eilpe.
28) Hugo Schale, aus Wickrath.
29) Fridolin Quincke, aus Iserlohn.
30) Ernst Mohl, aus Barmen.
* 31) August Bierhaus I, aus Grumme bei Bochum.
* 32) Heinr. Bierhaus II, aus Bochum.
* 33) Fried. Ellinghaus, aus Ellinghausen.
* 34) Bernh. Schlinkert, aus Meschede.
* 35) Wilh. Hasselkuß, aus Bochum.
* 36) August Reuter, aus Blomberg.
37) Peter Becher, aus Höhscheid.
38) August Stockfisch, aus Westenfeld.
† 39) Carl von Beughem, aus Essen.
† 40) Gustav Schlünder, aus Wimbern.
† 41) Theodor Geneke, aus Heiminghausen.
† 42) Hermann Schmidt II, aus Hagen.
† 43) Aug. Hethey, aus Bommern.
† 44) Mathias Reuland, aus Eschweiler.
† 45) Wilh. Deidtenbeck, aus Limburg.
† 46) Ferd. Gieben, aus Hagen.
† 47) Aug. Dahlhaus, aus Hagen.
† 48) Ernst Schmidts, aus Hagen.
† 49) Ernst Schmidt III, aus Voerde.
† 50) August Schmidt IV, aus Hagen.
† 51) Norbert Goldammer, aus Mühlheim a. d. Ruhr.

Im März c. mußten drei Schüler wegen wiederholter Ungesetzlichkeiten von der Schule entlassen werden.

Die mit * bezeichneten Schüler gingen im März c. ab, und werden theilweise nach beendeter praktischer Sommerarbeit zu Michaelis c. auf die Schule zurückkehren.

Die mit † bezeichneten wurden zu Ostern c. aufgenommen.

Schülerzahl.

Im October 1850: 83. Davon gingen ab Ostern 1851: 31.
Es traten dazu Ostern 1851: 13.

Die Schulprüfung findet Freitag den 29. August c. statt.
Die Gegenstände derselben sind:

1. Klasse, 9—12 Uhr

Algebra, Kegelschnitte, Bauconstructionslehre, Physik, Maschinenlehre.

2. Klasse, 2—5 Uhr

Algebra, Physik, Chemie, Geometrie.

Auf den Antrag des Curatoriums und nachdem Probezeichnungen und schriftliche Arbeiten sämmtlicher Zöglinge der obern Klasse der Königlichen Regierung eingereicht worden waren, gestattete der Herr Minister für Handel ꝛc. die Abhaltung einer ersten Entlassungsprüfung auf der hiesigen Provinzial-Gewerbeschule. Die schriftlichen Prüfungsarbeiten bestanden in einem deutschen Aufsatze, in der Bearbeitung von vier mathematischen Aufgaben, eines Themas der Physik, Chemie und Mechanik.

Die mündliche Prüfung wurde am 20. und 21. August durch eine Königliche Prüfungs-Commission abgehalten, bestehend aus dem Königl. Ministerial-Commissar Herrn Direktor Dr. Druckenmüller von Berlin, dem Königl. Regierungs-Commissar, Herrn Regierungsrath Jacobi von Arnsberg, aus einem von der Königl. Regierung ernannten Mitgliede des Curatoriums, Herrn Pastor Florschütz, dem Dir. Zehme und den beiden anderen Lehrern, Herrn Grundmann und Herrn Mannstaedt. Es hatten sich zwölf Zöglinge der Prüfung unterzogen.

Die Königliche Prüfungs-Commission erkannte **das Zeugniß der Reife** folgenden Zöglingen zu, und zwar:

Dem Hermann Webers aus Münster und
„ Carl Lindner aus Ende
das Prädikat: **mit Auszeichnung** bestanden. —

Dem Carl Lindemann aus Kückelhausen,
„ Ludwig Fischer aus Werdohl,
„ Carl Lueg aus Sterkrade und
„ Wilhelm Kauermann aus Westerbauer
das Prädikat: **gut** bestanden. —

Dem Heinrich Poth aus Herbede,
„ Wilhelm Schumacher aus Lüdenscheidt,
„ Oscar Wassermann aus Sprockhövel und
„ Friedrich Eckart aus Eilpe
das Prädikat: **hinreichend** bestanden.

Zehme.

K. Oberrealschule Ravensburg.

Beispiele zur Differential- und Integral-Rechnung aus dem Gebiete der Physik.

Zusammengestellt von
Professor **BEISCHER.**

□□□

Wissenschaftliche Beilage zum Jahresbericht für das Schuljahr 1908/09.

FR. P. ZITTRELL, RAVENSBURG.

Vorwort.

In unseren württembergischen Oberrealschulen ist die Differential- und Integralrechnung in der obersten Klasse Pflichtfach. Die vorliegende Zusammenstellung von Beispielen zur Differential- und Integralrechnung aus dem Gebiet der Physik soll dazu beitragen, den Zusammenhang zwischen den beiden Fächern inniger zu gestalten und zugleich die Physik von der Behandlung mancher Aufgaben zu entlasten, die vorwiegend mathematischer Natur sind.

Ravensburg, Juli 1909.

Professor **Beischer.**

Inhalt.

§ 1. Gleichförmige und ungleichförmige geradlinige Bewegungen.
§ 2. Kraft, Arbeit und Wucht; einfache Beispiele für Arbeitsleistungen.
§ 3. Fallbewegungen.
1) Geradlinige Fallbewegungen.
2) Wagrechter Wurf.
3) Schiefer Wurf; Einhüllende der Wurfparabeln.
§ 4. Gleichförmige Kreisbewegung und harmonische Bewegung.
Beispiele:
1) Vertikale Schwingungen eines an einer elastischen Feder befestigten Gewich
2) Schwingungen einer Flüssigkeit in einer U-förmigen Röhre.
3) Pendelbewegung.
§ 5. Schwerkraft, Potential, Potential einer Kugel.
§ 6. Magnetische Kraft des elektrischen Stromes.
§ 7. Die Exponentialfunktion und die logarithmische Funktion.
Beispiele:
1) Oberfläche einer um eine vertikale Achse rotierenden Flüssigkeit.
2) Entladung eines elektrischen Kondensators durch einen großen Widerstar
3) Selbstinduktion, Stromschluß und Stromöffnung.
4) Hypsometrische Formel bei konstanter Temperatur der Luft.
5) Arbeit bei isothermer Zusammendrückung und Ausdehnung eines Gases.
§ 8. Adiabatische Zustandsänderung eines Gases.
Beispiele:
1) Hypsometrische Formel bei adiabatischer Zustandsänderung trockener Luf
2) Arbeit bei adiabatischer Zusammendrückung und Ausdehnung eines Gas
§ 9. Beispiele für Maxima und Minima.
1) Maximum der Stromstärke einer Batterie.
2) Maximum der Energieentwicklung eines Elements.
3) Minimum der Fortleitungskosten eines elektrischen Stromes.
4) Minimum des Fehlers bei Bestimmung der Stromstärke mit Hilfe d
Tangentenbussole.
5) Minimum des Fehlers bei der Widerstandsbestimmung in der Wheatsto
schen Brücke.
6) Maximum der Beleuchtungsstärke.
7) Ableitung des Reflexionsgesetzes aus dem Prinzip von Fermat.
8) Ableitung des Brechungsgesetzes aus dem Prinzip von Fermat.
9) Minimum der Ablenkung beim Durchgang eines Lichtstrahls durch ein Pris
10) Theorie des Regenbogens nach Descartes.

§ 1. Gleichförmige und ungleichförmige geradlinige Bewegungen.

Gleichförmige Bewegung: Ein Punkt, der in gleichförmiger Bewegung begriffen ist, legt in gleichen Zeiten gleiche Wege zurück, selbst wenn die Zeiten beliebig klein angenommen werden. Seine Geschwindigkeit c ist das Verhältnis der Wegzunahme Δs zu der hiezu notwendigen Zeit Δt

$$c = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Sie ist konstant, selbst wenn Δt und Δs sehr klein angenommen werden. Bezeichnet ds einen sehr kleinen Weg, der in der sehr kleinen Zeit dt zurückgelegt wird, so gilt auch

$$\frac{ds}{dt} = c$$

Ungleichförmige Bewegung: Eine ungleichförmige Bewegung ist eine solche, bei der in gleichen Zeiten ungleiche Wege zurückgelegt werden. Ein Punkt lege in den aufeinanderfolgenden Zeitteilchen Δt_1, Δt_2, Δt_3, ... die Wegteilchen Δs_1, Δs_2, Δs_3, ... in ungleichförmiger Bewegung zurück. Man kann sich nun einen zweiten Punkt denken, der während derselben Zeitteilchen Δt_1, Δt_2, Δt_3 . . . . . dieselben Wegteilchen Δs_1, Δs_2, Δs_3 . . . . . zurücklegt, aber nicht in ungleichförmiger, sondern in gleichförmiger Bewegung. Dieser zweite Punkt wird dann zu Anfang und Ende jedes Zeitteilchens mit dem ersten übereinstimmen, während die beiden Punkte sonst von einander abweichen werden. Die Geschwindigkeiten des zweiten Punktes $\frac{\Delta s_1}{\Delta t_1}$, $\frac{\Delta s_2}{\Delta t_2}$, $\frac{\Delta s_3}{\Delta t_3}$ . . . . . ändern sich von Zeitteilchen zu Zeitteilchen, sodaß die Bewegung des zweiten Punktes aus lauter gleichförmigen Bewegungen mit verschiedener Geschwindigkeit besteht. Je kleiner die Zeitteilchen angenommen werden, umsomehr stimmt die Bewegung des zweiten Punkts mit der des ersten überein. Bei sehr kleinen Zeitteilchen strebt dann die Geschwindigkeit $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ einem Grenzwert $v = \frac{ds}{dt}$ zu, den man als die Geschwindigkeit der ungleichförmigen Bewegung zu Anfang des Zeitteilchens dt bezeichnet.

Die Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ ist also der erste Differentialquotient des Wegs nach der Zeit.

Die Geschwindigkeit v einer ungleichförmigen Bewegung ände sich mit der Zeit t. Wächst v mit t, so heißt die Bewegung eine be schleunigte, nimmt v ab mit wachsendem t, so heißt die Bewegung ein verzögerte.

Gleichförmig beschleunigte Bewegung: Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung nimmt die Geschwindigkeit in gleichen Zeite um gleich viel zu, selbst wenn die Zeiten sehr klein angenommen werden

Unter der Beschleunigung b einer gleichförmig beschleunigten Be wegung versteht man das Verhältnis der Geschwindigkeitszunahme Δv zu der Zeit Δt, in der sie erfolgte, also

$$b = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Bei der gleichförmig beschleunigten Bewegung ist die Beschleunigung konstant, selbst wenn Δt und Δv noch so klein angenommen werden Bezeichnet man mit dv die Geschwindigkeitszunahme in der sehr kleine Zeit dt, so gilt auch

$$b = \frac{dv}{dt}.$$

Ungleichförmig beschleunigte Bewegung. Dabei sind die Ge schwindigkeitszunahmen in gleichen Zeiten ungleich. Man versteht unte der Beschleunigung w einer solchen Bewegung den Grenzwert, dem sich die Größe $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ nähert, wenn Δt und Δv kleiner und kleiner werden Diesen Grenzwert bezeichnet man mit

$$w = \frac{dv}{dt}.$$

Setzt man den Wert $v = \frac{ds}{dt}$ in diese Gleichung ein, so ergibt sich

$$w = \frac{dv}{dt} = \frac{d\,\frac{ds}{dt}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

d. h. die Beschleunigung ist der zweite Differentialquotient de Wegs nach der Zeit.

---

§ 2. Kraft, Arbeit und Wucht.

Ist die Masse eines Körpers m, seine Beschleunigung w, so ist di auf ihn wirksame Kraft definiert durch die Gleichung:

$$P = m \cdot w = m\frac{d^2s}{dt^2}.$$

Die von der Kraft P längs der sehr kleinen Wegstrecke ds geleistet Arbeit dA ist definiert durch die Gleichung

$$dA = P \cdot ds = m\,w\,ds = m\frac{d^2s}{dt^2}\,ds.$$

Dabei ist vorausgesetzt, daß P und ds die gleiche Richtung haben.

Ist in einem beliebigen Augenblick der von dem Körper zurückgelegte Weg s_0, seine Geschwindigkeit v_0, nach einer gewissen Zeit der zurückgelegte Weg s und die Geschwindigkeit v, so ist die auf dem Weg $s - s_0$ geleistete Arbeit

$$A = \int_{s_0}^{s} P \cdot ds = \int_{s_0}^{s} m\, w\, ds = \int_{s_0}^{s} m \frac{dv}{dt} ds$$

$$= \int_{s_0}^{s} m \cdot dv \frac{ds}{dt} = \int_{v_0}^{v} m\, v\, dv = \frac{m\, v^2}{2} - \frac{m\, v_0^2}{2}$$

Das Produkt $\frac{m\, v^2}{2}$ heißt die Wucht des Körpers.

Satz: Die geleistete Arbeit ist gleich der Zunahme der Wucht des Körpers.

Einfache Beispiele für Arbeitsleistungen.

1. Arbeit beim Heben eines Vorhangs von der Breite b und der Höhe h.

Beträgt das Gewicht der Flächeneinheit des Vorhangs s, so ist das Gewicht eines horizontalen Streifens von der Höhe dx im Abstand x von der oberen Seite des Vorhangs $b \cdot dx \cdot s$. Die Arbeit zum Heben dieses Streifens ist

$$dA = b \cdot dx \cdot s \cdot x.$$

Die Arbeit zum Heben des ganzen Vorhangs ist also

$$A = \int_0^h b \cdot s\, x dx = b\, s \cdot \frac{h^2}{2} = P \cdot \frac{h}{2}$$

wobei $P = b\, s \cdot h$ das Gesamtgewicht des Vorhangs bedeutet.

2. Arbeit beim Vollpumpen eines prismatischen Gefässes von der Grundfläche G und der Höhe h durch eine Öffnung im Boden.

Beträgt das spezifische Gewicht der Flüssigkeit s, so ist das Gewicht einer wagrechten Flüssigkeitsschicht von der Höhe dx im Abstand x vom Boden $G \cdot dx \cdot s$. Die Arbeit zum Heben dieser Schicht vom Boden auf die Höhe x ist

$$dA = G \cdot dx \cdot s \cdot x$$

Die Gesamtarbeit zum Füllen des Gefässes beträgt also

$$A = \int_0^h G \cdot s \cdot x\, dx = G \cdot s \frac{h^2}{2} = P \frac{h}{2}$$

wo P das Gesamtgewicht der Flüssigkeit bedeutet.

3. Arbeit zur Spannung einer Spiralfeder. Bei der Spannung der Feder ist in jedem Augenblick die spannende Kraft K der Verlängerung v der Feder proportional, also $K = C \cdot v$, wo C eine

Konstante ist. Die Arbeit zur Verlängerung der Feder um den Betrag dv ist also

$$dA = K\,dv = C\,.\,v\,dv.$$

Beträgt die Gesamtverlängerung der Feder V, und ist die Feder ursprünglich ungespannt, so ist die zur Spannung notwendige Arbeit

$$A = \int_0^V C\,v\,dv = C\,\frac{V^2}{2} = \frac{1}{2}\,K_1\,V$$

wobei $K_1 = C\,.\,V$ die größte spannende Kraft bedeutet.

4. Arbeit zur Ladung eines Leiters mit der Elektrizitätsmenge E auf das Potential V.

Hat der Leiter von der Kapazität K in einem bestimmten Augenblick während der Ladung das Potential v und die Elektrizitätsmenge e, so ist die Arbeit zur Ladung mit der weiteren Elektrizitätsmenge de

$$dA = v\,.\,de = \frac{e}{K}\,de.$$

Folglich die Gesamtarbeit zur Ladung des Leiters

$$A = \int_0^E \frac{e}{K}\,de = \frac{E^2}{2K} = \frac{V\,.\,E}{2}.$$

---

§ 3. Fallbewegungen.

1. Geradlinige Fallbewegungen.

Fällt ein Körper aus der Ruhelage frei oder auf einer schiefen Ebene, so sind die zurückgelegten Wege den Quadraten der Fallzeiten proportional. Sind s und s_1 die während der Zeiten t und t_1 zurückgelegten Wege, so gilt $s = a\,t^2$

$s_1 = a\,t_1^{\,2}$, wobei a eine Konstante bedeutet.

Während der Zeit $\Delta t = t_1 - t$ hat also der Weg zugenommen um

$$\Delta s = s_1 - s = a\,(t_1^{\,2} - t^2).$$

Es ist also $\dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{a\,(t_1^{\,2} - t^2)}{t_1 - t} = a\,(t_1 + t) = a\,(2\,t + \Delta t).$

Der Grenzwert von $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, wenn Δt und Δs immer kleiner werden, ist

$$v = \frac{ds}{dt} = 2\,a\,t$$

Ebenso wird $w = \dfrac{dv}{dt} = 2\,a$

d. h. die Beschleunigung ist konstant, die Fallbewegung ist eine gleichförmig beschleunigte Bewegung, beim freien Fall ist die Beschleunigung $2\,a = g = 9{,}81\,\dfrac{m}{sec^2}$, also ist

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = g$$

$$dv = g\,dt.$$

Aus dieser Gleichung folgt rückwärts durch Integration

$$v = g\,t + c.$$

Für $t = o$ wird $v = c$, d. h. c bedeutet die Anfangsgeschwindigkeit.

Da $v = \frac{ds}{dt}$, so wird

$$\frac{ds}{dt} = g\,t + c$$

$$ds = g\,t\,dt + c\,dt$$

integriert $$s = \tfrac{1}{2}\,g\,t^2 + c\,t + C.$$

Für $t = o$ wird $s = C$, d. h. C bedeutet den zu Beginn der Zeitrechnung zurückgelegten Weg s_0. So wird

$$s = s_0 + c\,t + \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Vertikaler Wurf nach oben.

Die Bewegung ist eine gleichförmig verzögerte mit Verzögerung g oder mit der Beschleunigung $(-g)$, also

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -g. \quad \text{Daraus folgt}$$

$$v = c - g\,t$$

$$s = s_0 + c\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2.$$

Wird $s_0 = o$, so wird $s = c\,t - \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$.

Der Körper erreicht seine größte Höhe, d. h. s wird ein Maximum, wenn

$$v = \frac{ds}{dt} = c - g\,t = o$$

d. h. zur Zeit $T = \frac{c}{g}$.

Hieraus ergibt sich die Steighöhe

$$H = c\,T - \tfrac{1}{2}\,g\,T^2 = \tfrac{1}{2}\frac{c^2}{g}.$$

2. Wagrechter Wurf.

Die Bewegung wird zerlegt in eine wagrechte gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit c in Richtung der Xaxe und in eine vertikale, gleichförmig beschleunigte Bewegung mit Beschleunigung g in Richtung der Yaxe eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt der Ort des geworfenen Körpers zur Zeit $t = o$ ist. Befindet sich der Körper zur Zeit t in P, so sind die Koordinaten des Punkts P:

$$(1) \quad x = c\,t$$

$$(2) \quad y = \tfrac{1}{2}\,g\,t^2$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in den Axenrichtungen sind

$$v_x = \frac{dx}{dt} = c$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = g\,t.$$

Die Resultante dieser beiden Komponenten ist bestimmt durch

$$v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = c^2 + g^2 t^2$$

woraus (3) $v = \sqrt{c^2 + g^2 t^2}$

Die Richtung der Geschwindigkeit ist bestimmt durch den Richtungskoëffizienten der Bahntangente

$$(4) \quad tg\, e = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{gt}{c} = \frac{gx}{c^2}$$

d. h. der Richtungskoëffizient ist proportional der Abscisse. Diese Eigenschaft hat der Richtungskoëffizient der Parabel.

Daß die Wurfbahn eine Parabel ist, ergibt sich auch durch Elimination von t aus den Gleichungen (1) und (2) oder durch Integration der Gleichung (4).

$$\text{Aus } \frac{dy}{dx} = \frac{g\,x}{c^2} \text{ folgt}$$

$$y = \frac{g}{2\,c^2}\, x^2 + C.$$

Da für $x = o$ auch $y = o$ sein muß, so wird $C = o$, also

$$y = \frac{g}{2\,c^2}\, x^2$$

$$\text{oder } x^2 = \frac{2\,c^2}{g} \cdot y$$

d. h. die Wurfbahn ist eine Parabel, deren Axe die Yaxe und deren Parameter $\frac{c^2}{g}$ ist. Ihre Leitlinie hat vom Scheitel die Entfernung $\frac{1}{2}\,\frac{c^2}{g}$. Dies ist auch die Wurfhöhe eines vom Scheitel mit Geschwindigkeit c vertikal in die Höhe geworfenen Körpers.

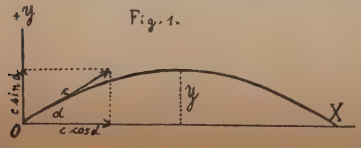
3. Schiefer Wurf.

Beim schiefen Wurf mit Anfangsgeschwindigkeit c und Höhenwinkel α zerlegt man die Bewegung in eine gleichförmige Bewegung mit Geschwindigkeit $c \cos \alpha$ in Richtung der wagrechten Xaxe und eine vertikale Wurfbewegung mit Anfangsgeschwindigkeit $c \sin \alpha$ in Richtung der Yaxe eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Ursprung der Anfangspunkt der Bewegung ist. Zur Zeit t sind dann die Koordinaten des Punkts P der Wurfbahn

$$(1) \quad x = c \cos \alpha \,.\, t$$

$$(2) \quad y = c \sin \alpha \,.\, t - \tfrac{1}{2}\, g\, t^2.$$

Die Geschwindigkeitskomponenten in den Axenrichtungen sind



$$(3) \quad \frac{dx}{dt} = c \cos \alpha$$

$$(4) \quad \frac{dy}{dt} = c \sin \alpha - g\, t$$

Die Größe der Geschwindigkeit ergibt sich aus

$$(5)\quad v^2 = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 c^2 = -2cg\sin\alpha \cdot t + g^2 t^2$$

Der Richtungskoëffizient der Geschwindigkeit ist

$$(6)\quad tg\, e = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{c\sin\alpha - g\,t}{c\cos\alpha} = tg\,\alpha - \frac{g\,x}{c^2\cos^2\alpha}$$

Durch Integration von Gleichung (6) oder durch Elimination von t aus den Gleichungen (1) und (2) folgt die Gleichung der Wurfbahn

$$(7)\quad y = x \cdot tg\,\alpha - \tfrac{1}{2}\,\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}\,x^2$$

Für $y = o$ ergibt sich aus Gleichung (2) die Wurfzeit

$$(8)\quad T = \frac{2c\sin\alpha}{g}$$

und damit aus Gleichung (1) oder auch mit $y = o$ aus Gleichung (7) die Wurfweite

$$(9)\quad X = \frac{c^2\sin 2\alpha}{g}.$$

Die größte Wurfweite ergibt sich für $\sin 2\alpha = 1$, $\alpha = 45^0$. Für die Winkel α und $(90^0 - \alpha)$ sind die Wurfweiten gleich.

Die Zeit zur Erreichung der größten Wurfhöhe Y ergibt sich aus

$$\frac{dy}{dt} = c\sin\alpha - g\,t = o.$$

Hieraus (10) $t = \dfrac{c\sin\alpha}{g} = \dfrac{T}{2}$ $\left(\text{s. Gl. (8)}\right)$

ınd damit aus (2) (11) $Y = \tfrac{1}{2}\,\dfrac{c^2\sin^2\alpha}{g}$

l. h. die Wurfhöhe ist gerade so groß wie die eines Körpers, der mit ler Geschwindigkeit $c\sin\alpha$ vertikal in die Höhe geschossen wird.

Aus (10) und (1) ergibt sich die Abscisse des höchsten Punktes

$$(12)\quad x = \frac{c^2\sin 2\alpha}{2g} = \frac{X}{2} \qquad \left(\text{s. Gl. (9)}\right).$$

ie ist halb so groß wie die Wurfweite, was auch aus Gleichung (7) olgt, wenn $\dfrac{dy}{dx} = o$ gesetzt wird.

Verschiebt man den Koordinatenursprung in den höchsten Punkt er Wurfbahn, so ergibt sich als Gleichung der Wurfbahn

$$(13)\quad y' = -\tfrac{1}{2}\,\frac{g}{c^2\cos^2\alpha}\,x'^2$$

Dies ist eine Parabel, deren Axe vertikal nach unten gerichtet ist nd deren Scheitel der höchste Punkt der Wurfbahn ist. Der absteigende st dieser Parabel fällt zusammen mit der Bahn eines Körpers, der mit

der Anfangsgeschwindigkeit $c \cos \alpha$ aus dem höchsten Punkt horizontal geworfen wird (s. wagrechter Wurf).

Einhüllende der Wurfparabeln bei Würfen mit gleichem Ausgangspunkt, konstanter Anfangsgeschwindigkeit c und veränderlichem Höhenwinkel α.

Die Gleichung einer Wurfparabel ist nach (7)

$$y = x \cdot tg\,\alpha - \tfrac{1}{2} \frac{g}{c^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

Da $\frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + tg^2 \alpha$, so wird, wenn man $tg\,\alpha = z$ setzt,

$$(14) \quad y = x \cdot z - \tfrac{1}{2} \frac{g}{c^2} x^2 (1 + z^2).$$

Die dieser Parabel unendlich benachbarte Wurfparabel habe den Höhenwinkel α' und es sei $tg\,\alpha' = z'$, dann lautet ihre Gleichung

$$(15) \quad y = x z' - \frac{g}{2 c^2} x^2 (1 + z'^2).$$

Der Schnittpunkt (x, y) der beiden Parabeln muß nun ein Punkt der Einhüllenden sämtlicher Wurfparabeln sein. Aus (14) und (15) folgt durch Subtraktion

$$(16) \quad o = x (z' - z) - \frac{g}{2 c^2} x^2 (z'^2 - z^2).$$

Nach Division mit $x (z' - z)$ ergibt sich

$$1 = \frac{g}{2 c^2} x (z' + z)$$

Setzt man $z' = z$, so erhält man

$$z = \frac{c^2}{g x}.$$

Setzt man diesen Wert von z in Gleichung (14) ein, so ergibt sich

$$y = \frac{c^2}{g} - \frac{g}{2 c^2} x^2 \left(1 + \frac{c^4}{g^2 x^2}\right) = \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{g} - \frac{g}{2 c^2} x^2$$

oder $$(17) \quad y - \tfrac{1}{2} \frac{c^2}{g} = - \frac{g}{2 c^2} x^2$$

Dies ist die Gleichung einer Parabel, deren Scheitel im höchsten Punkt der vertikalen Wurfbahn liegt und deren Axe vertikal nach unten gerichtet ist. Ihr Parameter ist $\frac{c^2}{g}$, sie ist also der Wurfbahn bei horizontalem Wurf kongruent.

In der Bezeichnungsweise der Differenzialrechnung setzt man

$$(1) \quad F = y - x z + \frac{g}{2 c^2} x^2 (1 + z^2) = o, \quad \text{ferner}$$

$$(2) \quad \frac{\partial F}{\partial z} = \quad - x \quad + \frac{g x^2}{c^2} z \qquad = o$$

so ergibt sich durch Elimination von z aus diesen beiden Gleichungen die Einhüllende der Wurfparabeln:

$$(3) \quad y - \frac{c^2}{2g} = -\frac{1}{2}\frac{g}{c^2}x^2$$

Die Einhüllende der Wurfparabeln kann auch folgendermaßen abgeleitet werden:

Soll ein gegebener Punkt (x, y) im Raum getroffen werden, so ergeben sich aus der Gleichung

$$y = x\,z - \frac{1}{2}\frac{g}{c^2}x^2(1 + z^2)$$

2 Werte für $tg\,\alpha = z$, denn die Gleichung ist in z quadratisch:

$$z^2 - \frac{2c^2}{g\,x}z + \left(\frac{2c^2}{g\,x^2}y + 1\right) = o$$

Diejenigen Punkte des Raums, die gerade noch und zwar auf einerlei Art erreicht werden, sind bestimmt durch die Diskriminante der obigen Gleichung. Diese liefert also die Gleichung der Einhüllenden sämtlicher Wurfbahnen:

$$\frac{c^4}{g^2x^2} - \left(\frac{2c^2}{g\,x^2}y + 1\right) = o$$

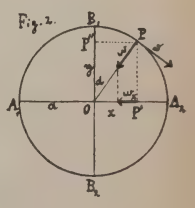
oder $$y - \frac{1}{2}\frac{c^2}{g} = -\frac{g}{2c^2}x^2$$

---

§ 4. Gleichförmige Kreisbewegung und harmonische Bewegung.

Bewegt sich ein Punkt P mit konstanter Geschwindigkeit c in einem Kreis, so führt seine orthogonale Projektion P' auf einen Durchmesser $A_1 A_2$ des Kreises eine harmonische Bewegung aus.

Es sei a der Halbmesser des Kreises und T die Umlaufszeit des Punkts P. Befindet sich der Punkt P zur Zeit $t = o$ in B_1 auf dem zu $A_1 A_2$ senkrechten Durchmesser $B_1 B_2$, zur Zeit t in P und bildet die Kurbel OP mit der Kurbel OB_1 den Winkel α, so gilt für den Abstand x des Punkts P' von O



$$x = a \sin \alpha.$$

Wird der Winkel α in analytischem Maß gemessen, so gilt

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{t}{\tau};\quad \alpha = 2\pi\frac{t}{T} \text{ und damit}$$

$$x = a \sin 2\pi\frac{t}{T} = a \sin q\,t, \quad \text{wenn } q = \frac{2\pi}{T}.$$

Die orthogonale Projektion P'' des Punkts P auf den Durchmesser

$B_1 B_2$ führt ebenfalls eine harmonische Bewegung aus. Ist y die Entfernung des Punkts P'' von O, so gilt

$$y = a \cos \alpha = a \cos 2\pi \frac{t}{T} = a \cos q\, t.$$

Die Bewegungen der Punkte P' und P'' sind periodische Bewegungen, denn wächst t um ein ganzzahliges Vielfaches von T, so erreichen x und y wieder dieselben Werte.

Für die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der beiden harmonischen Bewegungen ergeben sich die Gleichungen:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = a\, q \cos q\, t$$

$$v_y = \frac{dy}{dt} = -\, a\, q \sin q\, t$$

$$w_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = -\, a\, q^2 \sin q\, t = -\, q^2\, x$$

$$w_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = -\, a\, q^2 \cos q\, t = -q^2\, y$$

d. h. die Beschleunigung bei einer harmonischen Bewegung ist dem Abstand von der Mitte O direkt proportional und wegen des negativen Zeichens stets gegen O hin gerichtet.

Die Geschwindigkeit und die Beschleunigung einer harmonischen Bewegung können auch abgeleitet werden als Projektionen der Geschwindigkeit und Beschleunigung der Kreisbewegung, durch deren Projektion die harmonische Bewegung entsteht. Die Beschleunigung bei der gleichförmigen Kreisbewegung ist konstant und stets gegen O hin gerichtet. Diese Zentripetalbeschleunigung ist bekanntlich

$$w = \frac{4\pi^2}{T^2} a = q^2\, a$$

$$\text{also} \qquad w_x = -\, w \sin \alpha = -\, w \frac{x}{a} = -\, q^2\, x$$

wie oben.

Umgekehrt können die zwei harmonischen Bewegungen in den beiden aufeinander senkrechten Durchmessern nach dem Parallelogramm der Bewegungen zusammengesetzt werden und ergeben die Kreisbewegung, deren Geschwindigkeit

$$v = \sqrt{v_x^{\,2} + v_y^{\,2}} = a \cdot q = \frac{2\, a\, \pi}{T}$$

und deren Beschleunigung

$$w = \sqrt{w_x^{\,2} + w_y^{\,2}} = q^2 \sqrt{x^2 + y^2} = q^2\, a = \frac{4\pi^2\, a}{T^2}$$

Der Richtungswinkel dieser konstanten Beschleunigung ist bestimmt durch

$$tg\, c = \frac{w_y}{w_x} = \frac{y}{x} = ctg\, \alpha = tg\, (90^\circ - \alpha)$$

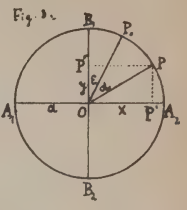
d. h. die Beschleunigung ist gegen den Mittelpunkt hin gerichtet.

Befindet sich zur Zeit $t = o$ der Punkt P nicht in B_1, sondern in P_0 und bildet die Kurbel OP_0 mit OB_1 den Winkel ε, ist ferner die Geschwindigkeit der Kreisbewegung dieselbe wie im vorigen Fall, so eilt die Kurbel OP_0 der Kurbel OB_1 immer um den Winkel ε voran und es gilt dann für die harmonische Bewegung, die durch Projektion dieser voraneilenden Bewegung erhalten wird:

$$x = a \sin (q\,t + \varepsilon)$$

$$\frac{dx}{dt} = a\,q \cos (q\,t + \varepsilon)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,a\,q^2 \sin (q\,t + \varepsilon) = q^2 x.$$



Auch hier ist die Beschleunigung dem Abstand von der Mittellage proportional und gegen die Mitte hin gerichtet.

Ist umgekehrt die Beschleunigung einer geradlinigen Bewegung stets gegen einen Punkt O hin gerichtet und dem Abstand des beweglichen Punktes vom Punkt O proportional, so ist die Bewegung eine harmonische, d. h. die orthogonale Projektion einer gleichförmigen Kurbelbewegung. Die Gleichung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\,q^2 x$$

wird also befriedigt durch

$$x = a \sin (q\,t + \varepsilon)$$

wobei a und ε noch beliebige Werte annehmen können. Soll für $t=o$ auch $x = o$ werden, so wird $\varepsilon = o$.

Die Schwingungsdauer T ergibt sich aus der Gleichung

$$q^2 = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2, \text{ daher } T = \frac{2\pi}{q}$$

d. h. die Schwingungsdauer ist unabhängig von der Amplitude a.

Für die bei der harmonischen Bewegung wirksame Kraft gilt

$$P = m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -\,m\,q^2\,x = -\,K \cdot x$$

Für $x = 1$ ergibt sich $P = K$, d. h. K ist die in der Entfernung 1 von der Gleichgewichtslage wirksame Kraft.

Beispiele für harmonische Bewegungen.

1. Vertikale Schwingungen eines an einer elastischen Feder befestigten Gewichts G. (unter Vernachlässigung des Gewichts der Feder.)

Gesetz: Die Verlängerung der Feder ist proportional dem spannenden Gewicht.

Verlängert ein Gewicht von 1 kg die Feder um h cm, so ist zur Verlängerung um x cm eine spannende Kraft von $\frac{x}{h}$ kg nötig. Ist zur

Zeit t die Entfernung des Gewichts von seiner Gleichgewichtslage x, ist die Kraft, die das Gewicht in die Gleichgewichtslage zurückzieht,

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{x}{h}$$

Da $m = \frac{G}{g}$, so wird

$$\frac{G}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{x}{h}$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{g}{G \cdot h} \cdot x = - q^2 x$$

d. h. die Beschleunigung des Gewichts ist proportional der Entfernu von der Gleichgewichtslage, die Bewegung ist also eine harmonisc und es wird

$$x = a \sin \sqrt{\frac{g}{G \cdot h}}\, t$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{G \cdot h}{g}}$$

2. Schwingungen einer Flüssigkeit in einer U-förmig Röhre. Wird die Flüssigkeit in einer U-Röhre von überall gleiche Querschnitt aus dem Gleichgewicht gebracht, so gerät sie in Schwin ungen. Faßt die Längeneinheit der Röhre G_1 Gramm Flüssigkeit, so bei einer Länge $2\,l$ der Flüssigkeitssäule das Gesamtgewicht der Flüss keit $G = 2\,l\,G_1$. Beträgt zur Zeit t der Höhenunterschied der Flüss keitsoberflächen in beiden Röhren $2\,x$, so ist die Kraft, die die Flüss keit in die Gleichgewichtslage zurücktreibt $2\,x\,G_1$. Diese Kraft erteilt d ganzen Masse der Flüssigkeit m die Beschleunigung $b = \frac{d^2 x}{dt^2}$. Es ist al

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = - 2\,x\,G_1$$

Da $m = \frac{G}{g} = \frac{2\,l\,G_1}{g}$, so wird

$$\frac{2\,l\,G_1}{g} \frac{d^2 x}{dt^2} = - 2\,x\,G_1$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{g}{l}\, x.$$

Die Bewegung ist also eine harmonische und es wird

$$x = a \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t$$

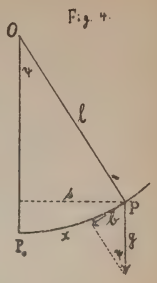
$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

3. Pendelbewegung. Der Faden OP eines mathematisch Pendels bilde mit der vertikalen Gleichgewichtslage OP_0 den Winkel Auf den Punkt P wirkt die vertikale Schwerebeschleunigung g. Ih

Komponente in Richtung der Tangente an die Kreisbahn des Pendelkörpers ist

$$b = g \sin \Psi.$$

Ist s die Entfernung des Punkts P von der Gleichgewichtslage des Fadens und l die Länge des Pendels, so wird



$$\sin \Psi = \frac{s}{l} \text{ und } b = g \frac{s}{l}.$$

Bei kleiner Amplitude des Pendels darf statt des Lots s die Länge des Kreisbogens $P_0 P = x$ gesetzt werden, dann wird

$$b = \frac{d^2 x}{dt^2} = - g \frac{x}{l}.$$

Das Minuszeichen ist zu setzen, weil bei wachsendem x die Beschleunigung der Bewegung entgegenwirkt.

Da die Beschleunigung proportional dem Abstand des Pendels von der Gleichgewichtslage ist, so ist die Pendelbewegung bei kleiner Amplitude eine harmonische Bewegung und es wird

$$x = a \sin \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

$$T = 2 \pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

---

§ 5. Schwerkraft, Potential.

Die anziehende Kraft zwischen zwei Massen M und m in der Entfernung r ist nach Newtons Gesetz:

$$(1) \quad K = C \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad (C \text{ Gravitationskonstante})$$

ist die Masse M fest und bewegt sich die Masse m in der Verbindungslinie beider Massen um dr auf die Masse M zu, d. h. ist ihr Weg $- dr$, so verbraucht sie dabei die Arbeit

$$(2) \quad dA = K(- dr) = - C M \cdot m \frac{dr}{r^2}.$$

Die Arbeit, die verbraucht wird, wenn die Masse m aus der Entfernung r_1 in die kleinere Entfernung r_2 sich bewegt, ist

$$A = - \int_{r_1}^{r_2} C \frac{M \cdot m}{r^2}\, dr = - C M \cdot m \left(- \frac{1}{r}\right) \Bigg|_{r_1}^{r_2} = C M m \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right)$$

Die Arbeit, die verbraucht wird, wenn die Masse m aus der Entfernung $r_1 = \infty$ in die Entfernung $r_2 = r$ sich bewegt, ist

$$(3) \quad A = C \frac{M \cdot m}{r}$$

Ist $m = 1$, so heißt diese Arbeit das Potential der Maße M im Abstan r von M und wird bezeichnet mit

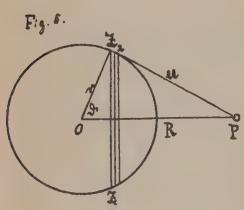
$$(4) \quad V = C \cdot \frac{M}{r}$$

Für $m = 1$ wird dann nach Gleichung (2)

$$K = -\frac{dV}{dr} = \frac{CM}{r^2}.$$

Potential einer homogenen sehr dünnen Kugelschale, Potential einer Kugel.

Eine Kugelschale habe den Mittelpunkt O und den Radius r. Jed Flächeneinheit derselben habe die Masse σ. Die Entfernung des Punk P vom Mittelpunkt der Kugel sei R. Zerlegt man nun die Kugelscha durch ebene Schnitte $Z_1 Z_2 \perp OP$ in lauter sehr schmale Zonen, haben sämtliche Punkte einer solchen Zone gleichen Abstand u von und es ist das Potential einer solchen Zone im Punkt P, wenn $< ZC = \vartheta$ ist



$$dV = C \frac{2\pi r \sin\vartheta \; r\, d\vartheta \cdot \sigma}{u}$$

Nun ist $u^2 = r^2 + R^2 - 2rR\cos\vartheta$

differenziert $u\,du = r \cdot R \sin\vartheta\, d\vartheta$

Damit wird $dV = C \cdot \frac{2\pi r\sigma}{R}\, du$

Für die ganze Kugel ergibt sich, wenn P ein äußerer Punkt ist

$$V_a = C \cdot \frac{2\pi r\sigma}{R} \int_{R-r}^{R+r} du = C \cdot \frac{4\pi r^2 \sigma}{R} = \frac{C \cdot m}{R}$$

wobei m die Masse der ganzen Kugelschale bedeutet. Das Potent der Kugelschale in bezug auf einen äußeren Punkt ist also gerade groß, wie wenn die Gesamtmasse der Kugel in ihrem Mittelpunkt v einigt wäre.

Ist P ein Punkt im Innern der Kugelschale im Abstand R v Mittelpunkt der Kugel, so wird sein Potential

$$V_i = C \cdot \frac{2\pi r\sigma}{R} \int_{r-R}^{r+R} du = C \cdot \frac{2\pi r\sigma}{R} 2R = C \cdot 4\pi r\sigma = \frac{mC}{r}$$

d. h. das Potential im Innern der Kugelschale ist konstant und gerade groß wie auf ihrer Oberfläche und wie im Mittelpunkt der Kugel. einer Massenverschiebung im Innern der Hohlkugel ist also keine Arb nötig, es muß daher die Kraft im Innern der Hohlkugel Null sein.

Aus dem obigen folgt, daß das Potential einer massiven Kug die aus lauter konzentrischen Kugelschalen besteht, von denen je einzeln homogen ist, in einem äußeren Punkt P_a auch gerade so gr

st, wie wenn ihre ganze Masse M im Mittelpunkt der Kugel vereinigt väre, also ist ihr Potential $V = \frac{CM}{R}$. Für die im Punkt P_a auf die Masseneinheit wirksame Kraft K_a gilt

$$K_a = -\frac{dV}{dR} = C \cdot \frac{M}{R_2}$$

Bedeutet M die Masse der homogen gedachten Erdkugel und ist r ihr Radius, so ist die auf die Masseneinheit wirksame Kraft K_0 an ihrer Oberfläche 1 Gramm oder $g = 981$ Dynen, also

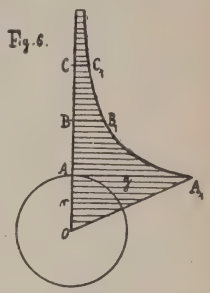
$$K_o = C \cdot \frac{M}{r^2} = g$$

amit wird

$$CM = g\,r^2$$

nd für einen beliebigen äußeren Punkt gilt

$$K_a = g\,\frac{r^2}{R_2}$$



In der nebenstehenden Figur sind auf dem Erdradius OA in verschiedenen Punkten seiner Verlängerung Lote als Ordinaten errichtet nd auf ihnen die in diesen Punkten auf die Masseneinheit wirksamen räfte abgetragen. Für $OA = r$ ist $AA_1 = g$, für $OB = 2\,r$ wird $B_1 = \frac{g}{4}$, für $OC = 3\,r$ wird $CC_1 = \frac{g}{9}$ etc.

Die Kurve $A_1\ B_1\ C_1\ \ldots$ veranschaulicht die Abnahme der Schwerraft mit der Entfernung vom Erdmittelpunkt.

Auf die Masseneinheit im Punkt P_i im Innern der Erde im Abnd R vom Erdmittelpunkt wirkt nur die Anziehungskraft der inneren ugel vom Radius R, während die Hohlkugel von der Dicke $r—R$ auf n Punkt P_i keine Kraft ausübt, da er sich im Innern derselben bedet. Die Anziehungskraft der inneren Kugel auf die Masseneinheit P_i ist, wenn ihre Dichte s beträgt,

$$K = C \cdot \frac{{}^4/_3\,\pi\,R^3\,s}{R^2} = C \cdot {}^4/_3\,\pi\,R \cdot s$$

ese Kraft ist also dem Abstand des Punkts P_i vom Erdmittelpunkt portional.

Befindet sich der Punkt P_i auf der Erdoberfläche, d. h. im Abnd r vom Erdmittelpunkt, so ist die auf ihn wirksame Kraft

$$K_o = C \cdot {}^4/_3\,\pi\,r \cdot s = g$$

raus folgt

$$C \cdot {}^4/_3\,\pi\,s = \frac{g}{r}$$

l

$$K = \frac{g}{r}\,R$$

gt man wiederum die Größe dieser Kraft in jedem Punkt des Erd-

halbmessers OA als Ordinate zu diesem Halbmesser ab, so ist die V bindungslinie der Endpunkte dieser Lote die Gerade OA_1.

Anmerkung. Wäre die Erde durch einen diametralen Schacht durchbo so wäre die Beschleunigung eines Steins in diesem Schacht

$$w = \frac{d^2R}{dt^2} = -\frac{g}{r}R$$

d. h. die Beschleunigung wäre proportional der Entfernung des Steins vom Mittelpu der Erde, die Bewegung wäre also eine harmonische, dargestellt durch die Gleichun

$$R = a \sin \sqrt{\frac{g}{r}}\, t \quad \text{und} \quad T = 2\pi \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Die Arbeit, die geleistet werden muß, um die Masseneinheit dem Erdmittelpunkt an die Erdoberfläche zu heben, ist

$$A = \int_0^r g \frac{R}{r}\, dR = \frac{gr}{2}$$

und wird dargestellt durch die Fläche OAA_1. Die Arbeit, die notwen ist, um die Masseneinheit außerhalb der Erdoberfläche aus der E fernung R_1 in die Entfernung R_2 zu heben, ist

$$A = \int_{R_1}^{R_2} g \frac{r^2}{R^2}\, dR = g r^2 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

und wird dargestellt durch die Fläche der Gravitationskurve $A_1 B_1 C_1 \ldots$ zwischen den Ordinaten in den Endpunkten von R_1 und R_2. W $R_2 = \infty$, so wird

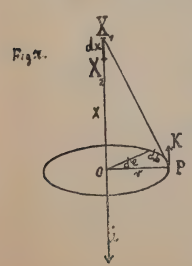
$$A = \frac{g r^2}{R_1}$$

Diese Arbeit heißt das Potential der Erdkugel im Abstand R_1 vom E mittelpunkt und wird dargestellt durch die Fläche der Gravitationskur $A_1 B_1 C_1 \ldots$, die von der Ordinate im Endpunkt von R_1 bis ins u endliche reicht.

§ 6. Magnetische Kraft des elektrischen Stromes

Wirkung eines unendlich langen geradlinigen Stroms von der Stär auf einen Magnetpol P von der Stärke μ im Abstand r vom Stromlei

O sei der Fußpunkt des von P auf den Stromleiter gefällten Lo



Ein Linienelement des Stromleiters $X_1 X_2 = dx$ h von O die Entfernung x, von P die Entfernung ϱ. N dem Biot-Savart'schen Gesetz ist die Kraft, die der St im Linienelement dx auf den Pol P ausübt, senkr zur Ebene durch ϱ und dx und von der Stärke

$$dK = C \frac{\mu i\, dx}{\varrho^2}$$

wobei C eine Konstante bedeutet. Im elektromagnetisc Maßsystem setzt man $C = \frac{2}{\pi}$. Die Kraft, die der unendlich lange Str leiter auf den Pol ausübt, ist

$$K = \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu i\, dx}{\varrho^2} = \frac{2}{\pi}\mu i \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{r^2 + x^2} = \frac{2}{\pi}\mu i \frac{1}{r}\, arc\, tg \frac{x}{r}\Bigg|_{-\infty}^{+\infty}$$

$$= \frac{2}{\pi}\mu i \frac{1}{r}\pi = \frac{2\mu i}{r}$$

d. h. diese Kraft ist proportional der Stromstärke und umgekehrt proportional der Entfernung des Pols vom Stromleiter.

Die Arbeit dieser Kraft längs eines Kreises um O mit Radius r in einer Ebene senkrecht zum Stromleiter ist, wenn ds ein Linienelement dieses Kreises bedeutet

$$A = \int K\, ds.$$

Nun ist, wenn de der zu ds gehörige Zentriwinkel ist

$$ds = r\, de$$

Damit wird

$$A = \int_0^{2\pi} \frac{2\mu i}{r} r\, de = 2\mu i \;\; 2\pi = \mu \cdot 4\pi i$$

Für einen Pol von der Stärke $\mu = 1$ wird

$$A = 4\pi i.$$

Diese Arbeit ist also unabhängig vom Radius r, ist demnach für jede Kreisbahn um den Stromleiter gleich groß.

---

7. Die Exponentialfunktion und die logarithmische Funktion.

Satz: Ist die Wachstumsgeschwindigkeit oder der Differentialquotient einer Funktion proportional der Funktion selbst, so ist diese Funktion die Exponentialfunktion.

Aus $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$ folgt

$y = a\, e^{cx}$ (a bedeutet eine beliebige Konstante)

Das obige Wachstumsgesetz heißt das Gesetz des organischen Wachsens.

Aus $\frac{dy}{dx} = c \cdot y$ folgt ferner

$$\frac{dy}{y} = c \cdot dx$$

$$ly = cx + C.$$

Setzt man $C = la$, so wird

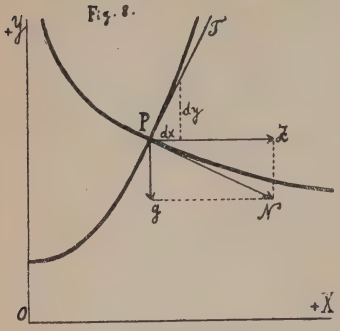
$$l\frac{y}{a} = cx \text{ und } x = \frac{1}{c}\, l\frac{y}{a}$$

d. h, ist y eine Exponentialfunktion von x, so ist umgekehrt x eine logarithmische Funktion von y.

Beispiele für die Exponentialfunktion und die logarithmische Funktion.

1) Bestimmung der Oberfläche einer um eine vertikale Achse rotierenden Flüssigkeit.

Bei gleichmäßiger Drehung einer Flüssigkeit in einem zylindrische Gefäß um die vertikale Drehachse Y wi die Oberfläche der Flüssigkeit zu ein Rotationsfläche, deren Meridian wir suche Es sei P ein Punkt desselben im Abstai x von der Drehachse Y und im Abstand vom Boden des Gefässes, der vom Me dian durch P in der Xachse geschnitt wird. Der Massenpunkt P der Flüssigk ist nun zwei Beschleunigungen unt worfen:



1) der Schwerebeschleunigung g, die vertikal abwärts gerichtet i

2) der Zentrifugalbeschleunigung $z = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x$ (horizontal a wärts), wobei T die Dauer einer Umdrehung bedeutet.

Die Resultante dieser beiden Beschleunigungen ist die Diagon PN ihres Beschleunigungsparallelogramms. Sie muß Normale des dur P gehenden Meridians der Flüssigkeit sein; denn wäre dies nicht Fall, so könnte sie in 2 Komponenten in Richtung der Normale u der Tangente des Meridians zerlegt werden und die Tangentialkompone würde eine Verschiebung des Massenpunkts P nach oben oder unten h vorrufen. Dies darf jedoch nicht sein, da im Gleichgewichtszustand Punkt P einen wagrechten Kreis beschreibt. Die Tangentialkompone muß also Null werden, d. h. die Meridiantangente t in P muß auf Beschleunigung PN senkrecht stehen.

Bildet die Tangente t mit der Wagrechten den Winkel τ, so für alle Punkte P der Meridiankurve

$$tg\,\tau = \frac{dy}{dx} = \frac{b}{g} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{x}{g}$$

d. h. der Richtungskoëffizient der Tangente ist proportional der Abscisse Diese Eigenschaft gilt für alle Parabeln, die Y als Achse besitzen, de aus obiger Gleichung folgt

$$dy = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{x}{g}\,dx$$

$$(1)\quad y = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \frac{x^2}{2g} + C.$$

Für $x = 0$ folgt $y = C$, d. h. C ist die Höhe des Scheitels der Para über der Xachse. Die Gleichung (1) stellt bei veränderlichem C e

Schar kongruenter Parabeln dar, von denen jede Oberfläche der Flüssigkeit sein kann.

Schreitet man von P aus in Richtung der Beschleunigung N und damit auch in der Richtung der Kraft so weiter, daß in jedem Punkt der beschriebenen Bahn die Beschleunigung dieses Punktes Tangente der Bahn wird, so heißt die entstehende Kurve eine Kraftlinie. Ist der Winkel der Normalen N gegen die Wagrechte τ', so gilt für alle Punkte der Kraftlinie

$$tg\,\tau' = \frac{dy}{dx} = -\frac{g}{b}\left(= -\frac{1}{tg\,\tau}\right)$$

oder

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-g}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 x}$$

$$dy = -g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 \frac{dx}{x}$$

Integriert

$$y = -g\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 l\,x + C$$

d. h. die Kraftlinien sind eine Schar logarithmischer Linien. Die darauf senkrecht stehenden Parabeln heißen Niveaulinien der Flüssigkeitsströmung, sie sind die orthogonalen Trajektorien der logarithmischen Linien.

2) Entladung eines elektrischen Kondensators durch einen großen Widerstand.

Verbindet man die beiden Belegungen eines geladenen Kondensators mit bekannter Kapazität C durch einen sehr großen Widerstand w, so entladet sich der Kondensator allmählich; die Abnahme seines Potentials während einer bestimmten Zeit kann mit Hilfe eines Elektrometers gemessen und daraus der Widerstand w berechnet werden. Ist zur Zeit t während der Entladung das Potential des Kondensators V und beträgt während des nächsten Zeitteilchens dt die Abnahme des Potentials dV, so nimmt die Ladung des Kondensators in der Zeit dt ab um

$$dE = -C\,dV$$

(dE wird negativ, da die Ladung abnimmt).

Da man unter der Stromstärke i die Ladung versteht, die in der Zeiteinheit durch den Querschnitt des Leiters fließt, so ist

$$i = \frac{dE}{dt} = -C\,\frac{dV}{dt}$$

Andererseits ist nach dem Ohm'schen Gesetz

$$i = \frac{V}{w}$$

Daher hat man die Gleichung

$$-C\,\frac{dV}{dt} = \frac{V}{w}$$

$$\frac{dV}{dt} = -\frac{1}{C\,w}\,V$$

d. h. die Geschwindigkeit, mit der das Potential abnimmt, ist dem jeweils vorhandenen Potential proportional. Das Potential befolgt also das Gesetz des organischen Wachsens, daher ist

$$V = V_0 \, e^{-\frac{t}{Cw}}$$

wo V_0 der Wert von V zur Zeit $t = o$ ist.

Hieraus folgt

$$w = \frac{t}{C\,(lV_0 - lV)}$$

3) Selbstinduktion, Stromschluß und Stromöffnung.

Ein in einem Leiter fließender Strom erzeugt ein magnetisches Feld, dessen Stärke der Stromstärke proportional ist. Ist N die Zahl der die Leiterfläche schneidenden Induktionslinien und i die Stromstärke, so gilt $N = L\,i$.

Die Konstante L heißt der Selbstinduktionskoëffizient der Leitung.

Ändert sich die Stromstärke i, so ändert sich auch das magnetische Feld des Stroms und damit die Zahl der Induktionslinien, die die Leiterfläche durchschneiden. Die Änderung der Energie des magnetischen Felds ruft einen Selbstinduktionsstrom hervor, der diese Änderung zu hemmen sucht. Die elektromotorische Kraft E dieses Selbstinduktionsstroms ist gleich der Änderung der Kraftlinienzahl pro Sekunde. Beträgt in der Zeit dt die Änderung der Kraftlinienzahl dN, so gilt

$$E = -\frac{dN}{dt} = -L\frac{di}{dt}$$

Das Minuszeichen ist zu setzen, da bei wachsender Stromstärke, also positivem $\frac{di}{dt}$, der Selbstinduktionsstrom dem ursprünglichen Strom entgegengesetzt gerichtet ist.

Stromschluß: Schließt man ein Element mit der konstanten elektromotorischen Kraft V durch einen Leiter mit dem Selbstinduktionskoëffizienten L und dem Widerstand w, so wird, da der Selbstinduktionsstrom dem Hauptstrom entgegenwirkt, die Stromstärke allmählich anwachsen bis zu ihrem nach dem Ohmschen Gesetz der stationären Strömung bestimmten Wert $i_0 = \frac{V}{w}$.

Ist zur Zeit t die Stromstärke i und ändert sie sich in der Zeit dt um di, so ist die $E.M.K$ des Selbstinduktionsstroms $-L\frac{di}{dt}$, also die gesamte $E.M.K$

$$E = V - L\frac{di}{dt}.$$

Nach dem Ohmschen Gesetz ist aber

$$E = i\,w, \qquad \text{daher}$$

$$(1) \qquad i\,w = V - L\frac{di}{dt}.$$

Bei konstanter $E.M.K$ ist $V = i_0\,w$, daher geht Gleichung (1) über in

$$L\frac{di}{dt} = -\,w\,(i - i_0)$$

$$\frac{di}{dt} = -\frac{w}{L}(i - i_0)$$

der

$$\frac{d\,(i - i_0)}{dt} = -\frac{w}{L}(i - i_0)$$

. h. die Änderungsgeschwindigkeit der Stromstärke ist proportional der Differenz zwischen der Stromstärke im stationären Zustand und der augenblicklichen Stromstärke, die Stromstärke folgt also dem Gesetz des organischen Wachsens. Durch Integration ergibt sich also

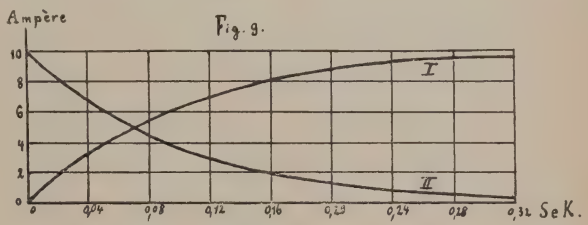
$$i - i_0 = C\,e^{-\frac{w}{L}t}$$

Da für $t = o$ $i = o$ ist, so folgt $-\,i_0 = C$, also

$$i = i_0\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right) = \frac{V}{w}\left(1 - e^{-\frac{w}{L}t}\right)$$

Man erkennt, daß der Strom umso langsamer anwächst, je kleiner L ist. Für $t = \infty$ ergibt sich $i = i_0 = \frac{V}{w}$.

Die Kurve I Fig. 9 zeigt das Anwachsen der Stromstärke für $V = 1$ Volt, $w = 0{,}1$ Ohm und $L = 0{,}01$ Henry.



Stromöffnung durch Kurzschluß der $E.M.K$.

Wird das Element kurz geschlossen, nachdem der Strom längere Zeit stationär war mit der Stromstärke i_0, so gilt für den Stromkreis ohne Element $V = o$ und Gleichung (1) geht über in

$$(2) \qquad i\,w = -\,L\frac{di}{dt}$$

oder

$$\frac{di}{dt} = -\frac{w}{L}\,i$$

d. h. die Geschwindigkeit der Abnahme der Stromstärke ist der Stromstärke proportional. Durch Integration folgt also

$$i = C\,e^{-\frac{w}{L}t}$$

Da für $t = o$ $i = i_0$, so wird

$$i = i_0\,e^{-\frac{w}{L}t}$$

Die Kurve II Figur 9 zeigt die Abnahme der Stromstärke für $i_0 =$ Ampère, $w = 0{,}1$ Ohm, $L = 0{,}01$ Henry. Sie ist symmetrisch zu Kurve

Für $t = \infty$ wird $i = o$, für $t = \frac{L}{w}$ wird $i = \frac{i_0}{e}$, d. h. $\frac{L}{w}$ ist die Ze

die verstreicht, bis die Stromstärke auf $\frac{1}{e}$ ihres Wertes sinkt. Die

Größe heißt die Zeitkonstante des Leiters und beträgt in unserem B spiel $\frac{1}{10}$ Sekunde.

4. Hypsometrische Formel bei konstanter Temperatur der Lu

a) Ableitung mit Hilfe eines Grenzübergangs.

In der Atmosphäre nimmt der Luftdruck mit wachsender Hö stetig ab. Denkt man sich die Atmosphäre in lauter gleich hohe hc zontale Schichten von so geringer Höhe geteilt, daß innerhalb ei Schicht der Luftdruck und damit die Dichte der Luft als konstant gesehen werden können, während diese Größen sich von Schicht Schicht verändern, setzt man also für das stetige Abnehmen des Lu drucks mit der Höhe ein sprungweises, so läßt sich der Luftdruck jeder einzelnen Schicht leicht berechnen.

Beträgt die Höhe einer Schicht 1 m und sind die Drucke in 0 1 m, 2 m ..... Höhe bezw. p_0, p_1, p_2 ..... $\frac{kg}{m^2}$ und die Dichten Luft in diesen Höhen s_0, s_1, s_2 ....., nimmt man ferner als Grundfläc der Schichten 1 qm an, so ist der Druck pro qm in 1 m Höhe um Gewicht von 1 cbm Luft von der Dichte s_0, d. h. um 1000 s_0 kg ringer als am Boden, d. h.

$$p_1 = p_0 - 1000\, s_0 = p_0 \left(1 - \frac{1000\, s_0}{p_0}\right)$$

Ähnlich ergibt sich der Druck in 2 m Höhe

$$p_2 = p_1 \left(1 - \frac{1000\, s_1}{p_1}\right)$$

Nach dem Boyle'schen Gesetz verhalten sich nun die Dichten der G bei konstanter Temperatur wie die Drucke, also

$$\frac{s_1}{s_0} = \frac{p_1}{p_0}$$

oder

$$\frac{s_1}{p_1} = \frac{s_0}{p_0}$$

und damit

$$p_2 = p_1 \left(1 - \frac{1000\, s_0}{p_0}\right) = p_0 \left(1 - \frac{1000\, s_0}{p_0}\right)^2$$

ebenso $p_3 = p_0 \left(1 - \frac{1000\, s_0}{p_0}\right)^3$

In der Höhe h m ist demnach der Druck

$$p_h = p_0 \left(1 - \frac{1000\, s_0}{p_0}\right)^h$$

Da $\left(1 - \frac{1000\, s_0}{p_0}\right)$ ein echter Bruch ist, so gilt also der

Satz: Nimmt die Höhe in arithmetischer Progression zu, so nimmt der Luftdruck in geometrischer Progression ab.

Die Formel für p_h kann jedoch nicht genau sein, da selbst innerhalb einer Meterschicht der Luftdruck sich verändert. Eine genauere Formel erhält man, wenn man annimmt, daß nur innerhalb einer *cm*-Schicht der Luftdruck derselbe ist und daß er sich von *cm* zu *cm* Höhe sprungweise verändert. Es ergeben sich dann 100 *h* Schichten und die Formel wird

$$p_h = p_0 \left(1 - \frac{1000\, s_0}{100\, p_0}\right)^{100\, h}$$

Für *mm* Schichten

$$p_h = p_0 \left(1 - \frac{1000\, s_0}{1000\, p_0}\right)^{1000\, h}$$

Wird die Meterschicht in *n* Schichten geteilt, so ergibt sich

$$p_h = p_0 \left(1 - \frac{\frac{1000\, s_0}{p_0}}{n}\right)^{n\, h} = p_0 \left[\left(1 - \frac{\frac{1000\, s_0}{p_0}}{n}\right)^{n}\right]^{h}$$

Je größer *n* wird, desto genauer wird die Rechnung. Mit wachsendem *n* strebt der Ausdruck

$$\left(1 - \frac{\frac{1000\, s_0}{p_0}}{n}\right)^{n}$$ einem Grenzwert zu.

Für $n = \infty$ ergibt sich nach einer Definition der Analysis

$$\left(1 - \frac{\frac{1000\, s_0}{p_0}}{n}\right)^{n}\Bigg|_{n=\infty} = e^{-\frac{1000\, s_0}{p_0}}$$

Also

$$p_h = p_0\, e^{-\frac{1000\, s_0}{p_0} \cdot h}$$

b) Ableitung mit Hilfe der Differenzialrechnung.

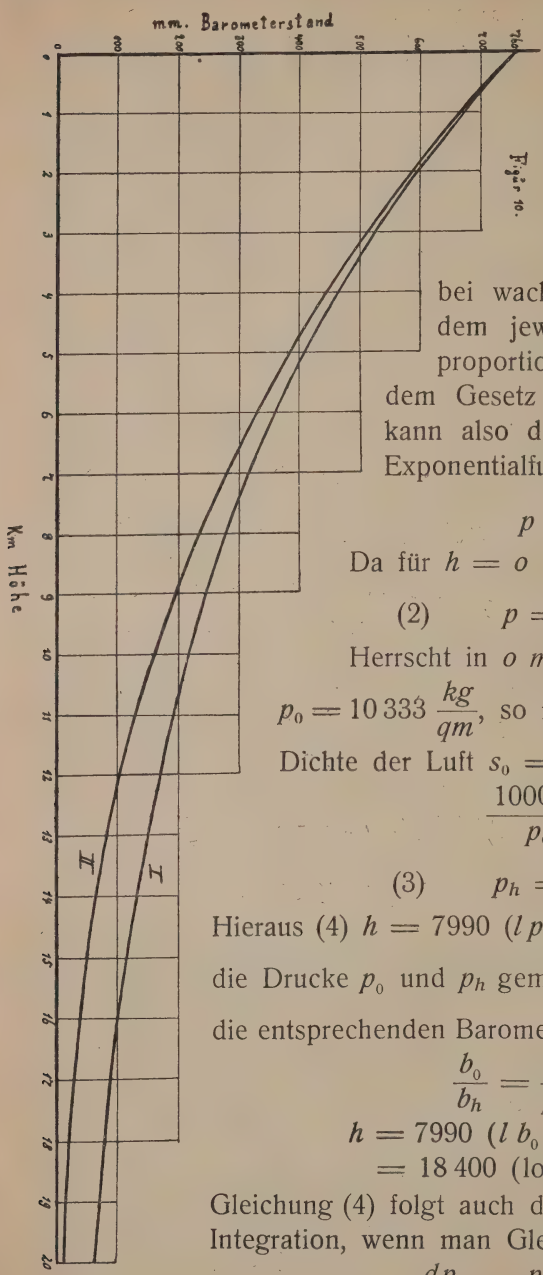
Man denke sich die Atmosphäre in lauter horizontale Schichten von der Höhe $d\,h$ geteilt, wo $d\,h$ eine unendlich kleine Größe vorstellt. In jeder dieser Schichten sei der Luftdruck konstant, während er sich von Schicht zu Schicht verändert.

In einer beliebigen Schicht in der Höhe *h* Meter über dem Boden sei der Druck der Luft $p\ \frac{kg}{m^2}$, die Dichte der Luft *s*. In der nächsten Schicht, d. h. in der Höhe $(h + d\,h)$ Meter habe der Druck der Luft zugenommen um dp (zugenommen um $-\ dp$). Diese Druckabnahme entspricht dem Gewicht einer Luftsäule von der Höhe $d\,h$ Meter und der Dichte *s*, also

$$-\ dp = d\,h \,.\, s \,.\, 1000\ \frac{kg}{qm}$$

Die Dichte s jeder Luftschicht kann nun in Beziehung gebracht werd
zu dem in ihr herrschenden Druck p. Ist s_0 die Dichte der Luft
Boden beim Druck p_0, so verhält sich nach dem Boyle'schen Ges

$$s : s_0 = p : p_0$$



Figur 10.

also

$$dp = -\,dh \cdot \frac{1000\, s_0}{p_0}$$

(1) $$\frac{dp}{dh} = -\frac{1000\, s_0}{p_0}$$

d. h. die Geschwindigk
mit der sich der Luftdr
bei wachsender Höhe verändert,
dem jeweils vorhandenen Luftdr
proportional. Der Luftdruck folgt a
dem Gesetz des organischen Wachse
kann also dargestellt werden durch e
Exponentialfunktion

$$p = C\, e^{-\frac{1000\, s_0}{p_0} h}$$

Da für $h = o$ $p = p_0$, so folgt

(2) $$p = p_0\, e^{-\frac{1000\, s_0}{p_0} h}$$

Herrscht in o m Höhe der Normaldruck
$p_0 = 10\,333\ \frac{kg}{qm}$, so ist bei der Temperatur o^0
Dichte der Luft $s_0 = 0{,}00\,1293$ und es wird

$$\frac{1000\, s_0}{p_0} = \frac{1}{7990}$$

(3) $$p_h = p_0\, e^{-\frac{h}{7990}}$$

Hieraus (4) $h = 7990\ (l\, p_0 - l\, p_h)$ Meter. Hiebei s
die Drucke p_0 und p_h gemessen in $\frac{kg}{qm}$, sind b_0 und
die entsprechenden Barometerstände, so gilt

$$\frac{b_0}{b_h} = \frac{p_0}{p_h}, \quad \text{also}$$

$$h = 7990\ (l\, b_0 - l\, b_h) \text{ Meter}$$
$$= 18\,400\ (\log b_0 - \log b_h) \text{ Meter.}$$

Gleichung (4) folgt auch direkt aus Gleichung (1) du
Integration, wenn man Gleichung (1) schreibt

$$dh = -\frac{dp}{p} \cdot \frac{p_0}{1000\, s_0}$$

$$h = -\frac{p_0}{1000\, s_0}\, l\, p + C$$

Da für $h = o \quad p = p_0$, so folgt

$$h = 7990\ (l\,p_0 - l\,p) \text{ Meter.}$$

Die Abhängigkeit des Luftdrucks von der Höhe ist bei konstanter Temperatur dargestellt durch die Kurve I Figur 10, wobei auf der Abszissenachse 1 Teil = 1000 m Höhe, auf der Ordinatenachse 1 Teil = 100 mm Barometerstand bedeutet.

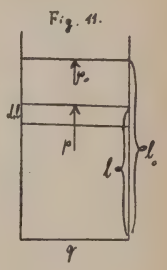
5. Arbeit bei isothermer Zusammendrückung und Ausdehnung eines Gases.

Bedeutet v das Volumen, p den Druck eines Gases, so gilt bei konstanter Temperatur das Boyle'sche Gesetz:

$$p \cdot v = c$$

wobei c eine Konstante bedeutet.

Eine in einem Zylinder mit beweglichem Deckel eingeschlossene Gassäule habe den Querschnitt q und zur Zeit $t = o$ die Länge l_0. Der Gasdruck auf die Flächeneinheit des Gases sei p_0. Wird der Deckel nun niedergedrückt, so wird das Gas zusammengepreßt. Zur Zeit t sei die Länge der Gassäule l und ihr Druck auf die Flächeneinheit p, dann ist der Gesamtdruck auf den Deckel



$$P = p \cdot q$$

Bei weiterem Niederdrücken des Deckels um die Wegstrecke dl wird gegen diese Kraft P die Arbeit dA geleistet und es ist

$$dA = + p \cdot q \cdot dl.$$

Nun ist $q\,dl = - dv$,

wenn mit $- dv$ die Abnahme des Volums der Luftsäule bezeichnet wird.

Also $dA = - p \cdot dv$

und mit Hilfe des Boyle'schen Gesetzes

$$(1) \qquad dA = - \frac{c\,dv}{v}$$

integriert $A = - c\,lv + C$

und zur Zeit $t = o \quad A = o$, $v = v_0$ und $p = p_0$, so folgt

$$(2) \qquad A = c\,l\,\frac{v_0}{v} = c\,l\,\frac{p}{p_0}$$

Bei der Ausdehnung des Gases ist

$$(3) \qquad dA = + p\,dv$$

die Arbeitsleistung in der Richtung des Gasdrucks erfolgt, also

$$(4) \qquad A = c\,l\,\frac{v}{v_0} = c\,l\,\frac{p_0}{p}$$

1. Beispiel: Welche Arbeit ist nötig, um 1 l Gas von 0° und 0 mm Druck auf die Hälfte zusammenzupressen, wenn die Temperatur konstant bleibt?

$$p\,v = 1{,}033 \cdot 1000\ \frac{kg}{cm^2}\ cm^3 = 1033\ c\,m\ kg = 10{,}33\ m\ kg$$

$$A = 10{,}33\ l\ 2\ m\ kg = 7{,}16\ m\ kg.$$

2. Beispiel: Arbeitsleistung beim Aufsteigen der Luft der Atmosphäre bei konstanter Temperatur.

Steigt Luft bei konstanter Temperatur um h Meter empor u sinkt dabei ihr Druck von p_0 auf p_h, so dehnt sich die Luft aus u leistet dabei die Arbeit

$$A = c\ l\ \frac{p_0}{p_h}$$

Nach der hypsometrischen Formel für konstante Temperatur ist aber

$$l\ \frac{p_0}{p_h} = h \cdot \frac{1000\ s_0}{p_0}$$

also $$A = c \cdot h \cdot \frac{1000\ s_0}{p_0}$$

Nun ist $$c = p_0 \cdot v_0$$

und $$A = p_0 v_0 \cdot h \cdot \frac{1000\ s_0}{p_0} = v_0 \cdot 1000\ s_0 \cdot h$$

Ist das Gewicht der aufsteigenden Luft Q *kg*, so gilt, da v_0 in *cbm* g messen wird (h ist in m gemessen)

$$1000\ v_0 \cdot s_0 = Q\ kg$$

und damit $$A = Q \cdot h\ \ m\ kg$$

d. h. die Gesamtarbeit bei der Ausdehnung wird zur Hebung des G wichts der Luft auf die Höhe h verwendet.

---

§ 8. Adiabatische Zustandsänderung eines Gases.

Unter einer adiabatischen Zustandsänderung eines Gases verste man eine solche, bei der das Gas weder Wärme aus der Umgebu aufnimmt noch Wärme abgibt, bei der es gewissermaßen von ein wärmeundurchlässigen Hülle umgeben ist.

Ist v das Volumen, p der Druck und T die absolute Temperat von 1 kg Gas, so gilt für jede Zustandsänderung desselben das Mariott Gay Lussac'sche Gesetz

$$(1) \qquad p \cdot v = R \cdot T$$

wo R eine Konstante bedeutet.

Man denkt sich nun die adiabatische Zustandsänderung zerlegt zwei aufeinander folgende Zustandsänderungen. Bei der ersten werd dem Gas bei konstantem Druck die Wärmemenge Q zugeführt, bei d zweiten werde dem Gas bei konstantem Volumen dieselbe Wärmemeng Q entzogen. Wird dem Gas bei konstantem Druck p die Wärmemeng

) zugeführt, so wird das Gas erwärmt auf die Temperatur T' und sein olumen wird v_1. Es gilt dann die Gleichung

$$(2) \qquad p \cdot v_1 = RT'$$

urch Subtraktion der Gleichungen (1) und (2) erhält man eine Beehung zwischen der Volum = und Temperaturänderung:

$$(3) \qquad p\,(v_1 - v) = R\,(T' - T)$$

edeutet c_p die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Druck, so ist

$$(4) \qquad Q = c_p\,(T' = T) = c_p \cdot \frac{p}{R}\,(v_1 - v)$$

'ird nun dem Gas bei konstantem Volumen v_1 die Wärmemenge Q ıtzogen, so sinke seine Temperatur auf T_1 und sein Druck werde p_1. ann gilt

$$(5) \qquad p_1 v_1 = R\,T_1.$$

ırch Subtraktion der Gleichungen (2) und (5) erhält man eine Be-:hung zwischen der Druckänderung und der Temperaturänderung:

$$(6) \qquad v_1\,(p_1 - p) = R\,(T_1 - T')$$

:deutet c_v die spezifische Wärme des Gases bei konstantem Volumen, ist

$$(7) \qquad Q = c_v\,(T' - T_1) = c_v\,\frac{v_1}{R}\,(p - p_1)$$

Setzt man die beiden Werte für Q aus den Gleichungen (4) und) einander gleich, so folgt

$$(8) \qquad \frac{c_p \cdot p}{R}\,(v_1 - v) = \frac{c_v \cdot v_1}{R}\,(p - p_1)$$

ese Gleichung gilt, selbst wenn die Volumänderung $(v_1 - v)$ und die uckänderung $p_1 - p$ sehr klein werden. Setzt man für diesen Fall

$$v_1 - v = dv$$
$$p_1 - p = dp \quad ,$$

geht die Gleichung (8) über in

$$c_p\,p\,.\,dv = -\,c_v\,v_1\,dp$$

er, da $v_1 = v + dv$, unter Vernachlässigung unendlich kleiner Größen ıerer Ordnung

$$\frac{dp}{p} = -\,\frac{c_p}{c_v}\,\frac{dv}{v}$$

zt man $\frac{c_p}{c_v} = K$, so ergibt sich

$$\frac{dp}{p} = -\,K\,\frac{dv}{v}$$

griert

$$lp = K\,l\,v + lC$$

oder (9)

$$p \cdot v^K = C.$$

s ist die adiabatische Zustandsgleichung (Poisson'sches Gesetz).

Beispiele:

1. Hypsometrische Formel bei adiabatischer Zustandsänderung trockener Luft.

In der Höhe h Meter über dem Boden sei der Druck der Luft $p \frac{kg}{m^2}$ und ihre Dichte s, dann wird wie bei der isothermen Zustandsänderung (s. S. 27) die Beziehung zwischen Höhenänderung und Druckänderung ausgedrückt durch die Gleichung

$$(1) \qquad -dp = dh \, s \cdot 1000 \frac{kg}{qm}$$

Die Dichte s jeder Luftschicht kann nun in Beziehung gebracht werden zu dem in ihr herrschenden Druck p. Sind p_0, v_0, s_0 Druck, Volumen und Dichte einer bestimmten Gasmenge am Boden, v ihr Volumen in der Höhe h Meter, so gilt die adiabatische Zustandsgleichung

$$p \cdot v^K = p_0 \, v_0^K$$

oder

$$\left(\frac{v_0}{v}\right)^K = \frac{p}{p_0}$$

Nun verhalten sich die Dichten einer Gasmenge bei verschiedenem Druck umgekehrt wie ihre Volumina, also

$$\frac{v_0}{v} = \frac{s}{s_0}$$

also

$$\left(\frac{s}{s_0}\right)^K = \frac{p}{p_0}$$

$$s = s_0 \, p_0^{-1/K} \cdot p^{1/K}$$

Setzt man diesen Wert für s in Gleichung (1) ein, so ergibt sich

$$dp = -dh \cdot s_0 \, p_0^{-1/K} \cdot 1000 \cdot p^{1/K}$$

oder

$$\frac{dp}{p^{1/K}} = -1000 \, s_0 \, p_0^{-1/K} \cdot dh$$

Integriert

$$-\frac{k}{k-1} p^{\frac{K-1}{K}} = 1000 \, s_0 \cdot p_0^{-1/K} \cdot h + C_1.$$

Für $h = o$ ist $p = p_0$, also

$$-\frac{k}{k-1} p^{\frac{K-1}{K}} + \frac{k}{k-1} p_0^{\frac{K-1}{K}} = 1000 \, s_0 \cdot p_0^{-1/K} \cdot h$$

oder

$$(2) \quad p^{1-1/K} = p_0^{1-1/K} - \frac{k-1}{k} \cdot 1000 \, s_0 \, p_0^{-1/K} \cdot h$$

Diese Gleichung kann noch weiter umgeformt werden. Aus dem adiabatischen Gesetz $p \cdot v^K = C$ folgt

$$(3) \quad p^{1/K} \cdot v = C^{1/K} = \frac{1}{c}$$

Die allgemeine Zustandsgleichung lautet:

$$p \cdot v = RT$$

Durch Division der beiden letzten Gleichungen ergibt sich

$$(4) \qquad \begin{cases} p^{1-1/K} = RT\,c \\ \text{Ebenso} \quad p_0^{1-1/K} = RT_0\,c \end{cases}$$

Beträgt das Gewicht der Luftmenge 1 kg, so gilt, da v in cbm ausgedrückt wird,

$$1000\ v \cdot s = 1 \text{ kg}$$

Setzt man dies in die Gleichung (3) ein, so ergibt sich

$$(5) \qquad \frac{p^{1/K}}{1000\ s} = \frac{1}{c}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (4) und (5) wird Gleichung (2)

$$RT\,c = RT_0\,c - \frac{k-1}{k}\,c \cdot h$$

oder

$$(6) \qquad T_0 - T = \frac{k-1}{k\,R}\,h$$

d. h. der Temperaturunterschied ist dem Höhenunterschied proportional

oder

$$(7) \qquad h = \frac{k\,R}{k-1}\,(T_0 - T)$$

Für 1 kg Luft ergibt sich

$$R = \frac{p_0\,v_0}{T_0} = \frac{10\,333 \cdot 1}{1{,}293 \cdot 273} = 29{,}3\ mkg$$

Mit $k = \frac{c_p}{c_v} = 1{,}405$ wird annähernd

$$T = T_0 - \frac{1}{100}\,h$$

d. h. bei je 100 Meter Erhebung sinkt die Temperatur um 1°. Der Zusammenhang zwischen Luftdruck und Höhe bei adiabatischer Zustandsänderung ist durch Kurve II Figur (10) S. 28 dargestellt. Zur Konstruktion der Kurve verwendet man zunächst Gleichung (7), indem man zu beliebigen Werten von h die zugehörigen Werte von T berechnet und dann zur Berechnung von p die Gleichung benützt

$$\frac{T}{T_0} = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1-1/K},$$

die durch Division der Gleichungen (4) erhalten wurde. Aus den Kurven I und II erkennt man, daß die Druckabnahme bei adiabatischer Zustandsänderung rascher erfolgt als bei isothermer.

2. Arbeit bei adiabatischer Zusammendrückung und Ausdehnung eines Gases.

Nach Seite 29 ist bei der Zusammendrückung eines Gases die Arbeit

$$d\,A = -\,p\,d\,v.$$

Geschieht die Zusammendrückung adiabatisch, so wird

$$A = -\int_{v_0}^{v_1} p \, dv = -\int_{v_0}^{v_1} \frac{C}{v^k} \, dv = \frac{C}{k-1}\left(\frac{1}{v_1^{k-1}} - \frac{1}{v_0^{k-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{k-1}(p_1 v_1 - p_0 v_0) = \frac{R}{k-1}(T_1 - T_0)$$

unter Berücksichtigung der adiabatischen und der allgemeinen Zustand gleichung.

Bei der Ausdehnung des Gases ändert sich das Zeichen von A.

1. Beispiel: Welche Arbeit ist notwendig, um 1 l Luft von und 760 mm Druck auf die Hälfte zusammenzupressen und wie ho steigt dabei die Temperatur?

$$C = p_0 \cdot v_0^k = 1{,}033 \frac{kg}{cm^2} \cdot 1000^{1{,}41} \, cm^3 = 17\,543 \, cm \, kg$$

$$A = \frac{17\,543}{0{,}405}\left(\frac{1}{500^{0{,}41}} - \frac{1}{1000^{0{,}41}}\right) cm\,kg = 8{,}284 \, mkg$$

$$T_1 - T_0 = \frac{A(k-1)}{R} = \frac{8{,}284 \cdot 0{,}405 \cdot 273}{10{,}33} = 88\tfrac{2}{3}{}^0$$

2. Beispiel: Arbeit beim Aufsteigen der Luft in der Atm sphäre bei adiabatischer Zustandsänderung.

Wenn 1 kg Luft adiabatisch um h Meter emporsteigt und dab die Temperatur der Luft von T_0 auf T_1 fällt, so ist nach der vorig Aufgabe die geleistete Arbeit

$$A_1 = \frac{R}{k-1}(T_0 - T_1)$$

Nun gilt aber Gleichung (7) S. 33

$$T_0 - T_1 = \frac{k-1}{k\,R} \cdot h$$

also $$A_1 = 1 \cdot \frac{h}{k} \, mkg$$ für 1 kg Luft.

Diese Arbeit ist demnach geringer wie die entsprechende Arbei leistung bei isothermem Steigen der Luft, da ein Teil der Hebungsarb durch den Wärmeverlust des Gases gedeckt wird.

Die Differenz beider Arbeitsleistungen beträgt für 1 kg Luft

$$A - A_1 = h - \frac{h}{1{,}41} = \frac{k-1}{k} \cdot h = R(T_0 - T_1) = 29{,}3(T_0 - T_1) \, m$$

Dies ist die auf Kosten der inneren Energie der Luft geleistete Arbe wodurch die Luft um $(T_0 - T_1)^0$ abgekühlt wurde.

---

§ 8. Beispiele für Maxima und Minima.

1. Maximum der Stromstärke einer Batterie.

n galvanische Elemente von der elektromotorischen Kraft e u dem inneren Widerstand r sollen so hintereinander und nebeneinand

geschaltet werden, daß bei dem gegebenen äußeren Widerstand R die Stromstärke ein Maximum werde.

Schaltet man je x Elemente hintereinander, so bekommt man $\frac{n}{x}$ Reihen von Elementen, die parallel geschaltet werden. Die elektromotorische Kraft der Batterie ist dann $V = x\,e$. Der innere Widerstand einer Reihe ist $x \cdot r$, der innere Widerstand von $\frac{n}{x}$ parallelen Reihen

$$\frac{x \cdot r}{\frac{n}{x}} = \frac{x^2 \cdot r}{n}$$

Nach dem Ohm'schen Gesetz beträgt also die Stromstärke:

$$i = \frac{x\,e}{\frac{x^2 \cdot r}{n} + R} = \frac{e}{\frac{x \cdot r}{n} + \frac{R}{x}}$$

Soll i ein Maximum werden, so wird $\frac{e}{i}$ ein Minimum.

Nun ist $\frac{e}{i} = \frac{x \cdot r}{n} + \frac{R}{x}$ ein Minimum, wenn

$$\frac{d\frac{e}{i}}{dx} = \frac{r}{n} - \frac{R}{x^2} = o \text{ ist,}$$

d. h. wenn $x^2 = \frac{R \cdot n}{r}$; $x = + \sqrt{\frac{R \cdot n}{r}}$

oder wenn $\frac{x^2 \cdot r}{n} = R$

d. h. es muß der Widerstand der Batterie gleich dem äußeren Widerstand sein. Mit $x = \sqrt{\frac{R \cdot n}{r}}$ wird $\frac{e}{i}$ ein Minimum, denn

$$\frac{d^2\frac{e}{i}}{dx^2} = \frac{2R}{x^3} \text{ wird positiv.}$$

2. Maximum der Energieentwicklung eines Elements.

Mit welchem äußeren Widerstand R muß man ein Element mit der elektromotorischen Kraft e und dem inneren Widerstand r schließen, damit die im äußeren Widerstand entwickelte Energie ein Maximum wird? Nach dem Joule'schen Gesetz ist der Effekt, d. h. die pro Sekunde entwickelte Energie

$$A = i^2 \cdot R.$$

Nun ist nach dem Ohm'schen Gesetz $i = \frac{e}{r + R}$, also

$$A = \frac{e^2 \cdot R}{(r + R)^2}$$

Soll A ein Minimum werden, so gilt dies auch für den Ausdruck

$$\frac{A}{e^2} = \frac{R}{(r+R)^2}$$

Dies wird ein Maximum oder Minimum, wenn

$$\frac{d\,\frac{A}{e^2}}{dR} = \frac{2R(r+R) - (r+R)^2}{(r+R)^2} = o$$

oder wenn $\frac{R^2 - r^2}{(r+R)^2} = o$, d. h. wenn $R = r$

Die Energie wird ein Maximum, wenn der äußere Widerstand glei dem innern ist, denn $\frac{d^2 A}{dR^2}$ wird für $R = r$ negativ, was sich dur weitere Rechnung leicht ergibt.

3. Minimum der Fortleitungskosten eines elektrischen Stromes von der Stromstärke *i*.

Die Fortleitungskosten eines elektrischen Stromes setzen sich a zwei Beträgen zusammen:

1. aus den Kosten für den Energieverlust durch Wärmeentwicklu in der Leitung,
2. aus den Kosten für die jährliche Verzinsung und Amortisati des Anlagekapitals.

Ist l die Länge der Leitung, q ihr Querschnitt, k ihre spezifisch Leitfähigkeit, $w = \frac{l}{k \cdot q}$ ihr Widerstand, e der Spannungsverlust in d Leitung und t die Zahl der Betriebsstunden im Jahr, so beträgt d Energieverlust im Jahr

$$A = e \cdot i \cdot t = i^2 w \cdot t = \frac{i^2 \cdot l\,t}{k}\,\frac{1}{q} \text{ Wattstunden.}$$

Beträgt der Preis einer Wattstunde m_1 Mark, so ist der Geldwert d Energieverlusts

$$M_1 = \frac{i^2\,l\,t\,m_1}{k}\,\frac{1}{q} = \frac{C_1}{q} \text{ Mark [zur Abkürzung].}$$

Das Anlagekapital ist annähernd proportional dem Kupferpreis der Kab Betragen die Anlagekosten für die Längeneinheit und Querschnittseinh der Leitung m_2 Mark und rechnet man für Zins und Amortisation p % so ergibt dies

$$M_2 = \frac{l \cdot q \cdot m_2 \cdot p}{100} = C_2 \cdot q \text{ Mark [zur Abkürzung].}$$

Während also mit wachsendem Querschnitt die Kosten des Energi verlusts abnehmen, nehmen die Kosten der Verzinsung zu. Die Gesam kosten für die Fortleitung des Stroms betragen

$$M = M_1 + M_2 = \left(\frac{C_1}{q} + C_2 \cdot q\right) \text{ Mark.}$$

oll nun derjenige Leitungsquerschnitt berechnet werden, für den diese osten ein Minimum ausmachen, so gilt

$$\frac{d\,M}{d\,q} = -\frac{C_1}{q^2} + C_2 = o.$$

amit wird

$$q = \sqrt{\frac{C_1}{C_2}} = i\sqrt{\frac{t \cdot m_1 \cdot 100}{k \cdot m_2 \cdot p}}$$

$$M_1 = M_2 = \sqrt{C_1\,C_2} = i\,l\sqrt{\frac{t \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot p}{100\,k}}$$

h. der günstigste oder wirtschaftlichste Querschnitt ist dann vorhanden, enn der Geldwert des Energieverlusts in der Leitung gleich den Kosten r die Verzinsung der Leitungsanlage ist.

4. Minimum des Fehlers bei Bestimmung der Stromstärke mit Hilfe der Tangentenbussole.

Ist α der Ablenkungswinkel der Magnetnadel, so ist die Stromstärke $= C\,tg\,\alpha$, wobei C eine Konstante ist (der Reduktionsfaktor der Tangentenbussole). Die Ablesung von α liefert jedoch keinen genauen ert. Beträgt der Ablesungsfehler $\Delta\,\alpha$, ist also α der wahre Wert, $+ \Delta\,\alpha$ der beobachtete Wert des Ablenkungswinkels, so entspricht esem die Stromstärke

$$i + \Delta\,i = C\,tg\,(\alpha + \Delta\,\alpha).$$

ach dem Taylor'schen Satz wird nun

$$tg\,(\alpha + \Delta\,\alpha) = tg\,\alpha + \frac{d\,tg\,\alpha}{d\,\alpha}\,\Delta\,\alpha + \frac{d^2\,tg\,\alpha}{d\,\alpha^2}\,\Delta^2\,\alpha + \ldots\ldots$$

nun $\Delta\,\alpha$ klein, so macht man nur einen geringen Fehler, wenn man s zweite und die folgenden Glieder der Reihe vernachläßigt, dann gilt

$$i + \Delta\,i = C\,tg\,\alpha + \frac{C}{\cos^2\alpha}\,\Delta\,\alpha$$

$$\Delta\,i = \frac{C}{\cos^2\alpha}\,\Delta\,\alpha$$

$$\frac{\Delta\,i}{i} = \frac{\Delta\,\alpha}{\cos^2\alpha \cdot tg\,\alpha} = \frac{\Delta\,\alpha}{\sin\alpha \cdot \cos\alpha} = \frac{2\,\Delta\,\alpha}{\sin 2\,\alpha}$$

Der Beobachtungsfehler $\Delta\,\alpha$ ruft also einen Fehler $\Delta\,i$ in der omstärke hervor, dessen Verhältnis zur Stromstärke selbst $\frac{\Delta\,i}{i}$ der re- ve Fehler der Stromstärke heißt. Soll er ein Minimum werden, so ß auch $\frac{2}{\sin 2\,\alpha}$ ein Minimum werden oder sin 2 α ein Maximum. es trifft ein für $\alpha = 45^0$.

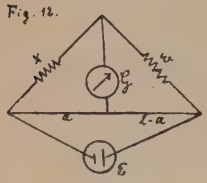
5. Minimum des Fehlers bei der Widerstandsbestimmung in de Wheatstone'schen Brücke.

Ist x der gesuchte Widerstand, w der Vergleichswiderstand, l ganze Länge des Brückendrahts, a die Länge des Brückendrahts der Seite von x bis zum Kontakt mit dem Galvanometerdraht, so g wenn durch das Galvanometer G kein Strom fließt,

$$x = w \frac{a}{l - a} = w f(a) \quad \text{[zur Abkürzung]}$$

Ein kleiner Ablesungsfehler Δa in a bringt einen Fehler Δx in x h

Fig. 12.



vor und es ist

$$x + \Delta x = w f(a + \Delta a)$$

$$= w [f(a) + f'(a) \Delta a + f''(a) (\Delta a)^2 + \ldots$$

Für kleines Δa kann das dritte Glied und die f genden Glieder vernachläßigt werden, es gilt da

$$\Delta x = w f'(a) \Delta a$$

$$= w \frac{d \frac{a}{l - a}}{d a} \Delta a = - w \cdot \frac{l}{(l - a)^2} \Delta a$$

$$\frac{\Delta x}{x} = \frac{- l}{a (l - a)} \Delta a$$

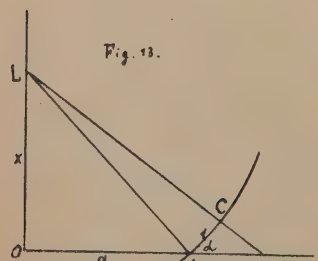
Dies ist der relative Fehler in x, er wird ein Minimum, wenn $a (l -$ ein Maximum wird, d. h. wenn $\frac{d (a (l - a))}{d a} = o$, oder we

$l - 2 a = o \quad , \quad a = \frac{l}{2}$ wird, d. h. wenn der Kontakt in der Mit des Meßdrahts aufsitzt.

6. Maximum der Beleuchtungsstärke.

Wie hoch muß eine Lichtquelle über einer horizontalen Tischfläch angebracht werden, damit in einem gegebenen Punkt A derselben i Abstand a cm von der Vertikalen durch die Lichtquelle die Beleuchtung stärke ein Maximum wird?

Fig. 13.



In der Figur sei OA die Tischplatte, die Lichtquelle von der Intensität J im Ab stand x von der Tischplatte und A der b leuchtete Punkt.

Die von L pro Sekunde ausgesandt Lichtmenge J verteilt sich im Abstan $LA = r$ auf die Oberfläche einer Kugel vo Radius r und Mittelpunkt L. Die Beleuchtung stärke dieser Kugel in A, d. h. die Lichtmeng die die Flächeneinheit AC der Kugel pro Sekunde trifft, beträgt als $\frac{J}{4 \pi r^2}$. Bildet nun die Tischfläche mit der Tangentialebene dieser Kug

A den Winkel α, so trifft die Lichtmenge $\frac{J}{4\pi r^2}$ auf dem Tisch die äche $AD = \frac{1}{\cos \alpha}$, die Beleuchtungsstärke der horizontalen Tischfläche A beträgt also

$$B = \frac{J}{4\pi r^2} \cos \alpha$$

$$= \frac{J}{4\pi (x^2 + a^2)} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{J}{4\pi} \cdot \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}$$

es wird ein Maximum, wenn $\frac{dB}{dx} = o$

h. wenn

$$\frac{d \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}}}{dx} = o$$

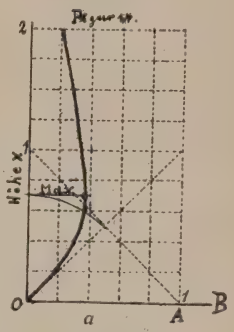
$$\frac{3x^2 (x^2 + a^2)^{1/2} - (x^2 + a^2)^{3/2}}{(x^2 + a^2)^3} = o$$

$$\frac{(x^2 + a^2)^{1/2} (2x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^3} = o$$

n. wenn

$$2x^2 - a^2 = o$$

$$x = \frac{a}{2} \sqrt{2}$$



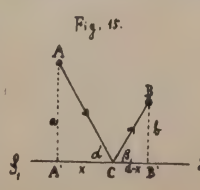
diesen Wert von x wird B ein Maximum, denn durch weitere Rechg zeigt sich, daß $\frac{d^2 B}{dx^2}$ für diesen Wert negativ wird. Die günstigste ıe ist also gleich der halben Diagonale des über a konstruierten drats.

Die nebenstehende Figur zeigt für jede Höhe $OL = x$ die zugege Beleuchtungsstärke B als Abscisse für $a = 1$ und $\frac{J}{4\pi} = 1$, das Bild der Funktion

$$B = \frac{x}{(x^2 + 1)^{3/2}}.$$

bleitung des Reflexions-Gesetzes aus dem Prinzip von Fermat.

Ist A ein leuchtender Punkt, S_1 S_2 ein Spiegel, ird der Lichtstrahl AC in C zurückgeworfen in Richtung CB und zwar nach dem Fermatn Prinzip der schnellsten Ankunft derart, daß Licht den Weg ACB in der kürzesten Zeit zuegt, d. h. daß der Weg ACB von allen Wegen 4 zum Spiegel nach B am kürzesten ist, es muß also $AC + BC$ Minimum sein. Fällt man von A und B die Lote $AA' = a$ und



$BB' = b$ auf den Spiegel und bezeichnet $A'B'$ mit d und A mit x, so wird $B'C = d - x$ und

$$AC = \sqrt{x^2 + a^2}$$

$$BC = \sqrt{(d-x)^2 + b^2}$$

$$AC + BC = \sqrt{x^2 + a^2} + \sqrt{(d-x)^2 + b^2} = f(x)$$

Dies wird ein Minimum, wenn

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} - \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}} = o$$

oder wenn

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{(d-x)^2 + b^2}}; \text{ d. h. wenn } \frac{A'C}{AC} = \frac{B'C}{BC}$$

Ist $\angle ACA' = \alpha$, $\angle BCB' = \beta$, so folgt aus der vorhergehen Gleichung

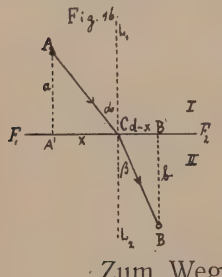
$$\cos \alpha = \cos \beta, \text{ d. h. } \alpha = \beta.$$

Dies ist das Reflexionsgesetz in seiner gewöhnlichen Form.

Anmerkung. Die Ableitung des Reflexionsgesetzes aus dem Fermat's Prinzip kann auch folgendermaßen geschehen:

Alle Punkte C, für welche $AC + CB = r + r_1$ einen beliebigen konst Wert s hat, liegen auf einer Ellipse mit den Brennpunkten A und B. Diese schn im allgemeinen die Gerade $S_1 S_2$ in 2 Punkten C_1 und C_2. Wird nun die Kons s kleiner und kleiner, so rücken die Punkte C_1 und C_2 näher zusammen, bis sch lich die Ellipse die Gerade $S_1 S_2$ in C berührt, dann hat $r + r_1$ seinen kleinsten und die Brennstrahlen AC und BC dieser Ellipse bilden nach einem bekannten mit der Tangente $S_1 S_2$ gleiche Winkel.

8) Ableitung des Brechungsgesetzes aus dem Prinzip von Fer



$F_1 F_2$ ist die Grenzfläche 2er Medien I un in welchen das Licht die Geschwindigkeiten c_1 c_2 besitzt. Ein Lichtstrahl, der von A nach B dr wird nun nach dem Fermat'schen Prinzip in ei solchen Punkt C der Grenzfläche gebrochen, der Weg ACB in der kürzesten Zeit zurückge wird.

Zum Weg AC braucht das Licht $\frac{AC}{c_1}$ Sekunden,

zum Weg CB „ „ „ $\frac{AB}{c_2}$ Sekunden,

zum Weg ACB also $t = \frac{AC}{c_1} + \frac{CB}{c_2}$ Sekunde

Aus den Dreiecken $AA'C$ und $BB'C$ folgt nun bei derselben Bez nungsweise wie in der vorigen Aufgabe

$$AC = \sqrt{a^2 + x^2}, \quad CB = \sqrt{b^2 + (d-x)^2}$$

$$t = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

Dieser Ausdruck wird ein Minimum, wenn $\frac{dt}{dx} = o$, d. h. wenn

$$\frac{x}{c_1 \sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{d - x}{c_2 \sqrt{b^2 + (d - x)^2}} = o$$

Errichtet man auf der Fläche F in C das Lot $L_1 L_2$ und setzt

$$\angle ACL_1 = \angle CAA' = \alpha$$
$$\angle BCL_2 = \angle CBB' = \beta \quad ,$$

wird

$$\sin \alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

$$\sin \beta = \frac{d - x}{\sqrt{b^2 + (d - x)^2}}$$

mit geht die obige Gleichung über in

$$\frac{\sin \alpha}{c_1} = \frac{\sin \beta}{c_2}$$

er

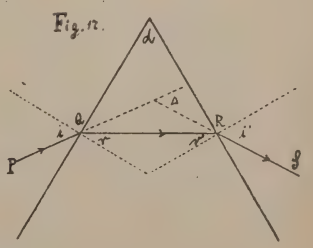
$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_1}{c_2} = n$$

es ist das Brechungsgesetz von Snellius. t wird ein Minimum, weil ein extremer Wert sich ergibt und weil sich leicht andere Wege CB finden lassen, die in größerer Zeit zurückgelegt werden, dagegen ne, die in geringerer Zeit zurückgelegt würden.

. Minimum der Ablenkung beim Durchgang eines Lichtstrahls durch ein Prisma.

Trifft ein Lichtstrahl PQ unter dem Einfallswinkel i auf die eine che eines Prismas vom brechenden Winkel α, so wird er nach QR rochen und bilde mit dem Einfallslot in Q den Winkel r, mit dem fallslot in R auf der zweiten Prismenfläche den Winkel r'. In R l der Lichtstrahl wieder gebrochen nach RS, das mit dem Einfalls- in R den Winkel i' bilde. Die Ablenkung des Lichtstrahls ist dann Winkel Δ, der von den Verlängerungen von PQ und SR einge- ossen wird. Es gelten nun die Gleichungen:

$$(1) \quad \begin{cases} \sin i = n \sin r \\ r + r' = \alpha \\ \sin i' = n \sin r' \\ \Delta = i + i' - \alpha \end{cases}$$



ei n der Brechungsexponent des Prismas

Durch Differentiation dieser Gleichungen bt sich

$$\cos i \, d\, i = n \cos r \, dr$$
$$dr + dr' = o$$
$$\cos i' \, d\, i' = n \cdot \cos r' \, dr'$$
$$d\, \Delta \quad = d\, i + d\, i'$$

Daraus folgen die Gleichungen:

$$(2)\quad \begin{cases} dr = \dfrac{\cos i}{n \cos r}\, di \\ dr' = \dfrac{-\cos i}{n \cos r}\, di \\ d i' = \dfrac{n \cos r'}{\cos i'}\, dr' = -\dfrac{n \cos r' \cos i}{n \cos r \cos i'}\, di \\ d \Delta = \left(1 - \dfrac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'}\right) di \end{cases}$$

Soll der Ablenkungswinkel Δ ein Minimum werden bei Veränder des Einfallswinkels i, so muß sein

$$\frac{d \Delta}{d i} = 1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'} = o$$

oder $$\cos i \cos r' = \cos r \cos i'$$

$$(3)\quad \frac{\cos i}{\cos r} = \frac{\cos i'}{\cos r'}$$

Da aber nach den Gleichungen (1)

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{\sin i'}{\sin r'}$$

so wird $i = i'$ und $r = r'$, was sich aus folgender Ableitung ergi

Aus (3) folgt $$\frac{\cos^2 i}{\cos^2 r} = \frac{\cos^2 i'}{\cos^2 r'}$$

oder $$\frac{1 - \sin^2 i}{1 - \sin^2 r} = \frac{1 - \sin^2 i'}{1 - \sin^2 r'}$$

Mit Hilfe der Gleichungen (1) ergibt sich

$$\frac{1 - n^2 \sin^2 r}{1 - \sin^2 r} = \frac{1 - n^2 \sin^2 r'}{1 - \sin^2 r'}$$

oder $$n^2 - \frac{n^2 - 1}{1 - \sin^2 r} = n^2 - \frac{n^2 - 1}{1 - \sin^2 r'}$$

d. h. $$\sin^2 r = \sin^2 r'$$

$$\sin r = \pm \sin r'$$

Da r und r' beide positiv und $< 90^0$ sein müssen, so folgt $r =$ und damit auch $i = i'$. Die Ablenkung wird also ein Minimum, we der Strahlengang symmetrisch zur Halbierungslinie des brechend Winkels erfolgt. Daß ein Minimum vorliegt, erkennt man daran, $\frac{d^2 \Delta}{d i^2}$ positiv wird. Für $r = r'$ und $i = i'$ ergibt sich durch weit Rechnung

$$\frac{d^2 \Delta}{d i^2} = \frac{2 \sin (i + r) \sin (i - r)}{\cos i \sin i \cos^2 r}$$

Dieser Wert ist positiv für $i > r$, dies gilt, wenn $n > 1$. Unter die Voraussetzung wurden aber die obigen Formeln abgeleitet. Für $n <$ wird $i < r$, aber dann wird

$$\Delta = \alpha - (i + i')$$

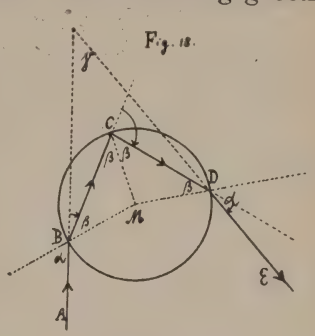
$$\frac{d\Delta}{di} = -\left(1 - \frac{\cos i \cos r'}{\cos r \cos i'}\right) = o$$

$$\frac{d^2\Delta}{di^2} = -2\,\frac{\sin(i + r)\sin(i - r)}{\cos i \sin i \cos^2 r}$$

ieser Wert wird positiv, also wird auch hier für $i = i'$ und $r = r'$ e Ablenkung ein Minimum.

10. Theorie des Regenbogens nach Descartes.

Der Lichtstrahl AB trifft auf den Regentropfen und bildet mit dem nfallslot MB den Winkel α. Der gebrochene Strahl BC bildet mit esem Lot den Winkel β, der bestimmt ist durch das Brechungsgesetz $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$, wobei n den Brechungsexponenten des Regentropfens für eine bestimmte rbe des weißen Lichts bedeutet. Durch se Brechung erleidet der Lichtstrahl eine te Ablenkung um den Winkel $(\alpha - \beta)$. r Lichtstrahl BC wird in C zurückgeworfen l erfährt dabei eine zweite Ablenkung um n Winkel $(180^\circ - 2\beta)$. Beim Austritt dem Regentropfen in D erleidet der Strahl e dritte Ablenkung um den Winkel $(\alpha - \beta)$. Die Gesamtablenkung ägt also $180^\circ - (4\beta - 2\alpha)$ oder der austretende Strahl bildet mit n eintretenden den spitzen Winkel



$$\gamma = 4\beta - 2\alpha.$$

ser Winkel ändert sich mit dem Einfallswinkel α und erreicht einen emen Wert, wenn

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = 4\,\frac{d\beta}{d\alpha} - 2 = o$$

. wenn $\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{1}{2}$.

ist $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ oder $\sin\alpha = n\sin\beta$.

renziert: $\cos\alpha\, d\alpha = n\cos\beta\, d\beta$

$$\frac{d\beta}{d\alpha} = \frac{\cos\alpha}{n\cos\beta} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}}$$

eicht also einen extremen Wert, wenn

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = \frac{1}{2}, \text{ d. h. wenn } \sin\alpha = \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}$$

Für den hieraus zu berechnenden Wert von α wird γ ein Maximum, $\frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}$ für diesen Wert negativ wird, was sich leicht durch weitere

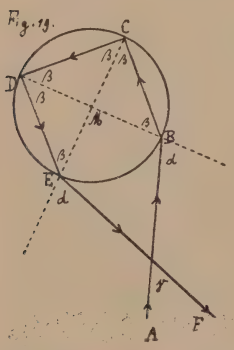
Rechnung ergibt. Dies Maximum von γ ist für die verschiedenen Farbe aus denen das weiße Sonnenlicht besteht, verschieden groß, da i Brechungsexponent verschieden ist. So ergibt sich

Rot der Linie B: $n = 1{,}330$, $\alpha = 59^\circ\,35'$, $\gamma = 42^\circ\,30'$
Gelb der Linie D: $n = 1{,}334$, $\alpha = 59^\circ\,20'$, $\gamma = 42^\circ$
Violett der Linie H: $n = 1{,}344$, $\alpha = 58^\circ\,50'$, $\gamma = 40^\circ\,20'$.

Die dem einfallenden Strahl $\alpha = 59^\circ 35'$ benachbarten Strahl erleiden für die rote Farbe annähernd dieselbe Ablenkung, treffen al als Parallelstrahlenbündel in das Auge des Beobachters und bring die Empfindung rot hervor, während die andersfarbigen Strahlen z streut werden. Um den Gegenpunkt der Sonne in bezug auf den B obachter sieht dieser also einen äußeren roten Kreis mit Halbmess $\gamma = 42^\circ 30'$, einen inneren violetten Kreis mit Halbmesser $\gamma = 40^\circ 2$ und dazwischen die übrigen Farben.

Zur Erklärung des Nebenregenbogens nimmt man eine doppe Zurückwerfung des Lichtstrahls an der Wand des Regenbogens an, daß die Gesamtablenkung $360^\circ - (6\,\beta - 2\,\alpha)$ beträgt, der austrete Strahl bildet dann mit dem eintretenden d spitzen Winkel

$$\gamma = 180^\circ - (6\,\beta - 2\,\alpha).$$



Dieser Winkel erreicht einen extremen Wert, we

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} = -6\,\frac{d\beta}{d\alpha} + 2 = 0$$

d. h. wenn $\dfrac{d\beta}{d\alpha} = \dfrac{1}{3}$

oder $\dfrac{\sqrt{1 - \sin^2\alpha}}{\sqrt{n^2 - \sin^2\alpha}} = \dfrac{1}{3}$; $\sin\alpha = \sqrt{\dfrac{9 - n}{8}}$

Für den hieraus berechneten Wert von α wird γ ein Minimum, w $\dfrac{d^2\gamma}{d\alpha^2} = -6\,\dfrac{d^2\beta}{d\alpha^2}$ positiv wird.

Für die verschiedenen Farben des Spektrums ergibt sich

Rot der Linie B: $n = 1{,}330$, $\alpha = 71^\circ\,56',5$, $\gamma = 50^\circ\,5'$
Gelb der Linie D: $n = 1{,}334$, $\alpha = 71^\circ\,48'$, $\gamma = 51^\circ\,6'$
Violett der Linie H: $n = 1{,}344$, $\alpha = 71^\circ\,29'$, $\gamma = 53^\circ\,46'$

Um den Gegenpunkt der Sonne in bezug auf den Beobachter sieht dies also einen inneren roten Kreis mit Halbmesser $\gamma = 50^\circ\,5'$, einen äußer violetten Kreis mit Halbmesser $\gamma = 53^\circ\,46'$ und dazwischen die ü rigen Farben.

Bestimmung der Coefficienten

welche bei der

Berechnung der Integrale

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \text{ und } \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$

auftreten.

---

naugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

hohen philosophischen Fakultät

der

Friedrich-Alexanders-Universität Erlangen

vorgelegt

von

Henry Benner

aus Cressman, U.S.A.

Tag der mündlichen Prüfung: 7. Juli 1897.

BOSTON, U.S.A.
GINN & COMPANY, PUBLISHERS
The Athenæum Press
1899

Vorrede.

Die für die Berechnung eines Integrals $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$ gewöhnlich in Lehrbüchern gegebene Methode habe ich in § 1 auseinander gesetzt und eigt, dass das $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$ in die Form

$$\frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \sqrt{1+ax+bx^2}\left(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}\right) + A\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + C$$

acht werden kann. Man differenzirt diese Gleichung, multiplizirt mit zel $\sqrt{1+ax+bx^2}$, vergleicht die Coefficienten der Potenzen von x auf en Seiten, und erhält dadurch eine Reihe von linearen Relationen, mittelst her man alle Coefficienten A und A_k bestimmen kann. Zwar erhält man n dieses recurrente Verfahren nach und nach alle Coefficienten, aber chst keinen geschlossenen Ausdruck. Man findet auf diese Weise nur llgemeine Form eines Ausdruckes als Functionen von n, und als rationale tionen von a und b, aber man kann die Coefficienten nicht explicite benen.

iese Coefficienten werden zu complicirt als dass es leicht gelingen könnte zahlentheoretische Functionen in das Gebiet der bisher bekannten Functn der Zahlen einzufügen. Ich habe mich aber bemüht sie wenigstens ite zu bestimmen und durch einfachere Functionen von a und b auszuen. Um dies auszuführen habe ich in § 2 die Ausdrücke

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$V = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

führt und in Reihen,

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots$$
$$V = v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4 + \cdots$$

entwickelt. Der binomische Lehrsatz liefert sämmtliche Coefficienten
Entwicklung von U, § 3, und die Coefficienten in der Reihe für V lasse
als Summen von Produkten dieser Binomial-Coefficienten ausdrücken
Zwischen den Coefficienten in den Reihen für U und V bestehen die li
Relationen, § 4 und § 8,

$$(2n+2)u_{n+1} + (2n+1)au_n + 2nbu_{n-1} = 0,$$
$$(2n+2)v_{n+1} + (2n+1)av_n + 2nbv_{n-1} = 0.$$

Aus ihnen lassen sich, § 12, die Determinanten

$$\begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{vmatrix} = -\frac{ab^{n-1}}{n}$$

und

$$\begin{vmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{a^2b^{n-1}}{n}$$

bilden.

In den Reihen für U und V betrachte ich nun, § 13, die Reste

$$U - (u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots\cdots + u_nx^n)$$
$$V - (v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4 + \cdots\cdots + v_nx^n)$$

und führe die Grössen

$$U_n = (U - u_0 - u_1x - u_2x^2 - \cdots\cdots - u_nx^n)\sqrt{1+ax+bx^2}$$
$$V_n = (V - v_1x - v_2x^2 - v_3x^3 - \cdots\cdots - v_nx^n)\sqrt{1+ax+bx}$$

ein.

Mittelst der Relationen zwischen den Coefficienten in den Reihen
und V, Formeln (12) und (20), bekomme ich in § 14 einfache We
$\frac{dU_n}{dx}$ und $\frac{dV_n}{dx}$. Durch Elimination, § 15, aus diesen beiden Diffe
Quotienten ergibt sich in § 16 mittelst der Determinante, F. 25,

$$ab^n\int\frac{x^ndx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \sqrt{1+ax+bx^2}\sum_{\gamma=0}^{\gamma=n-1}(u_\gamma v_n - v_\gamma u_n)x^\gamma + u_n a\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + C.$$

Diese Methode hat den Vorteil sich auf die Berechnung des ellip
Integrals

$$\int\frac{x^ndx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$

lehnen zu lassen. Zu diesem Zweck werden, §§ 25–35,

$$U = \frac{1}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$V = \frac{a}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$W = \frac{a}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} \int \frac{xdx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}$$

eihen entwickelt:

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots\cdots$$

$$V = v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4 + \cdots\cdots$$

$$W = w_2 x^2 + w_3 x^3 + w_4 x^4 + w_5 x^5 + \cdots\cdots$$

u_k sind leicht berechenbar und die v_k und w_k lassen sich als Summen ogener Produkten der u_k darstellen. Aus den Reihen für U, V, und W en wieder Ausdrücke

$$U_n = (U - u_0 - u_1 x - u_2 x^2 - \cdots\cdots - u_n x^n)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$

$$V_n = (V - v_1 x - v_2 x^2 - \cdots\cdots - v_n x^n)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$

$$W_n = (W - w_2 x^2 - w_3 x^3 - \cdots\cdots - w_n x^n)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}$$

det, und aus den Differential-Quotienten $\frac{dU_n}{dx}$, $\frac{dV_n}{dx}$, $\frac{dW_n}{dx}$ erhält man durch ination

$$\frac{2n+3}{2} cD \int \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} = -(D_1 U_n + D_2 V_n + D_3 W_n) + C$$

$$\frac{2n+3}{2} cD \int \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}$$

$$= \sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3} \sum_{\gamma=0}^{\gamma=n} (D_1 u_\gamma + D_2 v_\gamma + D_3 w_\gamma) x^\gamma$$

$$- aD_2 \int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} - aD_3 \int \frac{xdx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} + C,$$

$$D \equiv \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ v_n & v_{n+1} & v_{n+2} \\ w_n & w_{n+1} & w_{n+2} \end{vmatrix}$$

ist, und D_1, D_2, und D_3 die Unterdeterminanten nach der ersten Colonne
D sind, §§ 36–38.

Ich benutze diese Gelegenheit, um meinem verehrten Lehrer Herrn Prof
Gordan meinen herzlichen Dank auszusprechen für die Anregung die er
bei dieser Arbeit zu Theil werden lies.

Abschnitt I.

1. Reduktion des Integrals $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$ durch Differentiation. 1

2. Einführung von $U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$ und

$$V = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$ 3

3. Berechnung von u_n und $u_{n,k}$. 4

4. $(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2nbu_{n-1} = 0.$ 6

5. Verification der Formel

$$(2n+2)\,au_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2nbu_{n-1} = 0.$$ 7

6. $(2n+2)\,u_{n+1,k} + (2n+1)\,u_{n,k} + 2nu_{n-1,k-1} = 0.$ 9

7. Berechnung von v_n. 10

8. $(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} = 0.$ 12

9. Verification der Formel

$$(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} = 0.$$ 13

10. $v_{n,g} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r-1,k}\,u_{r,s}}{r+1}.$ 15

11. $(2n+2)\,v_{n+1,g} + (2n+1)\,v_{n,g} + 2nv_{n-1,g-1} = 0.$ 16

12. Determinanten $\begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{vmatrix}$ und $\begin{vmatrix} u_{n+1} & v_{n+1} \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{vmatrix}$. 19

13. U_n und V_n. 20

14. $\frac{dU_n}{dx}$ und $\frac{dV_n}{dx}$. 21

15. $v_n\left(\frac{dU_n}{dx} - \frac{dU_{n-1}}{dx}\right) = u_n\left(\frac{dV_n}{dx} - \frac{dV_{n-1}}{dx}\right).$ 23

16. $$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_n V_n - v_n U_n + C$$

$$= u_n a \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + \sqrt{1+ax+bx^2} \sum_{k=0}^{k=n-1} (u_k v_n - v_k u_n)\, x^k + C'.$$

17. Anwendungen der Formel.

Abschnitt II.

18. $$Q = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{x^a dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

19. $(2n+2)\, q_{n+1} + (2n+1)\, a q_n + 2nb q_{n-1} = 0.$

20. Verification der Formel

$$(2n+2)\, q_{n+1} + (2n+1)\, a q_n + 2nb q_{n-1} = 0.$$

21. $(2a-2)\, l_n + (2a-1)\, a p_n + 2ab q_n = 0.$

22. $2a u_n + a v_n + 2b q_n = 0.$

23. $b^a Q = u_a V_n - v_a U_n.$

24. $$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

Abschnitt III.

25. Erweiterung der Methode.

26. Berechnung von u_n.

27. $(2n+2)\, u_{n+1} + (2n+1)\, a u_n + 2nb u_{n-1} + (2n-1)\, c u_{n-2} = 0.$

28. Verification der Formel

$$(2n+2)\, u_{n+1} + (2n+1)\, a u_n + 2nb u_{n-1} + (2n-1)\, c u_{n-2} = 0.$$

29. Berechnung von v_n.

30. $(2n+2)\, v_{n+1} + (2n+1)\, a v_n + 2nb v_{n-1} + (2n-1)\, c v_{n-2} = 0.$

31. Verification der Formel

$$(2n+2)\, v_{n+1} + (2n+1)\, a v_n + 2nb v_{n-1} + (2n-1)\, c v_{n-2} = 0.$$

32. $$v_{n,g,h} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=\frac{n-r-1}{3}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \sum_{t=0}^{t=\frac{r}{3}} \frac{u_{n-r-1,k,l} u_{r,s,t}}{r+1}.$$

33. Berechnung von w_n. 59

34. $(2n+2)\,w_{n+1} + (2n+1)\,aw_n + 2nbw_{n-1} + (2n-1)\,cw_{n-2} = 0$. 52

35. Formel für $w_{n,g,h}$. 53

36. U_n, V_n, und W_n. 54

37. $\frac{dU_n}{dx}$, $\frac{dV_n}{dx}$, $\frac{dW_n}{dx}$. 55

38. $\frac{2n+3}{2}\,cD\int \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = -(D_1U_n + D_2V_n + D_3W_n) + C$. 56

39. Anwendungen der Formel. 57

DISSERTATION.

Abschnitt I.

1. Reduction des Integrals $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$ durch Differentiation.

Methoden für die Behandlung von Integralen zweiter Gattung

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}},$$

positiv, werden gewöhnlich durch eine vorhergehende Differentiation wonnen. Man geht von dem Ausdruck $x^{m-1}\sqrt{1+ax+bx^2}$ aus und ferenzirt nach x.

$$\left(x^{m-1}\sqrt{1+ax+bx^2}\right)' = \frac{(m-1)\,x^{m-2}(1+ax+bx^2) + \left(\frac{a}{2}+bx\right)x^{m-1}}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$= \frac{mbx^m + \frac{2m-1}{2}ax^{m-1} + (m-1)x^{m-2}}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

Durch Integration bekommt man

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \frac{x^{m-1}\sqrt{1+ax+bx^2}}{mb} - \frac{(2m-1)\,a}{2mb}\int \frac{x^{m-1}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$- \frac{m-1}{mb}\int \frac{x^{m-2}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + C.$$

Wir haben also eine Recursionsformel, durch welche das Integral

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

auf einfachere Integrale zurückführen lässt. Durch Wiederholung der-
en wird das Integral schliesslich auf das Integral

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

zurückgeführt. Hieraus folgt, dass das Integral

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

in die Form

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \sqrt{1+ax+bx^2}\,(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}) + A\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + C$$

gebracht werden kann, wo die Coefficienten A und A_k Constanten sind. sie zu berechnen differenzirt man, multiplizirt dann mit $\sqrt{1+ax+bx^2}$, vergleicht die Coefficienten der Potenzen von x auf beiden Seiten. Hierdu erhält man eine Reihe von Recursionsformeln, aus welchen die Constante und A_k nach und nach bestimmt werden können. Als Beispiel berechnen das Integral

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \sqrt{1+ax+bx^2}\,(A_2x^2 + A_1 x + A_0) + A\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} +$$

$$\frac{x^3}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \sqrt{1+ax+bx^2}\,(2A_2x + A_1) + \frac{\frac{a}{2}+bx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}(A_2x^2 + A_1 x + \cdots$$

$$+ \frac{A}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

$$x^3 = (bx^2+ax+1)(2A_2x + A_1) + \left(bx + \frac{a}{2}\right)(A_2x^2 + A_1x + A_0) + A.$$

$$x^3 : 1 = 3bA_2, \qquad A_2 = \frac{1}{3b}.$$

$$x^2 : 0 = \tfrac{5}{2}aA_2 + 2bA_1, \qquad A_1 = -\frac{5a}{12b^2}.$$

$$x : 0 = 2A_2 + \tfrac{3}{2}aA_1 + bA_0, \qquad A_0 = \frac{15a^2 - 16b}{24b^3}.$$

$$x^0 : 0 = A_1 + \frac{a}{2}A_0 + A, \qquad A = \frac{12ab - 5a^3}{16b^3}.$$

Also ist

$$\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \sqrt{1+ax+bx^2}\left(\frac{1}{3b}x^2 - \frac{5a}{12b^2}x + \frac{15a^2-16b}{24b^3}\right) + \frac{12ab-5a^3}{16b^3}\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + C.$$

2. Einführung von

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \text{ und } V = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

Wir haben gezeigt, dass das Integral $\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$ in die Form

$$\frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \sqrt{1+ax+bx^2}\,(A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}) + A\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + C$$

ebracht werden kann.

Wir wollen in dieser Gleichung x einen so kleinen Wert geben, dass man ejenigen Potenzen von x, deren Exponent grösser als n ist, vernachlässigen nn. Wir können dann nach dieser Voraussetzung das Integral linkerhand rnachlässigen. Unsere Gleichung nimmt bis auf höhere Potenzen von x lgende Form an :

$$= \sqrt{1+ax+bx^2}\,(A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}) + A\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + C,$$

er

$$\frac{C}{\sqrt{1+ax+bx^2}} - \frac{A}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = A_0 + A_1 x + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}.$$

Wir führen linkerhand die Bezeichnungen U und V ein

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \tag{2}$$

d

$$V = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \tag{3}$$

d erhalten :

$$-CU - \frac{A}{a}V = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots + A_{n-1}x^{n-1}.$$

Um die Coefficienten A und A_k zu berechnen entwickeln wir nun U und V i Reihen welche nach steigenden Potenzen von x fortschreiten.

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots + u_n x^n. \tag{4}$$

$$V = v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + \cdots + v_n x^n. \tag{5}$$

Es ist erlaubt die Reihe für V mit $v_1 x$ zu beginnen.

3. Berechnung von u_n und $u_{n,k}$.

Wir wollen zunächst die Coefficienten u_n in

$$U = \frac{1}{\sqrt{1 + ax + bx^2}}$$

berechnen. Zu diesem Zweck entwickeln wir $(1 + ax + bx^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach d polynomischen Lehrsatz. Der numerische Coefficient im allgemeinen Glied

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2}) \cdot \cdots \cdot (-\frac{1}{2} - r + 1)}{\alpha\,!\;\beta\,!} a^\alpha b^\beta x^{\alpha + 2\beta},$$

wo $r = \alpha + \beta$ ist, hat den Wert

$$(-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2r - 1)}{2^r\;\alpha\,!\;\beta\,!},$$

welchen wir durch $\binom{-\frac{1}{2}}{\alpha,\beta}$ bezeichnen. Wir erhalten alle Coefficienten

$$u_n = \Sigma (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2r - 1)}{2^r\;\alpha\,!\;\beta\,!} a^\alpha b^\beta = \Sigma \binom{-\frac{1}{2}}{\alpha,\beta}$$

wenn wir in der Formel α und β alle ganzen positiven Werte geben die d Gleichung $n = \alpha + 2\beta$ genügen. Wir setzen also der Reihe nach

$$\beta = 0, 1, 2, 3, \cdots k, \cdots \frac{n-1}{2} \text{ oder } \frac{n}{2}.$$

Der letzte Wert von β richtet sich darnach ob n eine ungrade oder grade Za ist. Ihnen entsprechen die Werte

$$n,\ n-2,\ n-4,\ n-6,\ \cdots\ n-2k,\ \cdots\ 1 \text{ oder } 0,$$

von α. Durch Eintragung erhalten wir

$$\begin{aligned} u_n &= \binom{-\frac{1}{2}}{n,0} a^n + \binom{-\frac{1}{2}}{n-2,1} a^{n-2} b + \binom{-\frac{1}{2}}{n-4,2} a^{n-4} b^2 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{n-2k,k} a^{n-2k} b^k + \cdots \\ &\quad + \binom{-\frac{1}{2}}{1,\frac{n-1}{2}} a b^{\frac{n-1}{2}} \text{ oder } \binom{-\frac{1}{2}}{0,\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \\ &= u_{n,0}\, a^n + u_{n,1}\, a^{n-2} b + u_{n,2}\, a^{n-4} b^2 + \cdots + u_{n,k}\, a^{n-2k} b^k + \cdots \\ &\quad + u_{n,\frac{n-1}{2}} a b^{\frac{n-1}{2}} \text{ oder } u_{n,\frac{n}{2}} b^{\frac{n}{2}} \\ &= \sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2},\ \frac{n}{2}} u_{n,k}\, a^{n-2k} b^k, \text{ wobei} \end{aligned}$$

$$u_{n,k} = (-1)^{n-k} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n - 2k) - 1}{2^{n-k}\,(n - 2k)\,!\;k\,!} \text{ ist.}$$

Unter anderm ist

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \binom{-\frac{1}{2}}{0,\ 0} \\
&= u_{0,0} \\
&= 1. \\
u_1 &= \binom{-\frac{1}{2}}{1,\ 0} a \\
&= u_{1,0}\, a \\
&= -\frac{1}{2} a. \\
u_2 &= \binom{-\frac{1}{2}}{2,\ 0} a^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{0,\ 1} b \\
&= u_{2,0}\, a^2 + u_{2,1}\, b \\
&= \frac{3}{8} a^2 - \frac{1}{2} b. \\
u_3 &= \binom{-\frac{1}{2}}{3,\ 0} a^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{3,\ 1} ab \\
&= u_{3,0}\, a^3 + u_{3,1}\, ab \\
&= -\frac{5}{16} a^3 + \frac{3}{4} ab. \\
u_4 &= \binom{-\frac{1}{2}}{4,\ 0} a^4 + \binom{-\frac{1}{2}}{2,\ 1} a^2 b + \binom{-\frac{1}{2}}{0,\ 2} b^2 \\
&= u_{4,0}\, a^4 + u_{4,1}\, a^2 b + u_{4,2}\, b^2 \\
&= \frac{35}{2^7} a^4 - \frac{15}{2^4} a^2 b + \frac{3}{8} b^2. \\
u_5 &= \binom{-\frac{1}{2}}{5,\ 0} a^5 + \binom{-\frac{1}{2}}{3,\ 1} a^3 b + \binom{-\frac{1}{2}}{1,\ 2} ab^2 \\
&= u_{5,0}\, a^5 + u_{5,1}\, a^3 b + u_{5,2}\, ab^2 \\
&= -\frac{63}{2^8} a^5 + \frac{35}{2^5} a^3 b - \frac{15}{2^4} ab^2. \\
u_6 &= \binom{-\frac{1}{2}}{6,\ 0} a^6 + \binom{-\frac{1}{2}}{4,\ 1} a^4 b + \binom{-\frac{1}{2}}{2,\ 2} a^2 b^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{0,\ 3} b^3 \\
&= u_{6,0}\, a^6 + u_{6,1}\, a^4 b + u_{6,2}\, a^2 b^2 + u_{6,3}\, b^3 \\
&= \frac{231}{2^{10}} a^6 - \frac{315}{2^8} a^4 b + \frac{105}{2^6} a^2 b^2 - \frac{5}{2^4} b^3. \\
u_7 &= \binom{-\frac{1}{2}}{7,\ 0} a^7 + \binom{-\frac{1}{2}}{5,\ 1} a^5 b + \binom{-\frac{1}{2}}{3,\ 2} a^3 b^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{1,\ 3} ab^3 \\
&= u_{7,0}\, a^7 + u_{7,1}\, a^5 b + u_{7,2}\, a^3 b^2 + u_{7,3}\, ab^3 \\
&= -\frac{429}{2^{11}} a^7 + \frac{693}{2^9} a^5 b - \frac{315}{2^7} a^3 b^2 + \frac{35}{2^5} ab^3. \\
u_8 &= \binom{-\frac{1}{2}}{8,\ 0} a^8 + \binom{-\frac{1}{2}}{6,\ 1} a^6 b + \binom{-\frac{1}{2}}{4,\ 2} a^4 b^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2,\ 3} a^2 b^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{0,\ 4} b^4 \\
&= u_{8,0}\, a^8 + u_{8,1}\, a^6 b + u_{8,2}\, a^4 b^2 + u_{8,3}\, a^2 b^3 + u_{8,4}\, b^4 \\
&= \frac{6435}{2^{15}} a^8 - \frac{3003}{2^{11}} a^6 b + \frac{3465}{2^{10}} a^4 b^2 - \frac{315}{2^7} a^2 b^3 + \frac{35}{2^7} b^4.
\end{aligned}
\qquad (7)
$$

4. $(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2\,nbu_{n-1} = 0.$

Wir haben soeben die Werte der u's und ihre numerischen Coefficient berechnet. Wir können aber auch Recursionsformeln für dieselbe aufstell vermöge welcher man sie nach und nach berechnen kann. Zu diesem Zwe differenziren wir die Formel

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}},$$

tragen in das Resultat

$$\frac{dU}{dx}(1+ax+bx^2) + U\left(\frac{a}{2}+bx\right) = 0,$$

die Werte

$$U = u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n$$

und

$$\frac{dU}{dx} = u_1 + 2\,u_2x + 3\,u_3x^2 \cdots + (n-1)\,u_{n-1}x^{n-2} + nu_nx^{n-1}$$

ein, und erhalten

$$(u_1 + 2\,u_2x + 3\,u_3x^2 + \cdots + nu_nx^{n-1} + (n+1)\,u_{n+1}x^n)\,(1+ax+bx^2)$$
$$+ (u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots + u_{n-1}x^{n-1} + u_nx^n)\left(\frac{a}{2}+bx\right) =$$

Durch Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von x entsteht d Formel

$$(n+1)\,u_{n+1} + \frac{2n+1}{2}au_n + nbu_{n-1} = 0,$$

oder

$$(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2\,nbu_{n-1} = 0.$$

Unter anderm ist

$$u_1 + \frac{a}{2}u_0 = 0 \qquad \text{oder } 2\,u_1 + au_0 = 0,$$

$$2\,u_2 + \frac{3\,a}{2}u_1 + bu_0 = 0 \qquad \text{oder } 4\,u_2 + 3\,au_1 + 2\,bu_0 = 0,$$

$$3\,u_3 + \frac{5\,a}{2}u_2 + 2\,bu_1 = 0 \qquad \text{oder } 6\,u_3 + 5\,au_2 + 4\,bu_1 = 0,$$

$$4\,u_4 + \frac{7\,a}{2}u_3 + 3\,bu_2 = 0 \qquad \text{oder } 8\,u_4 + 7\,au_2 + 6\,bu_2 = 0.$$

Tragen wir in diese Formeln für die u's ihre Werte aus F. (7) ein, so angen wir zu Identitäten aus denen nochmals die Richtigkeit erhellt. e lauten

$$\left.\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}a\Big) + a\cdot 1 = 0.\\
&\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{2}b\Big) + 3a\Big(-\frac{1}{2}a\Big) + 2b\cdot 1 = 0.\\
&-\frac{5}{16}a^3+\frac{3}{4}ab\Big) + 5a\Big(\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{2}b\Big) + 4b\Big(-\frac{1}{2}a\Big) = 0.\\
&\frac{35}{2^7}a^4-\frac{15}{2^4}a^2b+\frac{3}{8}b^2\Big) + 7a\Big(-\frac{5}{16}a^3+\frac{3}{4}ab\Big) + 6b\Big(\frac{3}{8}a^2-\frac{1}{2}b\Big) = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (9\,a)$$

5. Verification der Formel

$$(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2nbu_{n-1} = 0.$$

Man kann sich in folgender Weise von der Richtigkeit unserer Formel rzeugen. Wir gehen von den Identitäten

(a) $-(n+1)(2n-2k+1) + (2n+1)(n-2k+1) + 2nk \equiv 0,$

(b) $\binom{-\frac{1}{2}}{n-k+1} \equiv -\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}\frac{2n-2k+1}{2n-2k+2},$

(c) $\binom{n-k+1}{k} \equiv \binom{n-k}{k-1}\frac{n-k+1}{k},$

(d) $\binom{n-k}{k} \equiv \binom{n-k}{k-1}\frac{n-2k+1}{k},$

multipliziren (a) mit $\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}\binom{n-k}{k-1}$, und erhalten zunächst

$$+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}\binom{n-k}{k-1}(2n-2k+1) + (2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}\binom{n-k}{k-1}(n-2k+1)$$
$$+ 2nk\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}\binom{n-k}{k-1} \equiv 0.$$

as erste Glied wird mittelst den Identitäten (b) und (c) der Reihe nach e Ausdrücke

$$(n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-k+1}\binom{n-k}{k-1}(2n-2k+2),$$
$$(n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-k+1}\binom{n-k+1}{k}2k$$
$$= 2k(n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-k+1,\,k}$$

n formt ; das zweite mittelst (d) in

$$(2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-k}\binom{n-k}{k}k = k(2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k,\,k};$$

das dritte Glied ist

$$2nk\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k-1}.$$

Unsere Gleichung wird dann

$$(2n+2)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k} + (2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k,\,k} + 2n\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k-1} \equiv 0.$$

Wir multipliziren sie mit $a^{n-2k+1}b^k$ und erhalten

$$(2n+2)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k}a^{n-2k+1}b^k + (2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k,\,k}a^{n-2k+1}b^k + 2n\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k-1}a^{n-2k+1}b^k \equiv 0.$$

Wir geben hierin k jetzt alle ganzen positiven Werte von 0 bis $\frac{n-1}{2}$ od
jenachdem n eine ungrade oder grade Zahl ist; Glieder mit negativen Ind
oder Exponenten sind ausgeschlossen. Nach dieser Voraussetzung erha
wir für $k=0$

$$(2n+2)\binom{-\frac{1}{2}}{n+1,\,0}a^{n+1} + (2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n,\,0}a^{n+1}. \quad (1$$

Dieser Ausdruck ist null. Die beiden Glieder heben sich weg. $k=0$
der einzige Fall von 0 bis $\frac{n}{2}$ wo negative Indices vorkommen, und die Gleich
(11) bleibt richtig wenn man das betreffende Glied vernachlässigt.

Wir haben also allgemein

$$\sum_{k=0}^{k=\frac{n-1}{2},\,\frac{n}{2}}\left[(2n+2)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k}a^{n-2k+1}b^k + (2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k,\,k}a^{n-2k+1}b^k + 2n\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k-1}a^{n-2k+1}b^k\right]$$

Um die Sache einfacher zu gestalten nehmen wir an n sei eine grade Zahl
untersuchen dann jedes Glied in F. (12) für sich.

Das erste Glied $\sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}}(2n+2)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,\,k}a^{n-2k+1}b^k$

wird

$$(2n+2)\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n+1,\,0}a^{n+1} + \binom{-\frac{1}{2}}{n-1,\,1}a^{n-1}b + \binom{-\frac{1}{2}}{n-3,\,2}a^{n-3}b^2 + \cdots + \binom{-\frac{1}{2}}{1,\,\frac{n}{2}}ab^{\frac{n}{2}}\right.$$

r nach F. (6)

$$(2n+2)\left[u_{n+1,0}a^{n+1}+u_{n+1,1}a^{n-1}b+u_{n+1,2}a^{n-3}b^2+\cdots+u_{n+1,\frac{n}{2}}ab^{\frac{n}{2}}\right]$$
$$=(2n+2)\,un+1.$$

Das zweite Glied $\sum_{k=0}^{k=\frac{n}{2}}(2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k,k}a^{n-2k+1}b^k$

t über in

$$(2n+1)\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n,0}a^{n+1}+\binom{-\frac{1}{2}}{n-2,1}a^{n-1}b+\binom{-\frac{1}{2}}{n-4,2}a^{n-3}b^2+\cdots+\binom{-\frac{1}{2}}{n,\frac{n}{2}}ab^{\frac{n}{2}}\right]$$
$$=(2n+1)\,a\left[u_{n,0}a^n+u_{n,1}a^{n-2}b+u_{n,2}a^{n-4}b^2+\cdots+u_{n,\frac{n}{2}}b^{\frac{n}{2}}\right]$$
$$=(2n+1)\,au_n.$$

Für das dritte Glied $2n\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k+1,k+1}a^{n-2k+1}b^k$

lt man

$$2n\left[\binom{-\frac{1}{2}}{n-1,0}a^{n-1}b+\binom{-\frac{1}{2}}{n-3,1}a^{n-3}b^2+\binom{-\frac{1}{2}}{n-5,2}a^{n-5}b^3+\cdots+\binom{-\frac{1}{2}}{1,\frac{n}{2}-1}ab^{\frac{n}{2}}\right]$$
$$=2nb\left[u_{n-1,0}a^{n-1}+u_{n-1,1}a^{n-3}b+u_{n-1,2}a^{n-5}b^2+\cdots+u_{n-1,\frac{n-2}{2}}ab^{\frac{n-2}{2}}\right]$$
$$=2nbu_{n-1}.$$

lso ist

$$(2n+2)\,u_{n+1}+(2n+1)\,au_n+2nbu_{n-1}\equiv 0. \qquad *(12)$$

$$(2n+2)\,u_{n+1,k}+(2n+1)\,u_{n,k}+2nu_{n-1,k-1}=0.$$

ir haben früher, F. (11 a), bewiesen dass Formel (11) für den Fall $k=0$

$$(2n+2)\binom{-\frac{1}{2}}{n+1,0}a^{n+1}+(2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n,0}a^{n+1}=0$$

der was dasselbe ist

$$(2n+2)\,u_{n+1,0}+(2n+1)u_{n,0}=0. \qquad (13)$$

*Formel (12) ist dieselbe wie Formel (8).

Dies folgt auch aus F. (10) für $k = 0$. Ebenso haben wir im allgeme aus F. (10)

$$(2n+2)\,u_{n+1,k} + (2n+1)\,u_{n,k} + 2n u_{n-1,k-1} = 0.$$

Wir wollen die Richtigkeit von F. (14) nochmals bestätigen indem wi F. (6) die Werte für $u_{n+1,k}$, $u_{n,k}$, $u_{n-1,k-1}$ eintragen. Es ist dann

$$(2n+2)\,u_{n+1,k} + (2n+1)\,u_{n,k} + 2n u_{n-1,k-1}$$

$$= -(2n+2)\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-2k+1)}{2^{n-k+1}(n-2k+1)!\;k!} + (2n+1)\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-2k}{2^{n-k}(n-2k)!\;k}$$

$$+ 2n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1}{2^{n-k}(n-2k+1)!\;(k-1)}$$

$$= \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}(n-2k+1)!\;k!}\,[-(n+1)(2n-2k+1)+(2n+1)(n-2k+1)+2$$

Die eckige Klammer ist aber identisch Null, also ist

$$(2n+2)\,u_{n+1,k} + (2n+1)\,u_{n,k} + 2n u_{n-1,k-1} = 0.$$

7. Berechnung von v_n.

Unsere nächste Aufgabe ist die Berechnung der Coefficienten v_n in Reihe für

$$V = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots$$

In die Form von einfachen binomial Coefficienten ähnlich den u's kö die v's nicht gebracht werden; sie lassen sich aber als Summe homog Produkten der u's darstellen. Hierzu transformiren wir die Formel

$$V = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots$$

und erhalten

$$V = aU\int U dx.$$

$$V = a(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n)\int(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n)\,($$

$$= a(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n)\left(u_0x + \frac{u_1x^2}{2} + \frac{u_2x^3}{3} + \cdots + \frac{u_{n-1}x^n}{n}\right)$$

Die additive Constante C dürfen wir gleich Null setzen.

Der Coefficient v_n von x^n hat den Wert

$$v_n = a\left[\frac{u_{n-1}u_0}{1} + \frac{u_{n-2}u_1}{2} + \frac{u_{n-3}u_2}{3} + \frac{u_{n-4}u_3}{4} + \cdots + \frac{u_1u_{n-2}}{n-1} + \frac{u_0u_{n-1}}{n}\right]$$

$$= {}^*a\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{r+1}. \qquad (15)$$

Unter anderm ist

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= au_0u_0 \\ v_2 &= a\frac{u_1u_0}{1} + a\frac{u_0u_1}{2}. \\ v_3 &= a\frac{u_2u_0}{1} + a\frac{u_1u_1}{2} + a\frac{u_0u_2}{3}. \\ v_4 &= a\frac{u_3u_0}{1} + a\frac{u_2u_1}{2} + a\frac{u_1u_2}{3} + a\frac{u_0u_3}{4}. \\ v_5 &= a\frac{u_4u_0}{1} + a\frac{u_3u_1}{2} + a\frac{u_2u_2}{3} + a\frac{u_1u_3}{4} + a\frac{u_0u_4}{5}. \end{aligned}\right\} \qquad (16)$$

Tragen wir in diesen Formeln für die u's ihre Werte aus Formeln (7) ein, wird

$$\left.\begin{aligned} v_1 &= {}^\dagger v_{1,0}\,a \\ &= a. \\ v_2 &= v_{2,0}\,a^2 \\ &= -\frac{3}{4}a^2. \\ v_3 &= v_{3,0}\,a^3 + v_{3,1}\,ab \\ &= \frac{5}{8}a^3 - \frac{2}{3}ab. \\ v_4 &= v_{4,0}\,a^4 + v_{4,1}\,a^2b \\ &= -\frac{25}{2^6}a^4 + \frac{55}{48}a^2b. \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

Zieht man zusammen so wird

$$\sum_{r=0}^{r=\frac{n-1}{2},\,\frac{n-2}{2}}\frac{u^{n-r-1}u_r}{(n-r)\,(r+1)}$$

$$(n+1)\,a\left[\frac{u_{n-1}u_0}{n\cdot 1} + \frac{u_{n-2}u_1}{(n-1)\cdot 2} + \frac{u_{n-3}u_2}{(n-2)\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2\cdot 2}u^2_{\frac{n-1}{2}} \text{ oder } \frac{\frac{u_n u_{n-2}}{2\ \ 2}}{\frac{n+2}{2}\cdot\frac{n}{2}}\right].$$

Die Bedeutung der numerischen Coefficienten $v_{n,g}$ werden wir später geben.

$$v_5 = v_{5,0}\,a^5 + v_{5,1}\,a^3b + v_{5,2}\,ab^2$$
$$= \frac{63}{2^7}\,a^5 - \frac{49}{2^5}\,a^3b + \frac{8}{15}\,ab^2.$$
$$v_6 = v_{6,0}\,a^6 + v_{6,1}\,a^4b + v_{6,2}\,a^2b^2$$
$$= -\frac{231}{2^9}\,a^6 + \frac{119}{2^6}\,a^4b - \frac{231}{2^5\cdot 5}\,a^2b^2.$$
$$v_7 = v_{7,0}\,a^7 + v_{7,1}\,a^5b + v_{7,2}\,a^3b^2 + v_{7,2}\,ab^3$$
$$= \frac{429}{2^{10}}\,a^7 - \frac{275}{2^7}\,a^5b + \frac{849}{5\cdot 2^6}\,a^3b^2 - \frac{16}{35}\,ab^3.$$
$$v_8 = v_{8,0}\,a^8 + v_{8,1}\,a^6b + v_{8,2}\,a^4b^2 + v_{8,3}\,a^2b^3$$
$$= -\frac{6435}{2^{14}}\,a^8 + \frac{9867}{2^{12}}\,a^6b - \frac{4213}{2^{10}}\,a^4b^2 + \frac{15159}{2^8\cdot 35}\,a^2b^3.$$

8. $(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} = 0.$

Dass für die v's keine so einfache Ausdrücke existiren wie für die haben wir eben erfahren. Die Recursionsformel für sie ist aber grade einfach als die der u's und lässt sich eben so leicht herleiten.

Wir differenziren

$$V\sqrt{1+ax+bx^2} = a\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}},$$

tragen für V und $\frac{dV}{dx}$ die Werte

$$V = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots + v_nx^n$$
$$\frac{dV}{dx} = v_1 + 2\,v_2x + 3\,v_3x^2 + \cdots + nv_nx^{n-1}$$

ein, und bekommen

$$[v_1 + 2\,v_2x + 3\,v_3x^2 + \cdots + nv_nx^{n-1} + (n+1)\,v_{n+1}x^n]\,(1+ax+bx^2)$$
$$+ (v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots + v_{n-1}x^{n-1} + v_nx^n)\left(\frac{a}{2} + bx\right)$$

Durch Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von x entsteht

$$(n+1)\,v_{n+1} + \frac{2n+1}{2}\,av_n + nbv_{n-1} = 0$$

oder

$$(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} = 0.$$

Unter anderm ist

$$\left.\begin{array}{ll} v_1 - a = 0 & \text{oder} \quad v_1 - a = 0, \\ 2v_2 + \frac{3}{2}av_1 = 0 & \text{oder} \quad 4v_2 + 3av_1 = 0, \\ 3v_3 + \frac{5}{2}av_2 + 2bv_1 = 0 & \text{oder} \quad 6v_3 + 5av_2 + 4bv_1 = 0, \\ 4v_4 + \frac{7}{2}av_3 + 3bv_2 = 0 & \text{oder} \quad 8v_4 + 7av_3 + 6bv_2 = 0. \end{array}\right\} (19)$$

Von der Richtigkeit der Formeln (19) kann man sich auch dadurch über-
gen, dass man für die v's ihre auf andere Weise berechneten Werte aus
17) einträgt. Es wird dann der Reihe nach

$$\left.\begin{array}{l} a - a = 0. \\ 4\left(-\frac{3}{4}a^2\right) + 3a\,(a) = 0. \\ 6\left(\frac{5}{8}a^3 - \frac{2}{3}ab\right) + 5a\left(-\frac{3}{4}a^2\right) + 4b\,(a) = 0. \\ 8\left(-\frac{35}{2^6}a^4 + \frac{55}{48}a^2b\right) + 7a\left(\frac{5}{8}a^3 - \frac{2}{3}ab\right) + 6b\left(-\frac{3}{4}a^2\right) = 0. \end{array}\right\} (19\,a)$$

. Verification der Formel

$$(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} = 0.$$

Vir tragen in

$$(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} = 0$$

ie v's ihre Werte aus F. (15) ein und erhalten

$$\equiv (2n+2)\,a\sum_{r=0}^{r=n}\frac{u_{n-r}u_r}{r+1} + (2n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{r+1} + 2nba\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{r+1}.$$

m zu beweisen, dass letzterer Ausdruck verschwindet, gehen wir von der
ität, F. (12),

$$(2n-2r)\,u_{n-r} + (2n-2r-1)\,au_{n-r-1} + (2n-2r-2)\,bu_{n-r-2} = 0$$

s multipliziren dieselbe mit $\frac{n+2r+2}{n(r+1)}au_r$, und summiren von $r = 0$ bis
$= n-1$. Es handelt sich nun darum zu beweisen, dass die Formel

$$B \equiv \sum_{r=0}^{r=n-1} [(2n-2r)\,u_{n-r} + (2n-2r-1)\,au_{n-r-1}$$

$$+ (2n-2r-2)\,bu_{n-r-2}] \cdot \frac{n+2r+2}{n(r+1)}\,au_r$$

mit dem Ausdruck A übereinstimmt. Wir vergleichen die Glieder in A Reihe nach mit den Gliedern in B. Der Beweis zerfällt also in 3 Teile.

(1) Das erste Glied von A wird für $r = 0$ und $r = n$

$$\left[(2n+2) + \frac{2n+2}{n+1}\right] au_n u_0 = (2n+4)\,au_n u_0.$$

Für $r = 0$ wird das erste Glied von B, $\quad (2n+4)\,au_n u_0$.

Die Restsummen der ersten Glieder von A und B sind resp.

$$(2n+2)\,a \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{u_{n-r}u_r}{r+1} \text{ und } \sum_{r=1}^{r=n-1} (2n-2r)\frac{n+2r+2}{n(r+1)}\,au_{n-r}u_r.$$

Wir setzen $n - r$ für r, bekommen

$$(2n+2)\,a \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{u_{n-r}u_r}{n-r+1} \text{ und } \sum_{r=1}^{r=n-1} 2r\,\frac{3n-2r+2}{n(n-r+1)}\,au_{n-r}u_r,$$

addiren, und erhalten

$$(2n+2)(n+2)\,a \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{u_{n-r}u_r}{(r+1)(n-r+1)}$$

$$= (2n+2)(n+2)\,a \sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{u_{n-r}u_r}{(r+1)(n-r}$$

Die ersten Glieder von A und B haben also denselben Wert.

(2) Wir vergleichen nun das zweite Glied in A mit dem zweiten i Hierzu schreiben wir die beiden Glieder, lassen r in $n-r-1$ übergehen, addiren. Wir haben demnach

$$(2n+1)\,a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{r+1} \text{ und } \sum_{r=0}^{r=n-1} (2n-2r-1)\frac{n+2r+2}{n(r+1)}\,a^2 u_{n-r-1}u_r$$

$$(2n+1)\,a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{n-r} \text{ und } \sum_{r=0}^{r=n-1} (2r+1)\frac{2n-2r}{n(n-r)}\,a^2 u_{n-r-1}u_r,$$

d somit

$$n+1)\,(n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{(n-r)\,(r+1)}$$

$$=(2n+1)\,(n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{(n-r)\,(r+1)}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass das zweite von A gleich ist dem zweiten von B

(3) Das Verfahren für die dritten Glieder von A und B ist dasselbe wie vorigen Fall, nur dass wir hier r in $n-r-2$ übergehen lassen. Für $n-1$ fällt das dritte Glied in B weg, und man hat also

$$2nab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{r+1}\quad\text{und}\quad ab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{(2n-2r-2)\,(n+2r+2)}{n\,(r+1)}u_{n-r-2}u_r,$$

$$2nab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{n-r-1}\quad\text{und}\quad ab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{(2r+2)\,(3n-2r-2)}{n\,(n-r-1)}u_{n-r-2}u_r,$$

daher

$$2n^2ab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}n_r}{(n-r+1)\,(r+1)}=2n^2ab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{(n-r+1)\,(r+1)}.$$

Da die dritten Glieder von A und B auch übereinstimmen ist die Formel

$$(2n+2)\,v_{n+1}+(2n+1)\,av_n+2nbv_{n-1}=0 \qquad *(20)$$

esen

$$0.\quad v_{n,g}=\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-1,k}\,u_{r,s}}{r+1}.$$

chon in der Berechnung der speciellen v's, F. (17), haben wir gewisse en mit $v_{n,g}$ bezeichnet. Wir wenden uns jetzt zur Aufgabe eine allgemeine nel zu finden um $v_{n,g}$ darzustellen. Um dies auszuführen gebrauchen wir neln (15) und (6), d. h. wir drücken die v's durch u's aus und diese, welche n Reihen entwickelt haben die nach a und b fortschreiten, durch ihre rische Coefficienten.

* Formel (20) ist gleich F. (18).

$$v_n = a \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1} u_r}{r+1}$$

$$= a \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r-1,k}\, u_{r,s}}{r+1} a^{n-r-2k-1} b^k a^{r-2s} b^s$$

$$= v_{n,0}\, a^n + v_{n,1}\, a^{n-2} b + v_{n,2}\, a^{n-4} b^2 + \cdots + v_{n,g}\, a^{n-2g} b^g + \cdots + v_{n,\frac{n-1}{2}}\, a b^{\frac{n-1}{2}}.$$

Es wird

$$v_{n,g} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r-1,k}\, u_{r,s}}{r+1}, \text{ wobei } g = k+s \text{ ist.}$$

11. $(2n+2)\, v_{n+1,g} + (2n+1)\, v_{n,g} + 2n v_{n-1,g-1} = 0.$

Wie bei den u's so existirt auch hier eine Relation

$$(2n+2)\, v_{n+1,g} + (2n+1)\, v_{n,g} + 2n v_{n-1,g-1} = 0$$

zwischen den numerischen Coefficienten die nun bewiesen werden soll. Zu bringen wir den Ausdruck

$$(2n+2)\, v_{n+1,g} + (2n+1)\, v_{n,g} + 2n v_{n-1,g-1}$$

durch Eintragung der Werte der $v_{n,g}$'s aus F. (23) in die Form

$$A \equiv (2n+2) \sum_{r=0}^{r=n} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r,k} u_{r,s}}{r+1} + (2n+1) \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r-1,k} u_{r,s}}{r+1}$$

$$+ 2n \sum_{r=0}^{r=n-2} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-2}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r-2,k-1} u_{r,s}}{r+1}.$$

Wir hatten die F. (14)

$$(2n-2r)\, u_{n-r,k} + (2n-2r-1)\, u_{n-r-1,k} + (2n-2r-2)\, u_{n-r-2,k-1} \equiv 0.$$

Multipliziren wir mit $\frac{n+2r+2}{n(r+1)} u_{r,s}$ und summiren wir so wird

$$B \equiv \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \left[(2n-2r) \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} u_{n-r,k} + (2n-2r-1) \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} u_{n-r-1,k} \right.$$

$$\left. + (2n-2r-2) \sum_{k-1=0}^{k-1=\frac{n-r-2}{2}} u_{n-r-1,k-1} \right] \frac{n+2r+2}{n(r+1)} u_{r,s}$$

Vir beschränken uns auf Identitäten welche der Bedingung $g = k + s$
gen. Es handelt sich nun darum zu beweisen, dass die Formeln A und B
einstimmen; wir führen diesen Beweis dadurch, dass wir die einzelnen
ler in A und B mit einander vergleichen — ihn in drei Teile geben.

1) Das erste Glied in A wird für $r = 0$ und $r = n$,

$$(2n+4)\, u_{n,g}\, u_{0,0};$$

rste in B für $r = 0$, $\qquad (2n+4)\, u_{n,g}\, u_{0,0}.$

an nimmt die Restsummen der ersten Glieder von A und B, dieselben
$n - r$ für r gesetzt wird, und addirt die beiden Summen. Hierdurch
t sich:

,

$$(2n+2) \sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r,k}\, u_{r,s}}{r+1},$$

$n - r$ für r,

$$(2n+2) \sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r,k}\, u_{r,s}}{n-r-1},$$

urch Addition,

$$(2n+2)(n+2) \sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r,k}\, u_{r,s}}{(r+1)(n-r+1)};$$

,

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{(2n-2r)(n+2r+2)}{n(r+1)}\, u_{n-r,k}\, u_{r,s},$$

$- r$ für r,

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{2r(3n-2r+2)}{n(n-r+1)}\, u_{n-r,k}\, u_{r,s},$$

urch Addition,

$$n+2)(n+2) \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r,k}\, u_{r,s}}{(r+1)(n-r+1)}.$$

ersten Glieder von A und B haben also denselben Wert.

(2) Durch ein ähnliches Verfahren für die zweiten Glieder erhält man

aus A,

$$(2n+1)\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-1,k}\,u_{r,s}}{r+1}$$

und, $n-r-1$ für r,

$$(2n+1)\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-1,k}\,u_{r,s}}{n-r}$$

und durch Addition,

$$(2n+1)(n+1)\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-1,k}\,u_{r,s}}{(n-r)(r+1)};$$

aus B,

$$\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{(2n-2r-1)(n+2r+2)}{n(r+1)}u_{n-r-1,k}$$

und, $n-r-1$ für r gesetzt,

$$\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{(2r+1)(2n-2r)}{n(n-r)}u_{n-r-1,k}\,u_{r,s},$$

und durch Addition,

$$(2n+1)(n+1)\sum_{r=0}^{r=n-1}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-1,k}u_{r,s}}{(n-r)(r+1)}.$$

Die zweiten Glieder von A und B stimmen demnach also auch überein

(3) Für die dritten Glieder haben wir:

aus A,

$$2n\sum_{r=0}^{r=n-2}\sum_{k=1}^{k=\frac{n-r-2}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-2,k-1}\,u_{r,s}}{r+1},$$

und, hierin $n-r-2$ für r gesetzt,

$$2n\sum_{r=0}^{r=n-2}\sum_{k=1}^{k=\frac{n-r-2}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-2,k-1}\,u_{r,s}}{n-r-1},$$

und durch Addition,

$$2n^2\sum_{r=0}^{r=n-2}\sum_{k=1}^{k=\frac{n-r-2}{2}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\frac{u_{n-r-2,k-1}\,u_{r,s}}{(r+1)(n-r-1)};$$

, da für $r = n - 1$, das dritte Glied weg fällt,

$$\sum_{r=0}^{r=n-2} \sum_{k=1}^{k=\frac{n-r-2}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{(2n-2r-2)(n+2r+2)}{n(r+1)} u_{n-r-1,k-1} u_{r,s},$$

etzt man $n - r - 2$ für r,

$$\sum_{r=0}^{r=n-2} \sum_{k=1}^{k=\frac{n-r-2}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{(2r+2)(3n-2r-2)}{n(n-r-1)} u_{n-r-1,k-1} u_{r,s},$$

urch Addition,

$$2n^2 \sum_{r=0}^{r=n-2} \sum_{k=1}^{k=\frac{n-r-2}{2}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \frac{u_{n-r-2,k-1} u_{r,s}}{(r+1)(n-r+1)}.$$

die dritten Glieder auch übereinstimmen, so stimmen auch A und B n und die Formel

$$(2n+2) v_{n+1,g} + (2n+1) v_{n,g} + 2n v_{n-1,g-1} = 0 \tag{24}$$

viesen.

Determinanten $\begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{vmatrix}$ **und** $\begin{vmatrix} u_{n+1} v_{n+1} \\ u_{n-1} v_{n-1} \end{vmatrix}$.

s den Recursionsformeln (12) und (20)

$$(2n+2) u_{n+1} + (2n+1) a u_n + 2nb u_{n-1} = 0,$$
$$(2n+2) v_{n+1} + (2n+1) a v_n + 2nb v_{n-1} = 0,$$

sich aus u und v gewisse Determinanten

$$\begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{vmatrix} = -\frac{ab^{n-1}}{n} \tag{25}$$

$$\begin{vmatrix} u_{n+1} v_{n+1} \\ u_{n-1} v_{n-1} \end{vmatrix} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{a^2 b^{n-1}}{n}. \tag{26}$$

berechnen. Wir eliminiren das mittlere Glied um die erste und das um die zweite Determinante zu bekommen. Durch Elimination des Gliedes gewinnt man nichts neues. Die Elimination gibt:

(1) $(n+1)(u_{n+1} v_n - u_n v_{n+1}) = nb(u_n v_{n-1} - u_{n-1} v_n)$;

(2) $(2n+2)(u_{n+1} v_{n-1} - u_{n-1} v_{n+1}) = (2n+1) a (u_{n-1} v_n - u_n v_{n-1})$.

Aus der ersten dieser Gleichungen erhält man :

$$\text{für } n = 1, \qquad 2\,(u_2v_1 - u_1v_2) = \; b\,(u_1v_0 - u_0v_1) = -ba$$

$$u_2v_1 - u_1v_2 = -\frac{ab}{2};$$

$$\text{für } n = 2, \qquad 3\,(u_3v_2 - u_2v_3) = 2\,b\,(u_2v_1 - u_1v_2) = -ab^2$$

$$u_3v_2 - u_2v_3 = -\frac{ab^2}{3};$$

$$\text{für } n = 3, \qquad 4\,(u_4v_3 - u_3v_4) = 3\,b\,(u_3v_2 - u_2v_3) = -ab^3$$

$$u_4v_3 - u_3v_4 = -\frac{ab^3}{4};$$

allgemein hat man

$$u_nv_{n-1} - u_{n-1}v_n = -\frac{ab^{n-1}}{n}.$$

Trägt man den eben erhaltenen Wert in die rechte Seite der zw Gleichung ein so bekommt man

$$u_{n+1}v_{n-1} - u_{n-1}v_{n+1} = \frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{a^2b^{n-1}}{n}.$$

13. U_n und V_n.

In den Reihen, Formeln (4) und (5),

$$U = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots,$$

$$V = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4 + \cdots,$$

sind die Reste

$$U - (u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots + u_nx^n),$$

$$V - (v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots + v_nx^n).$$

Wir bezeichnen die Produkte der Reste mit der Wurzel $\sqrt{1+ax}$ durch

$$U_n = (U - u_0 - u_1x - u_2x^2 - \cdots - u_nx^n)\,\sqrt{1 + ax + bx^2},$$

und

$$V_n = (V - v_1x - v_2x^2 - v_3x^3 - \cdots - v_nx^n)\,\sqrt{1 + ax + bx^2}.$$

Unter anderm ist

$$\left.\begin{aligned} U_0 &= 1 - u_0\sqrt{1+ax+bx^2}, \\ U_1 &= 1 - (u_0+u_1x)\sqrt{1+ax+bx^2}, \\ U_2 &= 1 - (u_0+u_1x+u_2x^2)\sqrt{1+ax+bx^2}. \end{aligned}\right\} \quad (29)$$

$$\left.\begin{aligned} V_0 &= a\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}, \\ V_1 &= a\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} - v_1x\sqrt{1+ax+bx^2}, \\ V_2 &= a\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} - (v_1x+v_2x^2)\sqrt{1+ax+bx^2}. \end{aligned}\right\} \quad (30)$$

4. $\frac{dU_n}{dx}$ und $\frac{dV_n}{dx}$.

Durch Differentiation und Multiplication mit Wurzel $\sqrt{1+ax+bx^2}$ kommen wir aus F. (27)

$$\begin{aligned} \sqrt{1+ax+bx^2}\frac{dU_n}{dx} &= [u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \cdots + (n-2)u_{n-2}x^{n-3} \\ &\quad + (n-1)u_{n-1}x^{n-2} + nu_nx^{n-1}]\left(1+ax+bx^2\right) + (u_0+u_1x \\ &\quad + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots + u_{n-2}x^{n-2} + u_{n-1}x^{n-1} + u_nx^n)\left(\frac{a}{2}+bx\right) \\ &= \left(u_1+\frac{a}{2}u_0\right)x^0 + \left(2u_2+\frac{3}{2}au_1+bu_0\right)x \\ &\quad + \left(3u_3+\frac{5}{2}au_2+2bu_1\right)x^2 + \left(4u_4+\frac{7}{2}au_3+3bu^2\right)x^3 \\ &\quad + \cdots + \left[nu_n+\frac{2n-1}{2}au_{n-1}+(n-1)bu_{n-2}\right]x^{n-1} \\ &\quad + \left(\frac{2n+1}{2}bu_n+nbu_{n-1}\right)x^n + (n+1)bu_nx^{n+1}. \end{aligned}$$

Nachterhand verschwinden nach Formeln (9) und (8) die Cofficienten der

Potenzen von $x^0, x^1, x^2, \cdots$ bis x^{n-1}; der Coefficient von x^n lässt sich n
F. (8) durch $[-(n+1)u_{n+1}]$ ersetzen. Wir haben also

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{(n+1)(u_{n+1}x^n - bu_nx^{n+1})}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

Unter anderm ist

$$\frac{dU_0}{dx} = -\frac{\frac{a}{2}+bx}{\sqrt{1+ax+bx^2}},$$

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{2(u_2x - bu_1x^2)}{\sqrt{1+ax+bx^2}},$$

$$\frac{dU_2}{dx} = \frac{3(u_3x^2 - bu_2x^3)}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

Auf ähnliche Weise bekommt man aus F. (28)

$$-\sqrt{1+ax+bx^2}\frac{dV_n}{dx} = [v_1 + 2v_2x + 3v_3x^2 + \cdots + (n-2)v_{n-2}x^{n-3}$$

$$+ (n-1)v_{n-1}x^{n-2} + nv_nx^{n-1}]\left(1+ax+bx^2\right) + (v_1x +$$

$$+ v_3x^3 + \cdots + v_{n-2}x^{n-2} + v_{n-1}x^{n-1} + v_nx^n)\left(\frac{a}{2}+bx\right)$$

$$= (v_1 - a)x^0 + \left(2v_2 + \frac{3}{2}av_1\right)x + \left(3v_3 + \frac{5}{2}av_2 + 2bv_1\right)$$

$$+ \left(4v_4 + \frac{7}{2}av_3 + 3bv_2\right)x^3 + \cdots$$

$$+ \left[nv_n + \frac{2n-1}{2}av_{n-1} + (n-1)bv_{n-2}\right]x^{n-1}$$

$$+ \left(\frac{2n+1}{2}av_n + nbv_{n-1}\right)x^n + (n+1)bv_nx^{n+1}.$$

Hierin verschwinden rechterhand nach Formeln (19) und (18) die Coeffi
enten der Potenzen von $x^0, x^1, x^2, \cdots$ bis x^{n-1}, und wenn der Coefficient von
durch $[-(n+1)v_{n+1}]$, F. (18), ersetzt wird, erhält man

$$\frac{dV_n}{dx} = \frac{(n+1)(v_{n+1}x^n - bv_nx^{n+1})}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

Unter anderm ist

$$\left.\begin{aligned} \frac{dV_0}{dx} &= \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}, \\ \frac{dV_1}{dx} &= \frac{2\,(v_2x - bv_1x^2)}{\sqrt{1+ax+bx^2}}, \\ \frac{dV_2}{dx} &= \frac{3\,(v_3x^2 - bv_2x^3)}{\sqrt{1+ax+bx^2}}. \end{aligned}\right\} \quad (34)$$

i. $v_n\left(\frac{dU_n}{dx} - \frac{dU_{n-1}}{dx}\right) = u_n\left(\frac{dV_n}{dx} - \frac{dV_{n-1}}{dx}\right)$.

a $u_nv_{n-1} - u_{n-1}v_n = -\frac{ab^{n-1}}{n}$ ist, F. (25), so erhält man durch Elimination en beiden Formeln (31) und (33)

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{(n+1)\,(u_{n+1}x^n - bu_nx^{n+1})}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$\frac{dV_n}{dx} = \frac{(n+1)\,(v_{n+1}x^n - bv_nx^{n+1})}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

liden weiteren

$$v_n\frac{dU_n}{dx} - u_n\frac{dV_n}{dx} = -ab^n\frac{x^n}{\sqrt{1+ax+bx^2}}, \quad (35)$$

$$v_n\frac{dU_{n-1}}{dx} - u_n\frac{dV_{n-1}}{dx} = -ab^n\frac{x^n}{\sqrt{1+ax+bx^2}}, \quad (36)$$

ider zweiten $n+1$ für n gesetzt wurde. Es folgt also

$$v_n\left(\frac{dU_n}{dx} - \frac{dU_{n-1}}{dx}\right) = u_n\left(\frac{dV_n}{dx} - \frac{dV_{n-1}}{dx}\right). \quad (37)$$

Von der Richtigkeit dieser Gleichung kann man sich auch dadurch überzeugen, dass man in sie für die Differentialquotienten ihre Werte aus Formeln (34) und (33) einträgt. Es wird dann

$$(n-1)\,u_{n+1}x^n - (n+1)\,bu_nx^{n+1} - nu_nx^{n-1} + nbu_{n-1}x^n] =$$

$$= u_n[(n+1)\,v_{n+1}x^n - (n+1)\,bv_nx^{n+1} - nv_nx^{n+1} + nbv_{n-1}x^n].$$

$$(n+1)\,(u_{n+1}v_n - u_nv_{n+1})\,x^n = nb\,(u_nv_{n-1} - u_{n-1}v_n)\,x^n.$$

Setzt man für die Klammern ihre Werte aus F. (25) so wird

$$(n+1)\left(-\frac{ab^n}{n+1}\right) = nb\left(-\frac{ab^{n-1}}{n}\right).$$

16. $$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_n V_n - v_n U_n + C.$$

Aus F. (35) erhält man

$$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_n V_n - v_n U_n + C.$$

Durch diese Formel ist es möglich den Wert eines Integrals z
Gattung sofort hinzuschreiben wenn man die Werte für u_n, v_n, U_n, V_n
berechnet hat. Aus F. (36) kommt

$$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} u_n V_{n-1} - v_n U_{n-1} + C.$$

Wenn man in *F. (39) für U_{n-1} und V_{n-1} ihre Werte aus Formeln (27
(28) einträgt, so wird

$$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = [u_n(V - v_1 x - v_2 x^2 - \cdots - v_{n-1}x^{n-1}) - v_n(U -$$

$$- u_1 x - u_2 x^2 - \cdots - u_{n-1}x^{n-1})]\sqrt{1+ax+bx^2} +$$

$$= u_n a \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + [u_0 v_n + (u_1 v_n - v_1 u_n)x$$

$$+ (u_2 v_n - v_2 u_n)x^2 + (u_3 v_n - v_3 u_n)x^3 + (u_4 v_n - v_4 u_n)$$

$$+ \cdots + (u_{n-1}v_n - v_{n-1}u_n)x^{n-1}]\sqrt{1+ax+bx^2} + C'$$

$$= u_n a \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$+ \sqrt{1+ax+bx^2}\sum_{k=0}^{k=n-1}(u_k v_n - v_k u_n)x^k + C'.$$

* Trägt man in F. (38) für U_n und V_n ihre Werte ein, so bekommt man dasselbe R

17. Anwendungen der Formel.

Vir machen die Anwendung von F. (40) in speciellen Fällen. Für
1 wird

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_1 a \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + u_0 v_1 \sqrt{1+ax+bx^2} + C'$$

$$= -\frac{a^2}{2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + a\sqrt{1+ax+bx^2} + C'.$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = -\frac{a}{2b}\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + \frac{1}{b}\sqrt{1+ax+bx^2} + K.$$

ifferenzirt man so ist in der That

$$\frac{x}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = -\frac{a}{2b\sqrt{1+ax+bx^2}} + \frac{\frac{a}{2}+bx}{b\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

r $n=2$ liefert Formel (40)

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_2 a \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$+ [u_0 v_2 + (u_1 v_2 - v_1 u_2)\,x]\sqrt{1+ax+bx^2} + C'$$

$$= (\tfrac{3}{8}a^2 - \tfrac{1}{2}b)\,a \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$+ (-\tfrac{3}{4}a^2 + \tfrac{1}{2}abx)\sqrt{1+ax+bx^2} + C'.$$

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \frac{3a^2-4b^2}{8b^2}\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$+ \left(-\frac{3a}{4b^2} + \frac{1}{2b}x\right)\sqrt{1+ax+bx^2} + K.$$

In der That ist

$$\frac{x^2}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \frac{3a^2-4b}{8b^2\sqrt{1+ax+bx^2}} + \frac{1+ax+bx^2}{2b\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$+ \frac{\left(-\frac{3a}{4b^2}+\frac{x}{2b}\right)\left(\frac{a}{2}+\right.}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

Für $n=3$ wird

$$ab^3\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_3a\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + [u_0v_3 + (u_1v_3 - v_1u_3)\,x$$

$$+ (u_2v_3 - v_2u_3)\,x^2]\,\sqrt{1+ax+bx^2} + C'$$

$$= (-\tfrac{5}{16}a^3 + \tfrac{3}{4}ab)\,a\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + [(\tfrac{5}{8}a^3 - \tfrac{2}{3}ab$$

$$+ \{(\tfrac{5}{8}a^3 - \tfrac{2}{3}ab)\,(-\tfrac{1}{2}a) - (-\tfrac{5}{16}a^3 + \tfrac{3}{4}ab)\,a\}x$$

$$+ \{(\tfrac{5}{8}a^3 - \tfrac{2}{3}ab)\,(\tfrac{3}{8}a^2 - \tfrac{1}{2}b)$$

$$- (-\tfrac{5}{16}a^3 + \tfrac{3}{4}ab)\,(-\tfrac{3}{4}a^2)\}\,x^2]\,\sqrt{1+ax+bx^2} + C'$$

$$= (-\tfrac{5}{16}a^4 + \tfrac{3}{4}a^2b)\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + [(\tfrac{5}{8}a^3 - \tfrac{2}{3}ab)$$

$$- \tfrac{5}{12}a^2bx + \tfrac{1}{3}ab^2x^2]\,\sqrt{1+ax+bx^2} + C'.$$

$$\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = \left(-\frac{5a^3}{16b^3}+\frac{3a}{4b^2}\right)\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + \left[\left(\frac{5a^2}{8b^2}-\frac{2}{3b^2}\right.\right.$$

$$- \frac{5a}{12b^2}x + \frac{1}{3b}x^2\Big]\sqrt{1+ax+bx^2} + K.$$

Wir berechneten dieses Integral als Beispiel auf Seite 2, F. (1); das d
gefundene Resultat stimmt mit dem oben gegeben überein.

Abschnitt II.

8. $Q = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{x^a dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$.

ie Methode für das Berechnen eines Integrals zweiter Gattung ist somit
en, und dieselbe liefert in schnellster Weise das Endresultat. Der
tändigkeit wegen wollen wir noch eine zweite Methode angeben um zu
elben Resultat zu gelangen.
Vir wollen zunächst den Ausdruck

$$Q = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \int \frac{x^a dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} \tag{41}$$

ie Reihe entwickeln

$$Q = q_{a+1} x^{a+1} + q_{a+2} x^{a+2} + q_{a+3} x^{a+3} + \cdots\cdots.$$

ir benutzen hierbei die Entwicklung, F. (2),

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots\cdots$$

wird

$$U \int U x^a dx$$

$$(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots\cdots + u_n x^n) \int u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + \cdots\cdots + u_n x^n)\, x^a dx$$

$$(u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots\cdots + u_n x^n) \left(\frac{u_0 x^{a+1}}{\alpha+1} + \frac{u_1 x^{a+2}}{\alpha+2} + \frac{u_2 x^{a+3}}{\alpha+3} + \cdots\cdots + \frac{u_n x^{n+a+1}}{n+\alpha+1} \right) + C.$$

Hierbei hat der Coefficient von x^n den Wert

$$q_n = a\left[\frac{u_{n-\alpha-1}u_0}{\alpha+1} + \frac{u_{n-\alpha-2}u_1}{\alpha+2} + \cdots\cdots + \frac{u_0 u_{n-\alpha-1}}{n}\right]$$

$$= a\sum_{r=0}^{r=n-\alpha-1} \frac{u_{n-\alpha-r-1}u_r}{r+\alpha+1}.$$

Unter anderm ist

$$q_{\alpha+1} = a\frac{u_0 u_0}{\alpha+1},$$

$$q_{\alpha+2} = a\frac{u_1 u_0}{\alpha+1} + a\frac{u_0 u_1}{\alpha+2},$$

$$q_{\alpha+3} = a\frac{u_2 u_0}{\alpha+1} + a\frac{u_1 u_1}{\alpha+2} + a\frac{u_0 u_2}{\alpha+3}.$$

Trägt man in diese Formeln für die u's ihre Werte aus Formeln (7) e erhält man

$$q_{\alpha+1} = \frac{a}{\alpha+1},$$

$$q_{\alpha+2} = -\frac{(2\alpha+3)\,a^2}{2\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)},$$

$$q_{\alpha+3} = \frac{(2\alpha+5)\,(2\alpha+3)\,a^3}{4\,(\alpha+1)\,(\alpha+2)\,(\alpha+3)} - \frac{(\alpha+2)\,ab}{(\alpha+1)\,(\alpha+3)}.$$

19. $(2n+2)\,q_{n+1} + (2n+1)\,aq_n + 2nbq_{n-1} = 0.$

Um die Recursionsformel zu finden differenziren wir

$$Q\sqrt{1+ax+bx^2} = a\int \frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}},$$

tragen für Q und $\frac{dQ}{dx}$ ihre Werte

$$Q = q_{\alpha+1}x^{\alpha+1} + q_{\alpha+2}x^{\alpha+2} + \cdots\cdots + q_n x^n,$$

$$\frac{dQ}{dx} = (\alpha+1)\,q_{\alpha+1}x^\alpha + (\alpha+2)\,q_{\alpha+2}x^{\alpha+1} + \cdots\cdots + nq_n x^{n-1},$$

ein, und bekommen

$$- ax + bx^2)\,[(\alpha+1)\,q_{\alpha+1}x^\alpha + (\alpha+2)\,q_{\alpha+2}x^{\alpha+1} + \cdots\cdots + nq_nx^{n-1}]$$
$$+ \left(\frac{a}{2} + bx\right)[q_{\alpha+1}x^{\alpha+1} + q_{\alpha+2}x^{\alpha+2} + \cdots\cdots + q_nx^n] - ax^\alpha = 0.$$

Durch Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von x erhält man

$$(2n+2)\,q_{n+1} + (2n+1)\,aq_n + 2nbq_{n-1} = 0. \tag{45}$$

Unter anderm ist

$$\left.\begin{aligned}&(\alpha+1)\,q_{\alpha+1} - a = 0,\\ &(2\alpha+4)\,q_{\alpha+2} + (2\alpha+3)\,aq_{\alpha+1} = 0,\\ &(2\alpha+6)\,q_{\alpha+3} + (2\alpha+5)\,aq_{\alpha+2} + (2\alpha+4)\,bq_{\alpha+1} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Die hieraus berechneten Werte der q's stimmen mit denen in Formeln überein.

10. Verification der Formel

$$(2n+2)\,q_{n+1} + (2n+1)\,aq_n + 2nbq_{n-1} = 0.$$

Um die Formel (45)

$$(2n+2)\,q_{n+1} + (2n+1)\,aq_n + 2nbq_{n-1} = 0$$

nochmals zu bestätigen bringen wir durch Eintragung der Werte der q's aus (46), den Ausdruck linkerhand in die Form

$$(2n+2)\,a\sum_{r=0}^{r=n-\alpha}\frac{u_{n-\alpha-r}u_r}{r+\alpha+1} + (2n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-\alpha-1}\frac{u_{n-\alpha-r-1}u_r}{r+\alpha+1}$$
$$+ 2nba\sum_{r=0}^{r=n-\alpha-2}\frac{u_{n-\alpha-r-2}u_r}{r+\alpha+1}$$

und vergleichen diesen Ausdruck, Glied für Glied, mit der Identität, F. (12),

$$\sum_{r=0}^{r=n-\alpha-1}[(2n-2\alpha-2r)\,u_{n-\alpha-r} + (2n-2\alpha-2r-1)\,au_{n-\alpha-r-1}$$
$$+ (2n-2\alpha-2r-2)\,bu_{n-\alpha-r-2}]\,\frac{n+2r+\alpha+2}{(n-\alpha)\,(r+\alpha+1)}\,au_r \equiv 0.$$

Das Verfahren ist genau dasselbe wie in Paragraph 9, und ist deswegen, wohl als des Raumes wegen, hier nicht angegeben.

21. $(2\alpha-2)\,l_n+(2\alpha-1)\,ap_n+2\,\alpha bq_n=0.$

Ebenso wie

$$Q=\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

in die Reihe

$$Q=q_{\alpha+1}x^{\alpha+1}+q_{\alpha+2}x^{\alpha+2}+\cdots\cdots$$

entwickelt wurde, können wir auch

$$P=\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

$$L=\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^{\alpha-2}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$

in die Reihen

$$P=p_\alpha x^\alpha+p_{\alpha+1}x^{\alpha+1}+p_{\alpha+2}x^{\alpha+2}+\cdots\cdots$$

$$L=l_{\alpha-1}x^{\alpha-1}+l_\alpha x^\alpha+l_{\alpha+1}x^{\alpha+1}+\cdots\cdots$$

entwickeln. Wir wollen nun zwischen den Coefficienten dieser Reihen Relation

$$(2\alpha-2)\,l_n+(2\alpha-1)\,ap_n+2\,\alpha bq_n=0$$

herstellen. Um ihre Richtigkeit zu beweisen gehen wir von der Formel

$$q_n=a\sum_{r=0}^{r=n-\alpha-1}\frac{u_{n-\alpha-r-1}u_r}{r+\alpha+1}$$

aus. Es folgt aus ihr

$$p_n=a\sum_{r=0}^{r=n-\alpha}\frac{u_{n-\alpha-r}u_r}{r+\alpha},$$

und

$$l_n=a\sum_{r=0}^{r=n-\alpha+1}\frac{u_{n-\alpha-r+1}u_r}{r+\alpha-1}.$$

Unsere Aufgabe ist also zu zeigen dass der Ausdruck

$$A\equiv(2\alpha-2)\,a\sum_{r=0}^{r=n-\alpha+1}\frac{u_{n-\alpha-r+1}u_r}{r+\alpha-1}+(2\alpha-1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-\alpha}\frac{u_{n-\alpha-r}u_r}{r+\alpha}$$

$$+2\,\alpha ba\sum_{r=0}^{r=n-\alpha-1}\frac{u_{n-\alpha-}}{r+\alpha}$$

verschwindet. Um den Beweis zu liefern gebrauchen wir die Identität, F.

$$\equiv \sum_{r=0}^{r=n-\alpha} [(2n-2\alpha-2r+2)\,u_{n-\alpha-r+1} + (2n-2\alpha-2r+1)\,au_{n-\alpha-r}$$

$$+ (2n-2\alpha-2r)\,bu_{n-\alpha-r-1}] \frac{n+\alpha-2r-1}{(n-r)(n-\alpha+1)} au_r \equiv 0$$

vergleichen die Glieder in A der Reihe nach mit den Gliedern dieser ntität. Der Beweis wurde durchgeführt wie in Paragraph 9, und es zeigte dass die Glieder in A, Glied für Glied, mit den Gliedern in B übereinmen. Die Richtigkeit der Formel

$$(2\alpha-2)\,l_n + (2\alpha-1)\,ap_n + 2\alpha bq_n = 0 \qquad (47)$$

lso bewiesen.

22. $2au_n + av_n + 2bg_n = 0.$

Die Formel (47) gilt nicht für den Fall $\alpha = 1$. Ehe wir zum Beweis der nel für diesen Fall übergehen, wollen wir der Bequemlichkeit wegen he Reihen für specielle Werte von α in F. (41) hinschreiben. Wir n noch Formel (2) hinzu und zwar beginnen wir mit derselben. Wir n demnach

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + \cdots\cdots \\
&\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots\cdots \\
&\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{xdx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = g_2x^2 + g_3x^3 + g_4x^4 + \cdots\cdots \\
&\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = h_3x^3 + h_4x^4 + h_5x^5 + \cdots\cdots \\
&\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = j_4x^4 + j_5x^5 + j_6x^6 + \cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^{\alpha-2}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = l_{\alpha-1}x^{\alpha-1} + l_{\alpha-2}x^{\alpha-2} + \cdots\cdots \\
&\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^{\alpha-1}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = p_\alpha x^\alpha + p_{\alpha+1}x^{\alpha+1} + \cdots\cdots \\
&\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2}}\int\frac{x^\alpha dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = q_{\alpha+1}x^{\alpha+1} + q_{\alpha+2}x^{\alpha+2} + \cdots\cdots
\end{aligned}\right\} \quad (48)$$

Wir wenden uns jetzt zum Beweis der Relation

$$2au_n + av_n + 2bg_n = 0$$

welche an den Platz von der F. (47) tritt wenn $\alpha = 1$ ist. Wir tra zunächst für v_n und g_n ihre Werte, Formeln (15) und (42) ein und erhalte

$$A \equiv 2au_n + a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{r+1} + 2ba \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2}u_r}{r+2}.$$

Wir vergleichen A mit der Identität, F. (12),

$$B \equiv \sum_{r=0}^{r=n-1} [(2n-2r)u_{n-r} + (2n-2r-1)au_{n-r-1} + (2n-2r-2)bu_{n-r-2}] \frac{n-2r}{n(n-r)} au_r$$

(1) Für $r = 0$ ist $2au_n$ das erste Glied von B, also gleich dem ersten Gl von A. Im ersten Glied von B ist übrig die Summe

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{(2n-2r)(n-2r)}{n(n-r)} au_{n-r}u_r.$$

Setzt man $n-r$ für r, so ist dieselbe

$$\sum_{r=1}^{r=n-1} \frac{2r(-n+2r)}{n \cdot r} au_{n-r}u_r.$$

Die Summe dieser beiden ist Null, also stimmen die Werte der er Glieder von A und B überein.

(2) Wir vergleichen die zweiten Glieder von A und B und erhalten:

Aus A die Summe

$$a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{r+1},$$

und, wenn $n-r-1$ für r gesetzt wird,

$$a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{n-r},$$

also durch Addition,

$$(n+1)a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{(n-r)(r+1)}.$$

Aus B die Summe

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(2n-2r-1)(n-2r)}{n(n-r)} a^2 u_{n-r-1} u_r,$$

wenn $n-r-1$ für r gesetzt wird,

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(2r+1)(-n+2r+2)}{n(r+1)} a^2 u_{n-r-1} u_r,$$

somit durch Addition,

$$(n+1)\, a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1} u_r}{(n-r)(r+1)}.$$

Die Werte der zweiten Glieder von A und B stimmen demnach überein, wir gehen zu den dritten Gliedern über.

3) Für $r = n-1$ fällt das dritte Glied in B weg. Die dritten Glieder in d B haben also dieselbe Grenzwerte. Das Glied in A ist

$$2\, ba \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2} u_r}{r+2},$$

$n-r-2$ für r gesetzt,

$$2\, ba \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2} u_r}{n-r},$$

somit durch Addition,

$$2\, ba\,(n+2) \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2} u_r}{(n-r)(r+2)}.$$

as dritte Glied in B liefert

$$\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(2n-2r-2)(n-2r)}{n(n-r)} abu_{n-r-2} u_r.$$

$-r-2$ für r gesetzt,

$$\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(2r+2)(-n+2r+4)}{n(r+2)} abu_{n-r-2} u_r,$$

omit durch Addition,

$$2\, ab\,(n+2) \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2} u_r}{(n-r)(r+2)}.$$

, die dritten Glieder von A und B auch übereinstimmen, so stimmen A überein und die Formel

$$2\, au + av_n + 2\, bg_n = 0 \tag{49}$$

o bewiesen.

23. $b^a Q_n = u_a V_n - v_a U_n$.

Wir betrachten nun den Rest in der Reihe, F. (41),

$$Q = q_{a+1}x^{a+1} + q_{a+2}x^{a+2} + q_{a+3}x^{a+3} + \cdots$$

und bezeichnen

$$Q_n = [Q - q_{a+1}x^{a+1} - q_{a+2}x^{a+2} - \cdots\cdots - q_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.$$

Aus den Formeln (48) erhalten wir dann unter anderm folgende Grösse

$$\left.\begin{aligned}
U_n &= [U - u_0 - u_1 x - u_2 x^2 - \cdots\cdots - u_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.\\
V_n &= [V - v_1 x - v_2 x^2 - v_3 x^3 - \cdots\cdots - v_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.\\
G_n &= [G - g_2 x^2 - g_3 x^3 - g_4 x^4 - \cdots\cdots - g_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.\\
H_n &= [H - h_3 x^3 - h_4 x^4 - h_5 x^5 - \cdots\cdots - h_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L_n &= [L - l_{a-1}x^{a-1} - l_a x^a - \cdots\cdots - l_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.\\
P_n &= [P - p_a x^a - p_{a+1}x^{a+1} - \cdots\cdots - p_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.\\
Q_n &= [Q - q_{a+1}x^{a+1} - q_{a+2}x^{a+2} - \cdots\cdots - q_n x^n]\sqrt{1 + ax + bx^2}.
\end{aligned}\right\}$$

Trägt man in diesen Gleichungen für $UV \cdots\cdots$ ihre Werte aus Formeln (48) ein, so wird:

$$\left.\begin{aligned}
U_n &= [u_{n+1}x^{n+1} + u_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots]\sqrt{1 + ax + bx^2}\\
V_n &= [v_{n+1}x^{n+1} + v_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots]\sqrt{1 + ax + bx^2}\\
G_n &= [g_{n+1}x^{n+1} + g_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots]\sqrt{1 + ax + bx^2}\\
H_n &= [h_{n+1}x^{n+1} + h_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots]\sqrt{1 + ax + bx^2}.\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
L_n &= [l_{n+1}x^{n+1} + l_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots]\sqrt{1 + ax + bx^2}\\
P_n &= [p_{n+1}x^{n+1} + p_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots]\sqrt{1 + ax + bx^2}\\
Q_n &= [q_{n+1}x^{n+1} + q_{n+2}x^{n+2} + \cdots\cdots]\sqrt{1 + ax + bx^2}
\end{aligned}\right\}$$

Wenn man nun auf die Gleichungen (52) die Relationen, Formeln und (47),

$$2au_n + av_n + 2bg_n = 0,$$
$$(2\alpha - 2)l_n + 2\alpha - 1)ap_n + 2\alpha b q_n = 0,$$

anwendet, so bekommt man:

$$\left.\begin{aligned}
&2aU_n + aV_n + 2bG_n = 0\\
&2V_n + 3aG_n + 4bH_n = 0\\
&4G_n + 5aH_n + 6bJ_n = 0\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&(2\alpha-4)L_n + (2\alpha-3)aL_n + (2\alpha-2)bP_n = 0\\
&(2\alpha-2)L_n + (2\alpha-1)aP_n + 2\alpha bQ_n = 0
\end{aligned}\right\} \quad (53)$$

Wir multipliziren nun der Reihe nach diese Gleichungen mit u_0, u_1, $\cdots$, $u_{\alpha-1}$, und addiren. Mittels der Formeln (9) und (8) bekommen wir

$$2aU_n - 2\alpha u_\alpha P_n + 2\alpha b u_{\alpha-1} Q_n = 0. \quad (54)$$

Multipliziren wir sie der Reihe nach mit v_0, v_1, v_2, $\cdots\cdots$, $v_{\alpha-1}$, und ren wir, so bekommen wir mittels der Formeln (19) und (18)

$$2aV_n - 2\alpha v_\alpha P_n + 2\alpha b v_{\alpha-1} Q_n = 0. \quad (55)$$

Aus den beiden Gleichungen (54) und (55) eliminiren wir nun P_n und lten

$$a(v_\alpha U_n - u_\alpha V_n) + (u_{\alpha-1}v_\alpha - u_\alpha v_{\alpha-1})\alpha b Q_n = 0. \quad (56)$$

Durch F. (25)

$$\begin{vmatrix} u_n & v_n \\ u_{n-1} & v_{n-1} \end{vmatrix} = -\frac{ab^{n-1}}{n}$$

die Gleichung (56) umgeformt in

$$v_\alpha U_n - u_\alpha V_n + b^\alpha Q_n = 0,$$

man erhält sofort

$$b^\alpha Q_n = u_\alpha V_n - v_\alpha U_n. \quad (57)$$

emnach ist

$$b^{\alpha-2}L_n = u_{\alpha-2}V_n - v_{\alpha-2}U_n,$$
$$b^{\alpha-1}P_n = u_{\alpha-1}V_n - v_{\alpha-1}U_n.$$

rägt man diese Werte für L_n, P_n, und Q_n in die Relation, F. (47),

$$(2\alpha-2)L_n + (2\alpha-1)aP_n + 2\alpha bQ_n = 0$$

so wird in der That die linke Seite

$$(2\alpha-2)\frac{u_{\alpha-2}V_n - v_{\alpha-2}U_n}{b^{\alpha-2}} + (2\alpha-1)a\frac{u_{\alpha-1}V_n - v_{\alpha-1}U_n}{b^{\alpha-1}} + 2\alpha b\frac{u_\alpha V_n - v_\alpha}{b^\alpha}$$

$$= [2\alpha u_\alpha + (2\alpha-1)au_{\alpha-1} + (2\alpha-2)bu_{\alpha-2}]\frac{V_n}{b^{\alpha-1}}$$

$$+ [2\alpha v_\alpha + (2\alpha-1)av_{\alpha-1} + (2\alpha-2)bv_{\alpha-2}$$

$$= 0,$$

da nach Formeln (12) und (20) die eckigen Klammern verschwinden.

24. $ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$.

Wir setzen nun n für α in F. (41). Demnach erhalten wir aus F. (50)

$$Q_n = Q\sqrt{1+ax+bx^2}$$
$$= a\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}.$$

Aus F. (57), indem wir α durch n ersetzen und den eben erhaltenen W für Q_n eintragen, erhält man

$$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} = u_n V_n - v_n U_n.$$

Trägt man hierin für U_n und V_n ihre Werte aus Formeln (27) und ein, so erhält man nochmals F. (40)

$$ab^n \int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}}$$
$$= u_n a \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2}} + \sqrt{1+ax+bx^2}\sum_{k=0}^{k=n-1}(u_k v_n - v_k u_n)x^k$$

Abschnitt III.

25. Erweiterung der Methode.

Wir wollen nun versuchen diese Methode zur Reduction des elliptischen grals

$$\int \frac{x^n dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$

wenden. Wir führen zu diesem Zweck die Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}, \\ V &= \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}, \\ W &= \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} \int \frac{xdx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}, \end{aligned}\right\} \quad (59)$$

und entwickeln U, V, und W in Reihen welche nach steigenden Potenzen e fortschreiten, nämlich

$$\left.\begin{aligned} U &= u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots \\ V &= v_1 x + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4 + \cdots \\ W &= w_2 x^2 + w_3 x^3 + w_4 x^4 + w_5 x^5 + \cdots \end{aligned}\right\} \quad (60)$$

s ist erlaubt die Reihen für V und W resp. mit $v_1 x$ und $w_2 x^2$ zu nen.

Wir wenden uns jetzt zur Berechnung der Coefficienten in der Reihe r V.

26. Berechnung von u_n.

Um die Coefficienten u_n in

$$U = \frac{1}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}$$

zu berechnen entwickeln wir $(1 + ax + bx^2 + cx^3)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem polynomisc
Lehrsatz. Der numerische Coefficient im allgemeinen Gliede

$$\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2}) \cdot \cdots \cdot (-\frac{1}{2} - r + 1)}{p!\ k!\ l!} a^p b^k c^l x^{p+2k+3l},$$

wo $r = p + k + l$ ist, hat den Wert

$$(-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2r-1)}{2^r\ p!\ k!\ l!},$$

welchen wir durch $\binom{-\frac{1}{2}}{p,k,l}$ bezeichnen. Wir erhalten alle Coefficienten

$$u_n = \sum (-1)^r \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2r-1)}{2^r\ p!\ k!\ l!} a^p b^k c^l = \sum \binom{-\frac{1}{2}}{p,k,l}$$

wenn wir hierin p, k, und l alle ganzen positiven Werte geben die
Gleichung

$$n = p + 2k + 3l$$

genügen. Wir erhalten demnach

$$\begin{aligned} u_n = {} & \binom{-\frac{1}{2}}{n,0,0} a^n + \binom{-\frac{1}{2}}{n-2,1,0} a^{n-2} b + \binom{-\frac{1}{2}}{n-3,0,1} a^{n-3} c + \binom{-\frac{1}{2}}{n-4,2,0} a^{n-4} b^2 \\ & + \binom{-\frac{1}{2}}{n-5,1,1} a^{n-5} bc + \binom{-\frac{1}{2}}{n-6,0,2} a^{n-6} c^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{n-6,3,0} a^{n-6} b^3 \\ & + \binom{-\frac{1}{2}}{n-7,2,1} a^{n-7} b^2 c + \binom{-\frac{1}{2}}{n-8,1,2} a^{n-8} bc^2 + \cdots \cdots \\ = {} & u_{n,0,0} a^n + u_{n,1,0} a^{n-2} b + u_{n,0,1} a^{n-3} c + u_{n,2,0} a^{n-4} b^2 + u_{n,1,1} a^{n-5} bc + u_{n,0,2} a^n \\ & + u_{n,3,0} a^{n-6} b^3 + u_{n,2,1} a^{n-7} b^2 c + u_{n,1,2} a^{n-8} bc^2 + \cdots \cdots \\ = {} & \sum_{k=0,\ l=0}^{k \leq \frac{n}{2},\ l \leq \frac{n}{3}} u_{n,k,l} a^{n-2k-3l} b^k c^l, \text{ wobei} \end{aligned}$$

$$u_{n,k,l} = \binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l,k,l} = (-1)^{n-k-2l} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-2k-4l-1)}{2^{n-k-2l}(n-2k-3l)!\ k!\ l!} \text{ ist.}$$

ıter anderm ist

$$
\begin{aligned}
u_0 &= \binom{-\frac{1}{2}}{0,0,0} \\
&= u_{0,0,0} \\
&= 1, \\
u_1 &= \binom{-\frac{1}{2}}{1,0,0} a \\
&= u_{1,0,0}\, a \\
&= -\frac{1}{2} a, \\
u_2 &= \binom{-\frac{1}{2}}{2,0,0} a^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{0,1,0} b \\
&= u_{2,0,0}\, a^2 + u_{2,1,0}\, b \\
&= \frac{3}{8} a^2 - \frac{1}{2} b, \\
u_3 &= \binom{-\frac{1}{2}}{3,0,0} a^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{1,1,0} ab + \binom{-\frac{1}{2}}{0,0,1} c \\
&= u_{3,0,0}\, a^3 + u_{3,1,0}\, ab + u_{3,0,1}\, c \\
&= -\frac{5}{16} a^3 + \frac{3}{4} ab - \frac{1}{2} c, \\
u_4 &= \binom{-\frac{1}{2}}{4,0,0} a^4 + \binom{-\frac{1}{2}}{2,1,0} a^2 b + \binom{-\frac{1}{2}}{1,0,1} ac + \binom{-\frac{1}{2}}{0,2,0} b^2 \\
&= u_{4,0,0}\, a^4 + u_{4,1,0}\, a^2 b + u_{4,0,1}\, ac + u_{4,2,0}\, b^2 \\
&= \frac{35}{2^7} a^4 - \frac{15}{16} a^2 b + \frac{3}{4} ac + \frac{3}{8} b^2, \\
u_5 &= \binom{-\frac{1}{2}}{5,0,0} a^5 + \binom{-\frac{1}{2}}{3,1,0} a^3 b + \binom{-\frac{1}{2}}{2,0,1} a^2 c + \binom{-\frac{1}{2}}{1,2,0} ab^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{0,1,1} bc \\
&= u_{5,0,0}\, a^5 + u_{5,1,0}\, a^3 b + u_{5,0,1}\, a^2 c + u_{5,2,0}\, ab^2 + u_{5,1,1}\, bc \\
&= -\frac{63}{2^8} a^5 + \frac{35}{2^5} a^3 b - \frac{15}{16} a^2 c - \frac{15}{16} ab^2 + \frac{3}{4} bc,
\end{aligned}
\qquad (63)
$$

$$u_6 = \binom{-\frac{1}{2}}{6,0,0} a^6 + \binom{-\frac{1}{2}}{4,1,0} a^4 b + \binom{-\frac{1}{2}}{3,0,1} a^3 c + \binom{-\frac{1}{2}}{2,2,0} a^2 b^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{1,1,1} abc + \binom{-\frac{1}{2}}{0,3,0} b^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{0,0,2} c^2$$

$$= u_{6,0,0} a^6 + u_{6,1,0} a^4 b + u_{6,0,1} a^3 c + u_{6,2,0} a^2 b^2 + u_{6,1,1} abc + u_{6,3,0} b^3 + u_{6,0,2} c^2$$

$$= \frac{231}{2^{10}} a^6 - \frac{315}{2^8} a^4 b + \frac{35}{2^5} a^3 c + \frac{105}{2^6} a^2 b^2 - \frac{15}{8} abc - \frac{5}{16} b^3 + \frac{3}{8} c^2,$$

$$u_7 = \binom{-\frac{1}{2}}{7,0,0} a^7 + \binom{-\frac{1}{2}}{5,1,0} a^5 b + \binom{-\frac{1}{2}}{4,0,1} a^4 c + \binom{-\frac{1}{2}}{3,2,0} a^3 b^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{2,1,1} a^2 bc + \binom{-\frac{1}{2}}{1,0,2} ac^2 + \binom{-\frac{1}{2}}{1,3,0} ab^3 + \binom{-\frac{1}{2}}{0,2,1} b^2 c$$

$$= u_{7,0,0} a^7 + u_{7,1,0} a^5 b + u_{7,0,1} a^4 c + u_{7,2,0} a^3 b^2 + u_{7,1,1} a^2 bc + u_{7,0,2} ac^2 + u_{7,3,0} ab^3 + u_{7,2,1} b^2 c$$

$$= -\frac{429}{2^{11}} a^7 + \frac{693}{2^9} a^5 b - \frac{315}{2^8} a^4 c - \frac{315}{2^7} a^3 b^2 + \frac{105}{2^5} a^2 bc - \frac{15}{16} ac^2 + \frac{35}{32} ab^3 - \frac{15}{16} b^2 c.$$

27. $(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2nbu_{n-1} + (2n-1)\,cu_{n-2} = 0.$

Wir wenden uns nun zur Aufstellung einer Recursionsformel für u mittels welcher man sie nach und nach berechnen kann. Um sie zu er differenziren wir die Formel

$$U\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3} = 1,$$

tragen in das Resultat

$$\frac{dU}{dx}(1 + ax + bx^2 + cx^3) + U\left(\frac{a}{2} + bx + \frac{3}{2}cx^2\right) = 0,$$

die Werte

$$U = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^2 + \cdots\cdots$$

und

$$\frac{dU}{dx} = u_1 + 2\,u_2 x + 3\,u_3 x^2 + 4\,u_4 x^3 + \cdots\cdots$$

ein und vergleichen in der entstehenden Gleichung

$$\cdot ax + bx^2 + cx^3)\,[u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \cdots\cdots + (n+1)u_{n+1}x^n + \cdots\cdots]$$
$$+ \left(\frac{a}{2} + bx + \frac{3}{2}cx^2\right)(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots\cdots + u_nx^n + \cdots\cdots) = 0$$

Coefficienten der Potenzen von x.

Hierdurch entsteht die Formel

$$(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2nbu_{n-1} + (2n-1)\,cu_{n-2} = 0. \qquad (64)$$

Unter anderm ist

$$\left.\begin{aligned} &2u_1 + au_0 = 0,\\ &4u_2 + 3au_1 + 2bu_0 = 0,\\ &6u_3 + 5au_2 + 4bu_1 + 3cu_0 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

trägt man in diese Formeln für die u's ihre Werte aus Formeln (63) ein, hält man Identitäten die nochmals ihre Richtigkeit bestätigen. Sie sind

$$\left.\begin{aligned} &(-\tfrac{1}{2}a) + a\cdot 1 = 0,\\ &(\tfrac{3}{8}a^2 - \tfrac{1}{2}b) + 3a\,(-\tfrac{1}{2}a) + 2b\cdot 1 = 0,\\ &(-\tfrac{5}{16}a^3 + \tfrac{3}{4}ab - \tfrac{1}{2}c) + 5a\,(\tfrac{3}{8}a^2 - \tfrac{1}{2}b) + 4b\,(-\tfrac{1}{2}a) + 3c\cdot 1 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (66)$$

Verification der Formel

$$(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2nbu_{n-1} + (2n-1)\,cu_{n-2} = 0.$$

Von der Richtigkeit dieser Formel kann man sich auch in folgender Weise überzeugen. Man geht aus von den Identitäten

$$(n+1)(2n-2k-4l+1) + (2n+1)(n-2k-3l+1) + 2nk + (2n-1)l = 0,$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{-2k-3l,\,k,\,l} = -\frac{2(n-2k-3l+1)}{2n-2k-4l+1}\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l+1,\,k,\,l},$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{-2k-3l,\,k,\,l} = \frac{n-2k-3l+1}{k}\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l+1,\,k-1,\,l},$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{-2k-3l,\,k,\,l} = \frac{n-2k-3l+1}{l}\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l+1,\,k,\,l-1},$$

differenziert (a) mit $\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l,\,k,\,l}$, ersetzt dann $\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l,\,k,\,l}$ im ersten, dritten,

und vierten Glied, der Reihe nach, durch Werte aus (*b*), (*c*), und (*d*) erhält

$$(2n+2)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l+1,\,k,\,l}+(2n+1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l,\,k,\,l}+2n\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l+1,\,k-1,\,l}$$
$$+(2n-1)\binom{-\frac{1}{2}}{n-2k-3l+1,\,k,\,l-1}$$

Dies ist aber nichts anders als, F. (62),

$$(2n+2)\,u_{n+1,\,k,\,l}+(2n+1)\,u_{n,\,k,\,l}+2nu_{n-1,\,k-1,\,l}+(2n-1)\,u_{n-2,\,k,\,l-1}=0.$$

Wir geben hierin k alle ganzen positiven Werte von 0 bis $\frac{n}{2}$ inclusive, ganzen positiven Werte von 0 bis $\frac{n}{3}$ inclusive; Glieder mit negativen I sind ausgeschlossen. Nach dieser Voraussetzung erhalten wir für und $l=0$,

$$(2n+2)\,u_{n+1,\,0,\,0}+(2n+1)\,u_{n,\,0,\,0}=0;$$

für $k=0$,

$$(2n+2)\,u_{n+1,\,0,\,l}+(2n+1)\,u_{n,\,0,\,l}+(2n-1)\,u_{n-2,\,0,\,l-1}=0;$$

für $l=0$,

$$(2n+2)\,u_{n+1,\,k,\,0}+(2n+1)\,u_{n,\,k,\,0}+2nu_{n-1,\,k-1,\,0}=0.$$

Wir tragen nun für die u's ihre Werte aus F. (62) ein und erhalten f Formeln (68), (69), und (70), der Reihe nach

$$-(2n+2)\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}+(2n+1)\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2^n\,n!},$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-4l-1)}{2^{n-2l}(n-3l+1)!\;l!}[-(n+1)(2n-4l+1)$$
$$+(2n+1)(n-3l+1)+(2n-$$

$$\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\cdots\cdot(2n-2k-1)}{2^{n-k}(n-2k+1)!\;k!}[-(n+1)(2n-2k+1)$$
$$+(2n+1)(n-2k+1)+$$

Diese Ausdrücke verschwinden. Die Formeln (68), (69), und (70 alle Fälle von F. (67) wo in den gegebenen Grenzen negative Indice kommen können. Wir haben gesehen, dass die Formel richtig bleibt man die betreffenden Glieder vernachlässigt.

Vir multipliziren nun F. (67) mit $a^{n-2k-3l+1}b^k c^l$, summiren, und erhalten

$$\sum_{l=0}^{l=\frac{n}{3}} [(2n+2)\,u_{n+1,k,l} + (2n+1)\,u_{n,k,l} + 2nu_{n-1,k-1,l} + (2n-1)\,u_{n-2,k,l-1}]\,a^{n-2k-3l+1}b^k c^l = 0.$$

n dieser Gleichung betrachten wir nun jedes Glied für sich und verhen es mit F. (61). Das erste Glied ist

$$(2n+2)\sum_{k=0,\,l=0}^{k=\frac{n}{2},\,l=\frac{n}{3}} u_{n+1,k,l}\,a^{n-2k-3l+1}b^k c^l = (2n+2)\,u_{n+1};$$

weite ist

$$(2n+1)\,a\sum_{k=0,\,l=0}^{k=\frac{n}{2},\,l=\frac{n}{3}} u_{n,k,l}\,a^{n-2k-3l}b^k c^l = (2n+1)\,au_n;$$

lritte ist

$$2nb\sum_{k=0,\,l=0}^{k=\frac{n}{2},\,l=\frac{n}{3}} u_{n-1,k-1,l}\,a^{n-2k-3l+1}b^{k-1}c^l = 2nbu_{n-1};$$

ierte Glied ist

$$(2n-1)\,c\sum_{k=0,\,l=0}^{k=\frac{n}{2},\,l=\frac{n}{3}} u_{n-2,k,l-1}\,a^{n-2k-3l+1}b^k c^{l-1} = (2n-1)\,cu_{n-2}.$$

iermit ist also nochmals die Richtigkeit der Formel (64)

$$(2n+2)\,u_{n+1} + (2n+1)\,au_n + 2nbu_{n-1} + (2n-1)\,cu_{n-2} = 0$$

tigt.

). Berechnung von v_n.

nsere nächste Aufgabe ist die Berechnung der Coefficienten v_n in der

$$\frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots\cdots$$

m dies zu erreichen transformiren wir mittelst

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$

ormel für V und erhalten

$$V = aU\int Udx$$

$$= a\,(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots\cdots + u_nx^n)\int(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots\cdots + u_nx^n$$

$$= a\,(u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots\cdots + u_nx^n)\left(u_0x + \frac{u_1}{2}x^2 + \frac{u_2}{3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{u_n}{n+1}x^{n+1}\right)$$

Die additive Constante C dürfen wir gleich Null setzen.

Der Coefficient v_n von x^n hat den Wert

$$v_n = a\left[\frac{u_{n-1}u_0}{1} + \frac{u_{n-2}u_1}{2} + \frac{u_{n-3}u_2}{3} + \cdots\cdots + \frac{u_0u_{n-1}}{n}\right]$$

$$= a\sum_{r=0}^{r=n} \frac{{}^{n-r-1}u_r}{r+1}.$$

Unter anderm ist

$$v_1 = au_0u_0,$$

$$v_2 = a\frac{u_1u_0}{1} + a\frac{u_0u_2}{2},$$

$$v_3 = a\left[\frac{u_2u_0}{1} + \frac{u_1u_1}{2} + \frac{u_0u_2}{3}\right].$$

. . . . . .

. . . . . .

Tragen wir in diese Formeln für die u's ihre Werte aus Formel (63) so wird

$$v_1 = {}^{*}v_{1,0,0}\,a$$

$$= a,$$

$$v_2 = v_{2,0,0}\,a^2$$

$$= -\frac{3}{4}a^2,$$

$$v_3 = v_{3,0,0}\,a^3 + v_{3,1,0}\,ab$$

$$= \frac{5}{8}a^3 - \frac{2}{3}ab.$$

* Die Bedeutung der numerischen Coefficienten $v_{n,g,h}$ werden wir später geben.

$$
\left.
\begin{aligned}
&v_{4,0,0}a^4 + v_{4,1,0}a^2b + v_{4,0,1}ac \\
&-\frac{35}{64}a^4 = \frac{55}{48}a^2b - \frac{5}{8}ac, \\
&v_{5,0,0}a^5 + v_{5,1,0}a^3b + v_{5,0,1}a^2c + v_{5,2,0}ab^2 \\
&\frac{63}{2^7}a^5 - \frac{49}{32}a^3b + \frac{87}{80}a^2c + \frac{8}{15}ab^2, \\
&v_{6,0,0}a^6 + v_{6,1,0}a^4b + v_{6,0,1}a^3c + v_{6,2,0}a^2b^2 + v_{6,1,1}abc \\
&-\frac{231}{2^9}a^6 + \frac{119}{2^6}a^4b - \frac{469}{2^5\cdot 5}a^3c - \frac{231}{2^5\cdot 5}a^2b^2 + \frac{49}{48}abc, \\
&v_{7,0,0}a^7 + v_{7,1,0}a^5b + v_{7,0,1}a^4c + v_{7,2,0}a^3b^2 + v_{7,1,1}a^2bc \\
&\qquad + v_{7,3,0}ab^3 + v_{7,0,2}ac^2 \\
&\frac{429}{2^{10}}a^7 - \frac{275}{2^7}a^5b + \frac{115}{2^6}a^4c + \frac{849}{2^6\cdot 5}a^3b^2 - \frac{3114}{1120}a^2bc \\
&\qquad - \frac{16}{35}ab^3 + \frac{55}{12}ac^2.
\end{aligned}
\right\} \quad (72)
$$

). $(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} + (2n-1)\,cv_{n-2} = 0.$

m die Recursionsformel für die v's zu erhalten differenziren wir

$$V\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3} = a\int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}},$$

n für V und $\frac{dV}{dx}$ die Werte

$$V = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

$$\frac{dV}{dx} = v_1 + 2v_2x + 3v_3x^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

ıd bekommen

$$(1+ax+bx^2+cx^3)\,[v_1 + 2v_2x + 3v_3x^2 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + (n+1)v_{n+1}x^n]$$
$$+\left(\frac{a}{2} + bx + \frac{3}{2}cx^2\right)(v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot + v_nx^n) - a = 0.$$

ergleicht man hierin die Coefficienten der Potenzen von x, so entsteht

$$(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2nbv_{n-1} + (2n-1)\,cv_{n-2} = 0. \qquad (73)$$

Unter anderm ist

$$v_1 - a = 0,$$
$$4\,v_2 + 3\,av_1 = 0,$$
$$6\,v_3 + 5\,av_2 + 4\,bv_1 = 0,$$
$$8\,v_4 + 7\,av_3 + 6\,bv_2 + 5\,cv_1 = 0.$$

Trägt man hier für die v's ihre Werte aus Formeln (72) ein, so bek man Identitäten die uns nochmals von der Richtigkeit der Formeln (74) zeugen. Sie lauten

$$a - a = 0,$$
$$4\,(-\tfrac{3}{4}a^2) + 3\,a \cdot a = 0,$$
$$6\,(\tfrac{5}{8}a^3 - \tfrac{2}{3}ab) + 5\,a\,(-\tfrac{3}{4}a^2) + 4\,b \cdot a = 0,$$
$$8\,(-\tfrac{3}{6}\tfrac{5}{4}a^4 + \tfrac{5}{4}\tfrac{5}{8}a^2b - \tfrac{5}{8}ac) + 7\,a\,(\tfrac{5}{8}a^3 - \tfrac{2}{3}ab) + 6\,b\,(-\tfrac{3}{4}a^2) + 5\,c \cdot a =$$

31. Verification der Formel

$$(2n+2)\,v_{n+1} + (2n+1)\,av_n + 2\,nbv_{n-1} + (2n-1)\,cv_{n-2} = 0.$$

Um uns nochmals von der Richtigkeit dieser Formel zu überzeugen bri wir durch Eintragung der Werte der v's aus F. (71) den Ausdruck linker in die Form

$$A \equiv (2n+2)\,a\sum_{r=0}^{r=n}\frac{u_{n-r}u_r}{r+1} + (2n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{r+1}$$
$$+ 2\,nab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{r+1} + (2n-1)\,ac\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{u_{n-}}{r}$$

und vergleichen diesen Ausdruck, Glied für Glied, mit der Identität, F.

$$B \equiv \sum_{r=0}^{r=n-1}[(2n-2r)\,u_{n-r} + (2n-2r-1)\,au_{n-r-1} + (2n-2r-2)\,bu_{n-}$$
$$+ (2n-2r-3)\,cu_{n-r-3}]\frac{n+2r+2}{n(r+1)}\,au_{}$$

Der Beweis zerfällt in vier Teile :

(1) Das erste Glied in A wird für $r = 0$ und $r = n$

$$(2n+2)\,au_nu_0 \quad \text{und} \quad (2n+2)\,a\,\frac{u_nu_0}{n+1}\cdot$$

Summe dieser beiden ist

$$(2n+4)\,au_nu_0.$$

Das erste Glied in B wird für $r=0$

$$(2n+4)\,au_nu_0.$$

m ersten Gliede von A bleibt übrig die Summe

$$(2n+2)\,a\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{u_{n-r}u_r}{r+1}.$$

t man hierin $n-r$ für r, so erhält man

$$(2n+2)\,a\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{u_{n-r}u_r}{n-r+1}.$$

h Addition bekommt man

$$(2n+2)(n+2)\,a\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{u_{n-r}u_r}{(r+1)(n-r+1)}.$$

m ersten Gliede von B bleibt übrig die Summe

$$\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{(2n-2r)(n+2r+2)}{n(r+1)}au_{n-r}u_r.$$

a hierin $n-r$ für r gesetzt wird, so erhält man

$$\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{2r(3n-2r+2)}{n(n-r+1)}au_{n-r}u_r.$$

t man diese beiden Ausdrücke, so bekommt man

$$(2n+2)(n+2)\,a\sum_{r=1}^{r=n-1}\frac{u_{n-r}u_r}{(r+1)(n-r+1)}.$$

e ersten Glieder von A und B stimmen also überein.

) Wir schreiben das zweite Glied in A und das Resultat wenn darin -1 für r gesetzt wird. Wir haben also

$$(2n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{r+1}$$

$$(2n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{n-r}.$$

Durch Addition erhält man

$$(2n+1)(n+1)a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{(n-r)(r+1)}.$$

Dasselbe verfahren mit dem zweiten Glied in B liefert

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(2n-2r-1)(n+2r+2)}{n(r+1)} a^2 u_{n-r-1}u_r,$$

$$\sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{(2r+1)(3n-2r)}{n(n-r)} a^2 u_{n-r-1}u_r,$$

und durch Addition,

$$(2n+1)(n+1)a^2 \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1}u_r}{(n-r)(r+1)}.$$

Hiermit ist bewiesen, dass die zweiten Glieder von A und B auch einstimmen.

(3) Das dritte Glied von A ist

$$2nab \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2}u_r}{r+1}.$$

Wir setzen hierin $n-r-2$ für r und erhalten

$$2nab \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2}u_r}{n-r-1}.$$

Durch Addition bekommt man

$$2n^2ab \sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{u_{n-r-2}u_r}{(r+1)(n-r+1)}.$$

Das dritte Glied in B fällt weg für $r = n-1$. Es bleibt übrig die S

$$\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(2n-2r-2)(n+2r+2)}{n(r+1)} abu_{n-r-2}u_r.$$

Wir setzen hierin $n-r-2$ für r und erhalten

$$\sum_{r=0}^{r=n-2} \frac{(2r+2)(3n-2r-2)}{n(n-r-1)} abu_{n-r-2}u_r.$$

h Addition erhält man

$$2\,n^2ab\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}\,u_r}{(r+1)\,(n-r+1)}\,.$$

ie dritten Glieder von A und B stimmen auch überein, und wir gehen Vergleich der vierten Glieder über.

:) Das vierte Glied in A ist

$$(2\,n-1)\,ac\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{u_{n-r-3}\,u_r}{r+1}\,.$$

:etzen $n-r-3$ für r und erhalten

$$(2\,n-1)\,ac\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{u_{n-r-3}\,u_r}{n-r-2}\,.$$

n Addition erhält man

$$(2\,n-1)\,(n-1)\,ac\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{u_{n-r-3}\,u_r}{(r+1)\,(n-r-2)}\,.$$

ür $r=n-1$ und $r=n-2$ hat das vierte Glied in B negative Indices. eibt daher übrig die Summe

$$\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{(2\,n-2\,r-3)\,(n+2\,r+2)}{n\,(r+1)}\,acu_{n-r-3}\,u_r.$$

:etzen $n-r-3$ für r und erhalten

$$\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{(2\,r+3)\,(3\,n-2\,r-4)}{n\,(n-r-2)}\,acu_{n-r-3}\,u_r.$$

n Addition bekommt man

$$(2\,n-1)\,(n-1)\,ac\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{u_{n-r-3}\,u_r}{(r+1)\,(n-r-2)}\,.$$

ie vierten Glieder von A und B stimmen auch überein, und die Formel

$$(2\,n+2)\,v_{n+1}+(2\,n+1)\,av_n+2\,nbv_{n-1}+(2\,n-1)\,cv_{n-2}=0$$

wiesen.

$$\textbf{32.}\quad v_{n,g,h} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=\frac{n-r-1}{3}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \sum_{t=0}^{t=\frac{r}{3}} \frac{u_{n-r-1,k,l} u_{r,s,t}}{r+1}.$$

In den Formeln (72) haben wir gewisse Zahlen-Coefficienten mit bezeichnet. Um sie durch eine Formel darzustellen gehen wir aus v Formel (71), tragen in diese die Werte der u's aus F. (61) ein und erhal

$$v_n = a \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{u_{n-r-1} u_r}{r+1}$$

$$= a \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=\frac{n-r-1}{3}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \sum_{t=0}^{t=\frac{r}{3}} \frac{u_{n-r-1,k,l} u_{r,s,t}}{r+1} a^{n-2k-3l-2s-3t-1} b^{k+s} c^{l+t}$$

$$= v_{n,0,0} a^n + v_{n,1,0} a^{n-2} b + v_{n,0,1} a^{n-3} c + v_{n,2,0} a^{n-4} b^2 + v_{n,1,1} a^{n-5} bc$$

$$+ v_{n,0,2} a^{n-6} c^2 + \cdots\cdots + v_{n,g,h} a^{n-2g-3h} b^g c^h +$$

Hierin ist

$$v_{n,g,h} = \sum_{r=0}^{r=n-1} \sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-1}{2}} \sum_{l=0}^{l=\frac{n-r-1}{3}} \sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}} \sum_{t=0}^{t=\frac{r}{3}} \frac{u_{n-r-1,k,l} u_{r,s,t}}{r+1},$$

wobei $g = k + s$ und $h = l + t$ ist.

Anmerkung. — Natürlich besteht auch hier die Relation

$$(2n+2) v_{n+1,g,h} + (2n+1) v_{n,g,h} + 2n v_{n-1,g-1,h} + (2n-1) v_{n-2,g,h-1} = 0.$$

33. Berechnung von w_n.

Um die Coefficienten w_n in

$$W = \frac{a}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} \int \frac{x dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = w_2 x^2 + w_3 x^3 + w_4 x^4 +$$

zu berechnen transformiren wir durch

$$U = \frac{1}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_3 x^3 + \cdots\cdots$$

in die Form

$$aU\int Uxdx$$

$$a\,(u_0+u_1x+u_2x^2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\int(u_0+u_1x+u_2x^2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\,xdx$$

$$a\,(u_0+u_1x+u_2x^2+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot)\left(\frac{u_0x^2}{2}+\frac{u_1x^3}{3}+\frac{u_2x^4}{4}+\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\right)+C.$$

Die additive Constante setzen wir gleich Null.

Der Coefficient w_n von x^n hat den Wert

$$w_n=a\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{r+2}. \tag{76}$$

Unter anderm ist

$$w_2=a\,\frac{u_0u_0}{2},$$

$$w_3=a\,\frac{u_1u_0}{2}+a\,\frac{u_0u_1}{3},$$

$$w_4=a\,\frac{u_2u_0}{2}+a\,\frac{u_1u_1}{3}+a\,\frac{u_0u_2}{4}.$$

Tragen wir in diese Formeln für die u's ihre Werte aus Formeln (63) ein, so wird

$$\left.\begin{aligned}
w_2&=w_{2,0,0}a\\
&=\tfrac{1}{2}a,\\
w_3&=w_{3,0,0}a^2\\
&=-\tfrac{5}{12}a^2,\\
w_4&=w_{4,0,0}a^3+w_{4,1,0}ab\\
&=\tfrac{35}{96}a^3-\tfrac{3}{8}ab,\\
w_5&=w_{5,0,0}a^4+w_{5,1,0}a^2b+w_{5,0,1}ac\\
&=-\tfrac{21}{64}a^4+\tfrac{161}{240}a^2b-\tfrac{7}{20}ac,\\
w_6&=w_{6,0,0}a^5+w_{6,1,0}a^3b+w_{6,0,1}a^2c+w_{6,2,0}ab^2\\
&=\tfrac{77}{256}a^5-\tfrac{147}{160}a^3b+\tfrac{19}{30}a^2c+\tfrac{5}{16}ab^2,\\
w_7&=w_{7,0,0}a^6+w_{7,1,0}a^4b+w_{7,0,1}a^3c+w_{7,2,0}a^2b^2+w_{7,1,1}abc\\
&=-\tfrac{143}{512}a^6+\tfrac{363}{320}a^4b-\tfrac{1925}{2240}a^3c-\tfrac{969}{1120}a^2b^2+\tfrac{333}{560}abc.
\end{aligned}\right\}\tag{77}$$

34. $(2n+2)\,w_{n+1} + (2n+1)\,aw_n + 2\,nbw_{n-1} + (2n-1)\,cw_{n-2} = 0.$

Um die Recursionsformel für die w's zu erhalten differenziren wir

$$W\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3} = a\int \frac{xdx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}},$$

tragen in das Resultat

$$\frac{dW}{dx}(1+ax+bx^2+cx^3) + W\left(\frac{a}{2}+bx+\frac{3}{2}cx^2\right) - ax = 0$$

die Werte

$$W = w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \cdots\cdots$$
$$\frac{dW}{dx} = 2\,w_2x + 3\,w_3x^2 + 4\,w_4x^3 + \cdots\cdots$$

ein, und erhalten

$$(1+ax+bx^2+cx^3)\,(2\,w_2x + 3\,w_3x^2 + 4\,w_4x^3 + \cdots\cdots + nw_nx^{n-1} + \cdots$$
$$\left(\frac{a}{2}+bx+\frac{3}{2}cx^2\right)(w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \cdots\cdots + w_nx^n + \cdots\cdots) -$$

Durch Vergleichung der Coefficienten der Potenzen von x entst
Formel

$$(2n+2)\,w_{n+1} + (2n+1)\,aw_n + 2\,nbw_{n-1} + (2n-1)\,cw_{n-2} = 0.$$

Unter anderm ist

$$2\,w_2 - a = 0,$$
$$6\,w_3 + 5\,aw_2 = 0,$$
$$8\,w_4 + 7\,aw_3 + 6\,bw_2 = 0,$$
$$10\,w_5 + 9\,aw_4 + 8\,bw_3 + 7\,cw_2 = 0.$$

Trägt man in diese Formeln die auf andere Weise berechnete We
w's aus Formeln (77) ein, so wird in der That

$2\,(\frac{1}{2}a) - a = 0.$

$6\,(-\frac{5}{12}a^2) + 5\,a\,(\frac{1}{2}a) = 0.$

$8\,(\frac{3}{9}\frac{5}{6}a^3 - \frac{3}{8}ab) + 7\,a\,(-\frac{5}{12}a^2) + 6\,b\,(\frac{1}{2}a) = 0.$

$10\,(-\frac{2}{6}\frac{1}{4}a^4 + \frac{1}{2}\frac{6}{4}\frac{1}{0}a^2b - \frac{7}{20}ac) + 9\,a\,(\frac{3}{9}\frac{5}{6}a^3 - \frac{3}{8}ab) + 8\,b\,(-\frac{5}{12}a^2) + 7\,c\,(\frac{1}{2}$

Bringt man die F. (78)

$$(2n+2)\,w_{n+1} + (2n+1)\,aw_n + 2\,nbw_{n-1} + (2n-1)\,cw_{n-2} = 0$$

h Eintragung der Werte der w's aus F. (76) in die Form

$$(2n+2)\,a\sum_{r=0}^{r=n-1}\frac{u_{n-r-1}u_r}{r+2} + (2n+1)\,a^2\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{r+2}$$

$$+ 2\,nba\sum_{r=0}^{r=n-3}\frac{u_{n-r-3}u_r}{r+2} + (2n-1)\,ac\sum_{r=0}^{r=n-4}\frac{u_{n-r-4}u_r}{r+2} = 0$$

vergleicht dann diesen Ausdruck, Glied für Glied, mit der Identität, F. (64),

$$\sum_{r=0}^{r=n-2}[(2n-2r-2)\,u_{n-r-1} + (2n-2r-3)\,au_{n-r-2} + (2n-2r-4)\,bu_{n-r-3}$$

$$+ (2n-2r-5)\,cu_{n-r-4}]\,\frac{n+2r+3}{(n-1)(r+2)}\,au_r = 0,$$

rd durch das Uebereinstimmen von A und B nochmals die Richtigkeit '. (78) bestätigt. Das Verfahren ist genau dasselbe wie in Paragraph 31.

5. Formel für $w_{n,g,h}$.

Wir tragen in F. (76)

$$w_n = a\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{r+2}$$

ie u's ihre Werte aus F. (61) ein und erhalten

$$a\sum_{r=0}^{r=n-2}\frac{u_{n-r-2}u_r}{r+2}$$

$$a\sum_{r=0}^{r=n-2}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-2}{2}}\sum_{l=0}^{l=\frac{n-r-2}{3}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\sum_{t=0}^{t=\frac{r}{3}}\frac{u_{n-r-2,k,l}u_{r,s,t}}{r+2}\cdot a^{n-2k-3l-2s-3t-2}\,b^{k+s}\,c^{l+t}$$

$$= w_{n,0,0}a^{n-1} + w_{n,1,0}a^{n-3}b + w_{n,0,1}a^{n-4}c + w_{n,2,0}a^{n-5}b + w_{n,1,1}a^{n-6}bc$$

$$+ \cdots\cdots + w_{n,g,h}a^{n-2g-3h-1}b^g c^h + \cdots\cdots$$

ierin ist

$$w_{n,g,h} = \sum_{r=0}^{r=n-2}\sum_{k=0}^{k=\frac{n-r-2}{2}}\sum_{l=0}^{l=\frac{n-r-2}{3}}\sum_{s=0}^{s=\frac{r}{2}}\sum_{t=0}^{t=\frac{r}{3}}\frac{u_{n-r-2,k,l}u_{r,s,t}}{r+2}, \qquad (80)$$

b $g = k+s,\ h = l+t$ ist.

36. U_n, V_n, und W_n.

In den Reihen, F. (60),

$$U = u_0 + u_1x + u_2x^2 + u_3x^3 + u_4x^4 + \cdots\cdots,$$
$$V = v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + v_4x^4 + v_5x^5 + \cdots\cdots,$$
$$W = w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + w_5x^5 + \cdots\cdots,$$

sind die Reste

$$U - (u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots\cdots + u_nx^n),$$
$$V - (v_1x + v_2x^2 + v_3x^3 + \cdots\cdots + v_nx^n),$$
$$W - (w_2x^2 + w_3x^3 + w_4x^4 + \cdots\cdots + w_nx^n).$$

Wir führen für das Produkt von Rest mit Wurzel $\sqrt{1 + ax + bx^2}$ die Bezeichnung

$$U_n = (U - u_0 - u_1x - u_2x^2 - \cdots\cdots - u_nx^n)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$
$$V_n = (V - v_1x - v_2x^2 - v_3x^3 - \cdots\cdots - v_nx^n)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$
$$W_n = (W - w_2x^2 - w_3x^3 - w_4x^4 - \cdots\cdots - w_nx^n)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$

ein.

Unter anderm ist

$$U_0 = 1 - u_0\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$
$$U_1 = 1 - (u_0 + u_1x)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$
$$U_2 = 1 - (u_0 + u_1x + u_2x^2)\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}.$$

$$V_0 = a\int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$V_1 = a\int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} - v_1x\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3},$$

$$V_2 = a\int \frac{dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} - (v_1x + v_2x^2)\sqrt{1 + ax + bx^2 + c}$$

$$W_0 = a\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$W_1 = a\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$W_2 = a\int \frac{xdx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} - w_2x^2\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}.$$

$\frac{dU_n}{dx}, \frac{dV_n}{dx}, \frac{dW_n}{dx}$.

ırch Differentiation und Multiplication mit Wurzel $\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}$ ımt man aus U_n, F. (81),

$$\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}\,\frac{dU_n}{dx}$$

$$= (u_1 + 2u_2x + 3u_3x^2 + \cdots\cdots + nu_nx^{n-1})(1 + ax + bx^2 + cx^3)$$
$$+ (u_0 + u_1x + u_2x^2 + \cdots\cdots + u_nx^n)\left(\frac{a}{2} + bx + \frac{3}{2}cx^2\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{a}{2}u_0\right)x^0 + \left(2u_2 + \frac{3}{2}au_1 + bu_0\right)x + \left(3u_3 + \frac{5}{2}au_2 + 2bu_1\right.$$
$$\left. + \frac{3}{2}cu_0\right)x^2 + \cdots\cdots + \left[(n-1)u_{n-1} + \frac{2n-3}{2}au_{n-2}\right.$$
$$\left. + (n-2)bu_{n-3} + \frac{2n-5}{2}cu_{n-4}\right]x^{n-2} + \left[nu_n + \frac{2n-1}{2}bu_{n-1}\right.$$
$$\left. + (n-1)bu_{n-2} + \frac{2n-3}{2}cu_{n-3}\right]x^{n-1} + \left[\frac{2n+1}{2}au_n + nbu_{n-1}\right.$$
$$\left. + \frac{2n-1}{2}cu_{n-2}\right]x^n + \left[(n+1)bu_n + \frac{2n+1}{2}cu_{n-1}\right]x^{n+1}$$
$$+ \frac{2n+3}{2}cu_nx^{n+2}.$$

hterhand verschwinden nach Formeln (65) und (64) die Coefficienten enzen von $x^0, x^1, x^2, \cdots\cdots$ bis x^{n-1}. Die Coefficienten von x^n und x^{n+1} sich aus F. (64) durch

$$-(n+1)u_{n+1} \text{ und } -\left[(n+2)u_{n+2} + \frac{2n+3}{2}au_{n+1}\right]$$

ı. Wir haben also

$$= \frac{(2n+2)u_{n+1}x^n + [(2n+4)u_{n+2} + (2n+3)au_{n+1}]x^{n+1} - (2n+3)cu_nx^{n+2}}{2\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$

(82)

Unter anderm ist

$$\frac{dU_0}{dx} = -\frac{\frac{a}{2} + bx + \frac{3}{2}cx^2}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$\frac{dU_1}{dx} = \frac{(3a^2 - 4b)x + (4ab - 6c^2)x^2 + 5acx^3}{4\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}.$$

Durch dasselbe Verfahren bekommt man aus V_n und W_n, F. (81),

$$\frac{dV_n}{dx} = \frac{(2n+2)v_{n+1}x^n + [(2n+4)v_{n+2} + (2n+3)av_{n+1}]x^{n+1} - (2n+3)}{2\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}$$

$$\frac{dW_n}{dx} = \frac{(2n+2)w_{n+1}x^n + [(2n+4)w_{n+2} + (2n+3)aw_{n+1}]x^{n+1} - (2n+3)}{2\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}.$$

Unter anderm ist

$$\frac{dV_0}{dx} = \frac{a}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$\frac{dV_1}{dx} = -\frac{a(3ax + 4bx^2 + 5cx^3)}{2\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$\frac{dW_0}{dx} = \frac{ax}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}},$$

$$\frac{dW_1}{dx} = \frac{ax}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}.$$

38. $$\frac{2n+3}{2} Dc \int \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}} = -(D_1U_n + D_2V_n + D_3W_n)$$

Die Formeln (82), (83), und (84)

$$\frac{dU_n}{dx} = \frac{(2n+2)u_{n+1}x^n + [(2n+4)u_{n+2} + (2n+3)au_{n+1}]x^{n+1} - (2n+3)}{2\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}$$

$$\frac{dV_n}{dx} = \frac{(2n+2)v_{n+1}x^n + [(2n+4)v_{n+2} + (2n+3)av_{n+1}]x^{n+1} - (2n+3)}{2\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}$$

$$\frac{dW_n}{dx} = \frac{(2n+2)w_{n+1}x^n + [(2n+4)w_{n+2} + (2n+3)aw_{n+1}]x^{n+1} - (2n+3)}{2\sqrt{1 + ax + bx^2 + cx^3}}$$

pliziren wir nun der Reihe nach mit D_1, D_2, D_3, wo D_1, D_2, und D_3 die rdeterminanten von der ersten Colonne in der Determinante

$$D \equiv \begin{vmatrix} u_n & u_{n+1} & u_{n+2} \\ v_n & v_{n+1} & v_{n+2} \\ w_n & w_{n+1} & w_{n+2} \end{vmatrix}$$

addiren, und erhalten

$$D_1 \frac{dU_n}{dx} + D_2 \frac{dV_n}{dx} + D_3 \frac{dW_n}{dx} = -(2n+3) Dc \frac{x^{n+2}}{2\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}. \quad (85)$$

us der F. (85) erhalten wir nun

$$\frac{-3)}{} Dc \int \frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = -(D_1U_n + D_2V_n + D_3W_n) + K. \quad (86)$$

. Anwendungen der Formel.

ir $n = 0$ wird F. (86)

$$\frac{3}{2} cD \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = -(D_1U_0 + D_2V_0 + D_3W_0) + C.$$

ägt man hier die Werte für U_0, V_0, und W_0 aus Formeln (81) ein, so wird

$$\frac{3}{2} cD \int \frac{x^2dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = D_1u_0 \sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}$$
$$- D_1 - aD_2 \int \frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$
$$- aD_3 \int \frac{xdx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} + C.$$

le Determinante D ist in diesem Fall

$$D \equiv \begin{vmatrix} u_0 & u_1 & u_2 \\ v_0 & v_1 & v_2 \\ w_0 & w_1 & w_2 \end{vmatrix} = D_1.$$

lferenzirt man obiges Resultat, multiplizirt mit Wurzel $\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}$, l ägt die Werte für die Constanten ein, so wird

$$\frac{3}{2}cDx^2 = D_1\left(\frac{a}{2} + bx + \frac{3}{2}cx^2\right) - aD_2 - aD_3x,$$

$$x^2 : \frac{3}{2}cD = \frac{3}{2}cD_1 = \frac{3}{2}cD,$$

$$x : 0 = bD_1 - aD_3$$

$$= b(v_1w_2 - v_2w_1) - a(u_1v_2 - u_2v_1)$$

$$= b\left[a\frac{a}{2} - -\frac{3}{4}a^20\right] - a\left[-\frac{a}{2}\cdot -\frac{3}{4}a^2 - \left(\frac{3}{8}a^2 - \frac{1}{2}\right.\right.$$

$$= 0,$$

$$x^0 : 0 = \frac{a}{2}D_1 - aD_2$$

$$= \frac{a}{2}\left[\frac{a^2}{2}\right] + a\left[-\frac{a}{2}\cdot\frac{a}{2}\right]$$

$$= 0.$$

Für $n = 1$ wird F. (86)

$$\frac{5}{2}cD\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = -(D_1U_1 + D_2V_1 + D_3W_1) + C$$

$$= [D_1(u_0 + u_1x) + D_2v_1x]\sqrt{1+ax+bx^2+}$$

$$- D_1 - aD_2\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$

$$- aD_3\int\frac{xdx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}.$$

Trägt man die Werte aus

$$D \equiv \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = u_1D_1 + v_1D_2$$

ein, so wird

$$\frac{5}{2}cD\int\frac{x^3dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}} = (Dx + u_0D_1)\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}$$

$$- D_1 - aD_2\int\frac{dx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}$$

$$- aD_3\int\frac{xdx}{\sqrt{1+ax+bx^2+cx^3}}.$$

fferenzirt man dieses Resultat, so wird

$$\frac{5}{2}cDx^3 = D(1 + ax + bx^2 + cx^3) + (Dx + D_1)\left(\frac{a}{2} + bx + \frac{3}{2}cx^2\right) - aD_2 - aD_3x,$$

e Coefficienten auf beiden Seiten sind einander gleich.

$$x^3 : \frac{5}{2}cD = cD + \frac{3}{2}cD$$

$$x^2 : 0 = bD + bD + \frac{3}{2}cD_1$$

$$x : 0 = aD + \frac{a}{2}D + bD_1 - aD_3$$

$$x^0 : 0 = D + \frac{a}{2}D_1 - aD_2.$$

Lebenslauf.

Ich, Henry Benner, Sohn des Landwirths Jonas Benner und sei
frau Hannah, eine geborene Hertzel, wurde am 13ten October im Ja
zu Cressman im Staate Pennsylvania, in den Vereinigten Staaten von
geboren. Ich bekenne mich zur evangelischen Confession. Ich bes
öffentlichen Schulen in Pennsylvania, sowie die Staats Normal Sc
Millersville und West Chester. Ich diente inzwischen als Lehre
öffentlichen Schulen und von 1885 bis 1887 als Lehrer der Mathemat
Staats Normal Schule zu West Chester. In 1887 trat ich als Stude
Universität Michigan ein, und bestand in 1889 das Examen für d
"Master of Science." Das nächste Jahr wurde ich als "Universit
in Mathematics" zu Clark Universität ernannt. Von 1890 bis 1892
Lehrer der Mathematik in der "Academy of Northwestern Universi
von 1892 bis 1895 in der "Chicago Manual Training School." Im
1895 immatriculirte ich in der Universität Berlin und besuchte dort
des Wintersemesters Vorlesungen in der Mathematik. Im April 18
ich die Universität Erlangen. Hier hörte ich die Vorlesungen der Pro
und Docenten Gordan, Noether, Wiedemann, Pechuel-Lösche, Schn
Simon. Diesen sämmtlichen Herren spreche ich hier für das fre
Entgegenkommen bei meinen Studien meinen innigsten Dank aus.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1880. N:o 10.
Stockholm.

ementära bevis för några formler i differenskalkylen.

Af Alexander Berger.

[Meddeladt den 8 December 1880].

§ 1.

Inledning.

Om uttrycket

$$u_k = \frac{k^\mu}{2} + \frac{(k+1)^\mu}{2} - \frac{(k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}}{\mu+1}$$

ecklas i serie efter stigande digniteter af $\frac{1}{k}$, så erhålles

$$u_k = \frac{\mu(\mu-1)}{12k^{2-\mu}}\left\{1 + \frac{\mu-2}{2k} + \ldots\ldots\right\}.$$

Häraf följer, att serien

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 + \ldots\ldots$$

konvergent för

$$-\infty < \mu < +1$$

för dessa värden på μ sätta vi

$$K_\mu = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\frac{k^\mu}{2} + \frac{(k+1)^\mu}{2} - \frac{(k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}}{\mu+1}\right\}.$$

denna formel erhålles

$$K_{-1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\},$$

arjemte vi sätta

$$H = 1 - \sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1\right\}.$$

Att serierna, som förekomma i högra membra af eqvatio
(4) och (5) konvergera, följer deraf, att

$$(6) \qquad \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \frac{1+\delta_1}{6k^3},$$

och

$$(7) \qquad \left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1 = \frac{1+\delta_0}{12k^2},$$

der qvantiteterna δ_0 och δ_1 konvergera mot noll för $k = \infty$

Af eqv. (3) erhålles för $x = \infty$

$$(8) \qquad \frac{1}{2} + \lim \sum_{k=1}^{k=x-1} \left\{\frac{k^\mu}{2} + \frac{(k+1)^\mu}{2} - \frac{(k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}}{\mu+1}\right\} = K_\mu,$$

eller identiskt

$$(9) \qquad \lim \left\{1^\mu + 2^\mu + 3^\mu + \ldots + x^\mu - \frac{x^{\mu+1}-1}{\mu+1} - \frac{x^\mu}{2}\right\} = K$$

Af eqv. (4) erhålles för $x = \infty$

$$(10) \qquad \frac{1}{2} + \lim \sum_{k=1}^{k=x-1} \left\{\frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right)\right\} = K_{-1},$$

eller efter några reduktioner

$$(11) \qquad \lim \left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} - \log x\right\} = K_{-1}.$$

Af eqv. (5) erhålles för $x = \infty$

$$(12) \qquad \lim \sum_{k=1}^{k=x-1} \left\{\left(k + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{k}\right) - 1\right\} = 1 - H$$

eller

$$(13) \qquad \lim \prod_{k=1}^{k=x-1} \frac{\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+\frac{1}{2}}}{e} = e^{1-H},$$

eller

$$(14) \lim \frac{\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1+1/2}\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2+1/2} \ldots \left(1+\frac{1}{x-1}\right)^{x-1/2}}{e^{x-1}} = e$$

och efter några reduktioner

$$(15) \qquad \lim \frac{x^x\sqrt{x}}{1.2.3\ldots(x-1)\,x\,.\,e^{x-1}} = e^{1-H},$$

af följer

$$\lim \frac{1.2.3\ldots(x-1)\,x}{x^x\, e^{-x}\sqrt{x}} = e^H,$$

således är

$$1.2.3\ldots.(x-1)\,x = (e^H + \delta)\, x^x\, e^{-x}\sqrt{x},$$

lim $\delta = o$ för $x = \infty$. Om formeln (17) användes på iden-

en

$$\frac{2^{4x}\,(1.2.3\ldots x)^4}{(2x+1)\,(1.2.3\ldots 2x)^2} = \frac{2.2.4.4\ldots.2x.2x}{1.3.3.5\ldots(2x-1)\,(2x+1)},$$

rhålles

$$\frac{x^2}{2x\,(2x+1)} \cdot \frac{(e^H+\delta)^4}{(e^H+\delta_1)^2} = \frac{2.2.4.4\ldots 2x.2x}{1.3.3.5\ldots(2x-1)\,(2x+1)},$$

således för $x = \infty$, om WALLIS formel användes,

$$\frac{e^{2H}}{4} = \frac{\pi}{2},$$

af följer

$$H = \log\sqrt{2\pi}.$$

formlerna (16), (5), (21) erhålles

$$\lim \frac{1.2.3\ldots.(x-1)\,x}{x^x\, e^{-x}\sqrt{x}} = \sqrt{2\pi},$$

$$\sum_{k=1}^{k=\infty}\left\{\left(k+\frac{1}{2}\right)\log\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right\} = 1 - \log\sqrt{2\pi}.$$

§ 2.

De Bernoulliska talen.

Om man med

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ldots.$$

knar de Bernoulliska talen, så är

$$\cot x = \frac{1}{x} - \frac{2^2 B_1}{1.2}\,x - \frac{2^4 B_2}{1.2.3.4}\,x^3 - \ldots.$$

$$B_r = \frac{2.1.2.3\ldots.2r}{(2\pi)^{2r}}\,S_{2r},$$

(26) $$S_{2r} = \frac{1}{1^{2r}} + \frac{1}{2^{2r}} + \frac{1}{3^{2r}} + \ldots .$$

Vi låta nu n betyda ett bestämdt helt positivt tal ell
samt beteckna med h något af talen

$$n + 2,\ n + 3,\ n + 4, \ldots ;$$

vidare beteckna vi med

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \ldots u_n,\ u_{n+1}$$

termerna i serien

$2h,\ 2^2 B_1 (2h + 1)_2,\ 2^4 B_2 (2h + 1)_4, \ldots . 2^{2n+2} B_{n+1} (2h +$
samt finna då

(27) $$\frac{u_0}{u_1} = \frac{\pi^2}{2S_2 (2h + 1)},$$

och, om r är lika med något af talen

$$1,\ 2,\ 3, \ldots . n - 1,\ n,$$

(28) $$\frac{u_r}{u_{r+1}} = \frac{S_{2r}}{2S_{2r+2}} \cdot \frac{2\pi^2}{(2h - 2r)(2h - 2r + 1)}.$$

Emedan tydligen

$$S_2 > 1,\ \frac{S_{2r}}{2S_{2r+2}} < 1,\ \pi^2 < 10,$$

så erhålles af formlerna (27) och (28)

(29) $$\frac{u_0}{u_1} < \frac{5}{2h + 1},$$

(30) $$\frac{u_r}{u_{r+1}} < \frac{4}{2h - 2r} \cdot \frac{5}{2h - 2r + 1}.$$

Emedan

$$h \geqq n + 2,\ r \leqq n,$$

så erhålles af olikheterna (29) och (30)

(31) $$\frac{u_0}{u_1} < \frac{5}{2n + 5} < 1,$$

(32) $$\frac{u_r}{u_{r+1}} < 1,$$

hvaraf följer

(33) $$u_0 < u_1 < u_2 < \ldots . < u_n < u_{n+1},$$

och således

(34) $u_0 - u_1 + u_2 - u_3 + \ldots + (-1)^n u_n - \theta (-1)^n u_{n+1}$
der $0 < \theta < 1$. Härmed är således följande sats bevisa:

)m man med h betecknar något af talen

$$n + 2,\ n + 3,\ n + 4,\ \ldots\ldots,$$

$$2h - 2^2B_1(2h + 1)_2 + 2^4B_2(2h + 1)_4 - \ldots$$
$$1)^n\, 2^{2n}B_n(2h + 1)_{2n} - (-1)^n 2^{2n+2}B_{n+1}\,\theta\,(2h + 1)_{2n+2} = 0,$$
$$< \theta < 1.$$

ıan sätter eqv. (24) under formen

$$\cos x = \left(\frac{1}{x} - \frac{2^2B_1}{1.2}\,x - \frac{2^4B_2}{1.2.3.4}\,x^3 - \ldots.\right) = \sin x,$$

utvecklar $\sin x$ och $\cos x$ i serier, samt utför multiplika-
i högra membrum, samt vidare sätter koefficienterna för

$$x^2,\ x^4,\ x^6,\ \ldots.\ x^{2n+2}$$

ıed hvarandra, så erhållas formlerna:

$$2.1 - 2^2B_1(3)_2 = 0$$
$$2.2 - 2^2B_1(5)_2 + 2^4B_2(5)_4 = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$2n - 2^2B_1(2n + 1)_2 + \ldots\ldots + (-1)^n 2^{2n}B_n(2n + 1)_{2n} = 0,$$
$$^2(n + 1) - 2^2B_1(2n + 3)_2 + \ldots$$
$$\ldots\ldots + (-1)^n 2^{2n+2}B_{n+1}(2n + 3)_{2n+2} = 0$$

ɪrna (37) visa, att likheten (35) gäller äfven för

$$h = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.\ n - 1,\ n,$$

r

$$h = n + 1,$$

ın i detta fall låter θ betyda 1. Härmed är följande sats
id:

m n och h äro två hela tal, som satisfiera vilkoren

$$n \geqq 0,\ h \geqq 1,$$

ä

$$)\,2h - 2^2B_1(2h + 1)_2 + \ldots + (-1)^n 2^{2n}B_n(2h+1)_{2n}$$
$$- (-1)^n 2^{2n+2}\,\theta\,B_{n+1}(2h + 1)_{2n+2} = 0,$$
$$< \theta \leqq 1.$$

f formlerna (37) följer denna sats:

och h äro två hela positiva tal, och

$$s \geqq h,$$

så är

$$(39)\quad 2h - 2^2 B_1 (2h+1)_2 + \ldots\ldots - (-1)^s 2^{2s-2} B_{s-1} (2h+) + (-1)^s 2^{2s} B_s (2h+1)$$

§ 3.

Om summan $\sum_{k=1}^{k=x} k^m$, der m är ett helt positivt

Om x är ett helt positivt tal, och vi sätta

$$(40)\quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=x} \left\{ \frac{(k-1)^m}{2} + \frac{k^m}{2} - \frac{k^{m+1} - (k-1)^{m+1}}{m+1} \right\},$$

samt utföra summationen i högra membrum af eqv. (40), så hålles

$$(41)\quad 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{2} + \varphi(x).$$

Medelst substitutionen

$$(42)\qquad k = \frac{1}{2} + \frac{1}{2z}$$

erhålles af eqv. (40).

$$(43)\quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=x} \frac{1}{(2z)^{m+1}} \left\{ z(1-z)^m + z(1+z)^m - \frac{(1+z)^{m+1} - (1-z)^{m+1}}{m+1} \right.$$

Om m är ett jämt tal, sätta vi

$$(44)\qquad m = 2s,$$

samt, om m är udda,

$$(45)\qquad m = 2s+1,$$

samt finna i båda fallen, om binomialformeln användes på eq

$$(46)\quad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=x} \frac{1}{(2z)^{m+1}} \sum_{h=1}^{h=s} (m)_{2h} \frac{4hz^{2h+1}}{2h+1}.$$

Om eqv. (39) förlänges med

$$\frac{2}{2h+1},$$

så erhålles

$$\frac{4h}{2h+1} = \frac{2^2 B_1}{1}\,(2h)_1 - \frac{2^4 B_2}{2}\,(2h)_3 + \ldots.$$

$$+ (-1)^s \frac{2^{2s-2} B_{s-1}}{S-1}\,(2h)_{2s-3} - (-1)_s \frac{2^{2s} B_s}{s}\,(2h)_{2s-1}.$$

; detta värde på qvantiteten

$$\frac{4h}{2h+1}$$

(46), så erhålles

$$\varphi(x) = \frac{B_1}{2} T_1 - \frac{B_2}{4} T_2 + \ldots. + (-1)^s \frac{B_{s-1}}{2(s-1)} T_{s-1} -$$

$$-(-1)^s \frac{B_s}{2s} T_s,$$

$$T_r = 2^{2r+1} \sum_{k=1}^{k=x} \frac{1}{(2z)^{m+1}} \sum_{h=1}^{h=s} (m)_{2h} (2h)_{2r-1} z^{2h+1}.$$

ör $h = 1, 2, 3, \ldots r-2, r-1$ är

$$(2h)_{2r-1} = 0,$$

ltså erhålles af eqv. (49)

$$T_r = \sum_{k=1}^{k=x} \frac{1}{(2z)^{m-2r+1}} \sum_{h=r}^{h=s} 2\,(m)_{2h}\,(2h)_{2r-1}\, z^{2h+1-2r}.$$

n tydligen för $h \geq r$

$$(m)_{2h} \cdot (2h)_{2r-1} = (m)_{2r-1} \cdot (m-2r+1)_{2h-2r+1},$$

ålles af eqv. (50)

$$T_r = (m)_{2r-1} \sum_{k=1}^{k=x} \frac{1}{(2z)^{m-2r+1}} \sum_{h=r}^{h=s} 2\,(m-2r+$$

$$+ 1)_{2h-2r+1}\, z^{2h-2r+1},$$

ligt binomialformeln

$$=(m)_{2r-1} \sum_{k=1}^{k=x} \frac{1}{(2z)^{m-2r+1}} \left\{(1+z)^{m-2r+1} - (1-z)^{m-2r+1}\right\}$$

$$= (m)_{2r-1} \sum_{k=1}^{k=x} \left\{\left(\frac{1}{2z} + \frac{1}{2}\right)^{m-2r+1} - \left(\frac{1}{2z} - \frac{1}{2}\right)^{m-2r+1}\right\}$$

igt eqv. (42)

$$(54) \qquad T_r = (m)_{2r-1} \sum_{k=1}^{k=x} \{k^{m-2r+1} - (k-1)^{m-2r+1}\},$$

eller

$$(55) \qquad T_r = (m)_{2r-1}\, x^{m-2r+1}.$$

Af eqv. (41), (48), (55) erhålles nu

$$(56) \quad 1^m + 2^m + 3^m + \ldots + x^m = \frac{x^{m+1}}{m+1} + \frac{x^m}{2} + \frac{B_1}{2}(m)_1\, x^{m-1}$$
$$- \frac{B_2}{4}(m)_3\, x^{m-3} + \frac{B_3}{6}(m)_5\, x^{m-5} -$$
$$\ldots - (-1)^s \frac{B_s}{2s}(m)_{2s-1}\, x^{m-2s+1}.$$

Vi särskilja två fall, alltefter som m är jämt eller udda.

$$m = 2n,$$

der n betyder ett helt positivt tal, så är enligt eqv. (44)

$$s = n,$$

och af eqv. (56) erhålles

$$(57) \quad 1^{2n} + 2^{2n} \ldots + x^{2n} = \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \frac{x^{2n}}{2} + \frac{B_1}{2}(2n)_1\, x^{2n-1}$$
$$- \frac{B_2}{4}(2n)_3\, x^{2n-3} + \ldots + (-1)^n \frac{B_{n-1}}{2(n-1)}(2n)_{2n-3}\, x^3 -$$
$$- (-1)^n \frac{B_n}{2n}(2n)_{2n-1}\, x.$$

Är åter

$$m = 2n + 1,$$

så är enligt eqv. (45)

$$s = n,$$

och vi erhålla af eqv. (56) i detta fall

$$(58) \quad 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + \ldots + x^{2n+1} = \frac{x^{2n+2}}{2n+2} + \frac{x^{2n+1}}{2} +$$
$$+ \frac{B_1}{2}(2n+1)_1\, x^{2n} - \frac{B_2}{4}(2n+1)_3\, x^{2n-2} + \ldots.$$
$$+ (-1)^n \frac{B_{n-1}}{2(n-1)}(2n+1)_{2n-3}\, x^4 - (-1)^n \frac{B_n}{2n}(2n+1)$$

För $n = 1, 2, 3$ erhållas af eqv. (57) och (58) fj
formler:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + x^2 = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + x^3 = \frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{4},$$

$$1^4 + 2^4 + \ldots + x^4 = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x}{30},$$

$$1^5 + 2^5 + \ldots + x^5 = \frac{x^6}{6} + \frac{x^5}{2} + \frac{5x^4}{12} - \frac{x^2}{12},$$

$$1^6 + 2^6 + \ldots + x^6 = \frac{x^7}{7} + \frac{x^6}{2} + \frac{x^5}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x}{42},$$

$$1^7 + 2^7 + \ldots + x^7 = \frac{x^8}{8} + \frac{x^7}{2} + \frac{7x^6}{12} - \frac{7x^4}{24} + \frac{x^2}{12}.$$

§ 4.

Om summan $\sum_{k=1}^{k=x} k^\mu$.

$$(-\infty < \mu \leq +1)$$

m vi sätta

$$\varphi(x) = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{(x+k-1)^\mu}{2} + \frac{(x+k)^\mu}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(x+k)^{\mu+1} - (x+k-1)^{\mu+1}}{\mu+1} \right\},$$

$$\varphi(x-1) = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{(x+k-2)^\mu}{2} + \frac{(x+k-1)^\mu}{2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(x+k-1)^{\mu+1} - (x+k-2)^{\mu+1}}{\mu+1} \right\},$$

$$\varphi(x-1) = -\frac{(x-1)^\mu}{2} - \frac{x^\mu}{2} + \frac{x^{\mu+1} - (x-1)^{\mu+1}}{\mu+1} -$$
$$- \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{(x+k-2)^\mu}{2} + \frac{(x+k-1)^\mu}{2} - \frac{(x+k-1)^{\mu+1} - (x+k-2)^{\mu+1}}{\mu+1} \right\},$$

om vi i summan i högra membrum af eqv. (61) införa i i stället för k,

$$\varphi(x-1) = -\frac{(x-1)^\mu}{2} - \frac{x^\mu}{2} + \frac{x^{\mu+1} - (x-1)^{\mu+1}}{\mu+1} -$$
$$- \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{(x+k-1)^\mu}{2} + \frac{(x+k)^\mu}{2} - \frac{(x+k)^{\mu+1} - (x+k-1)^{\mu+1}}{\mu+1} \right\}.$$

Af eqv. (59) och (62) erhålles

(63) $$\varphi(x) - \varphi(x-1) = x^\mu - \frac{1}{2}\left\{x^\mu - (x-1)^\mu\right\} - \frac{x^{\mu+1} - (x-1)^{\mu+1}}{\mu+1}.$$

Om x är ett helt positivt tal, så erhålles af eqv. (63)

(64) $$\left\{\begin{aligned} &\varphi(x-1) - \varphi(x-2) = (x-1)^\mu - \frac{1}{2}\left\{(x-1)^\mu - (x-2)^\mu\right\} - \frac{(x-1)^{\mu+1} - (x-2)^{\mu+1}}{\mu+1}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ &\varphi(3) - \varphi(2) = 3^\mu - \frac{1}{2}\left\{3^\mu - 2^\mu\right\} - \frac{3^{\mu+1} - 2^{\mu+1}}{\mu+1}, \\ &\varphi(2) - \varphi(1) = 2^\mu - \frac{1}{2}\left\{2^\mu - 1^\mu\right\} - \frac{2^{\mu+1} - 1^{\mu+1}}{\mu+1}. \end{aligned}\right.$$

Enligt eqv. (3) och (59) är

(65) $$\varphi(1) = \frac{1}{2} - K_\mu.$$

Genom addition af eqv. (63), (64), (65) erhålles

(66) $$1^\mu + 2^\mu + \dots + (x-1)^\mu + x^\mu = \frac{x^{\mu+1} - 1}{\mu+1} + \frac{x^\mu}{2} + K_\mu + \varphi(x).$$

Sätta vi i eqv. (59)

(67) $$\frac{1}{2x + 2k - 1} = z,$$

så erhålles

(68) $$\varphi(x) = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2z)^{\mu+1}}\left\{z(1-z)^\mu + z(1+z)^\mu - \frac{(1+z)^{\mu+1} - (1-z)^{\mu+1}}{\mu+1}\right\},$$

eller, om binomialformeln användes,

(69) $$\varphi(x) = -\sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2z)^{\mu+1}} \sum_{h=1}^{h=\infty} (\mu)_{2h} \frac{4h\, z^{2h+1}}{2h+1}.$$

Om vi nu med n beteckna ett helt positivt tal, hvilket som helst, eller noll, så är enligt eqv. (38)

(70) $$\frac{4h}{2h+1} = \frac{2^2 B_1}{1}(2h)_1 - \frac{2^4 B_2}{2}(2h)_3 + \dots - (-1)^n \frac{2^{2n} B_n}{n}(2h)_{2n-1} + (-1)^n \frac{2^{2n+2}\theta B_{n+1}}{n+1}(2h)_{2n+1}$$

$< \theta < 1$.' Införes detta värde på

$$\frac{4h}{2h+1}$$

(69), så erhålles

$$\varphi(x) = \frac{B_1}{2} T_1 - \frac{B_2}{4} T_2 + \ldots\ldots - (-1)^n \frac{B_n}{2n} T_n +$$

$$+ (-1)^n \theta_1 \frac{B_{n+1}}{2(n+1)} T_{n+1},$$

, som är ett medelvärde af qvantiteterna θ, ligger mellan 1, samt

$$T_r = -2^{2r+1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2z)^{\mu+1}} \sum_{h=r}^{h=\infty} (\mu)_{2h} (2h)_{2r-1} z^{2h+1}.$$

an för $h \geq r$

$$(\mu)_{2h} \cdot (2h)_{2r-1} = (\mu)_{2r-1} \cdot (\mu - 2r + 1)_{2h-2r+1},$$

nålles af eqv. (72)

$$T_r = -$$

$$)_{2r-1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2z)^{\mu-2r+1}} \sum_{h=r}^{h=\infty} 2(\mu - 2r + 1)_{2h-2r+1} z^{2h-2r+1},$$

nligt binomialformeln

$$)T_r = -(\mu)_{2r-1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{1}{(2z)^{\mu-2r+1}} \{(1+z)^{\mu-2r+1} - (1-z)^{\mu-2r+1}\},$$

ledes, om eqv. (67) användes,

$$)T_r = (\mu)_{2r-1} \sum_{k=1}^{k=\infty} \{(x+k-1)^{\mu-2r+1} - (x+k)^{\mu-2r+1}\},$$

r

$$T_r = (\mu)_{2r-1} x^{\mu-2r+1}.$$

v. (66), (71), (77) erhålles

$$1^\mu + 2^\mu + \ldots + x^\mu = \frac{x^{\mu+1}-1}{\mu+1} + \frac{x^\mu}{2} + K_\mu + \frac{B_1 (\mu)_1}{2x^{1-\mu}} -$$

$$\frac{(\mu)_3}{3-\mu} + \ldots\ldots - (-1)^n \frac{B_n (\mu)_{2n-1}}{2n\, x^{2n-1-\mu}} + (-1)^n \theta \frac{B_{n+1} (\mu)_{2n+1}}{2(n+1) x^{2n+1-\mu}},$$

$< \theta < 1$, samt enligt eqv. (3)

$$(79) \qquad K_\mu = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{k^\mu}{2} + \frac{(k+1)^\mu}{2} - \frac{(k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}}{\mu+1} \right\}.$$

För $\mu = -1$ erhålles af eqv. (78) och (79)

$$(80) \qquad \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{x} = \log x + K_{-1} + \frac{1}{2x} - \frac{B_1}{2x^2} + \frac{B_2}{4x^4} - \ldots + (-1)^n \frac{B_n}{2nx^{2n}} - (-1)^n \frac{\theta B_{n+}}{2(n+1)x}$$

der $0 < \theta < 1$, samt

$$(81) \qquad K_{-1} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{1}{2k} + \frac{1}{2(k+1)} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right\}.$$

Om μ är negativ, kan det af eqv. (79) gifna uttrycket f förenklas. Genom att till denna likhet addera identiteten

$$(82) \qquad 0 = -\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{k^\mu}{2} - \frac{(k+1)^\mu}{2} \right\},$$

finna vi

$$(83) \qquad K_\mu = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ k^\mu - \frac{(k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}}{\mu+1} \right\},$$

hvaraf erhålles

$$(84) \qquad K_{-1} = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{1}{k} - \log\left(1 + \frac{1}{k}\right) \right\}.$$

Om $\mu < -1$, erhålla vi ett ännu enklare uttryck för K, nom att till eqv. (83) addera identiteten

$$(85) \qquad 0 = \frac{1}{\mu+1} + \sum_{k=1}^{k=\infty} \frac{(k+1)^{\mu+1} - k^{\mu+1}}{\mu+1}$$

erhålla vi

$$(86) \qquad K_\mu = \frac{1}{\mu+1} + \sum_{k=1}^{k=\infty} k^\mu.$$

För det speciela fallet

$$\mu = -2s,$$

s är ett helt positivt tal, erhålles enligt eqv. (25), (26).

$$K_{-2s} = -\frac{1}{2s-1} + \frac{B_s (2\pi)^{2s}}{2.1.2.3 \ldots 2s}.$$

§ 5.

Om summan $\sum_{k=1}^{k=x} \log k$.

Om vi sätta

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \left(x + k - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x+k-1}\right) - 1 \right\},$$

r

$$\varphi(x-1) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \left(x + k - \frac{3}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x+k-2}\right) - 1 \right\},$$

$$\varphi(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) - 1 + \sum_{k=2}^{k=\infty} \left\{ \left(x + k - \frac{3}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x+k-2}\right) - 1 \right\},$$

e om vi införa $k+1$ i stället för k,

$$\varphi(x-1) = \left(x - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x-1}\right) - 1 + \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \left(x + k - \frac{1}{2}\right) \log \left(1 + \frac{1}{x+k-1}\right) - 1 \right\}.$$

[vationerna (88) och (91) erhålles

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) = \log x - \left\{ x \log x - x + \frac{1}{2} \log x \right\} + \left\{ (x-1) \log (x-1) - (x-1) + \frac{1}{2} \log (x-1) \right\}.$$

li eqv. (23) och (88) är

$$\varphi(1) = 1 - \log \sqrt{2\pi}.$$

n s är ett helt positivt tal, så erhålles af eqvationerna (92) n 93) medelst samma metod, som användts i den före- ere paragrafen,

$$(94) \qquad \log(1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots x) = x \log x - x + \frac{1}{2}\log x + \\ + \log\sqrt{2\pi} + \varphi$$

Genom substitutionen

$$(95) \qquad \frac{1}{2x + 2k - 1} = z$$

erhålles af eqv. (88)

$$(96) \qquad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ \frac{1}{2z} \log \frac{1+z}{1-z} - 1 \right\},$$

och genom serieutveckling

$$(97) \qquad \varphi(x) = \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{z^{2h}}{2h+1}.$$

Af eqv. (38) erhålles, efter förlängning med

$$\frac{1}{2h(2h+1)},$$

$$(98) \qquad \frac{1}{2h+1} = \frac{2^2 B_1}{1 \cdot 2} - \frac{2^4 B_2}{3 \cdot 4}(2h-1)_2 + \ldots$$

$$-(-1)^n \frac{2^{2n} B_n}{(2n-1)\,2n}(2h-1)_{2n-2} + (-1)^n \frac{2^{2n+2} B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)} \theta (2h-$$

Införes detta värde på

$$\frac{1}{2h+1}$$

i eqv. (97), så finna vi

$$(99) \qquad \varphi(x) = \frac{B_1}{1 \cdot 2} T_1 - \frac{B_2}{3 \cdot 4} T_2 + \ldots\ldots - (-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)2n}$$

$$+ (-1)^n \theta_1 \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2}T$$

der $0 < \theta_1 < 1$, samt

$$(100) \qquad T_r = 2^{2r} \sum_{k=1}^{k=\infty} \sum_{h=r}^{h=\infty} (2h-1)_{2r-2}\, z^{2h}.$$

Emedan för $h \geqq r$

$$(101) \qquad (2h-1)_{2r-2} = -(-2r+1)_{2h-2r+1},$$

så erhålles af eqv. (100)

$$(102) \qquad T_r = -2^{2r-1} \sum_{k=1}^{k=\infty} z^{2r-1} \sum_{h=r}^{h=\infty} 2(-2r+1)_{2h-2r+1}{}^{h-}$$

om binomialformeln användes,

$$T_r = 2^{2r-1} \sum_{k=1}^{k=\infty} z^{2r-1} \left\{ (1-z)^{-2r+1} - (1+z)^{-2r+1} \right\}$$

nligt eqv. (95)

$$T_r = \sum_{k=1}^{k=\infty} \left\{ (x+k-1)^{-2r+1} - (x+k)^{-2r+1} \right\}$$

$$T_r = \frac{1}{x^{2r-1}}.$$

rmlerna (94), (99), (105) erhålles slutligen

$$\log(1.2.3\ldots x) = x\log x - x + \frac{1}{2}\log x + \log\sqrt{2\pi}$$
$$+ \frac{B_1}{1.2x} - \frac{B_2}{3.4x^3} + \ldots\ldots - (-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)\,2nx^{2n-1}}$$
$$+ (-1)^n \frac{\theta B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)x^{2n+1}},$$

$< \theta < 1.$

Skänker till Vetenskaps-Akademiens Bibliothek.

(Forts. fr. sid. 3)

Från Académie Imp. des Sciences i St. Petersburg.

Bulletin, T. 26: 1—3.

Från Société Vaudoise des Sciences Naturelles i Lausann

Bulletin, N:o 83.

Från Société des Sciences Naturelles i Neuchatel.

Bulletin, T. 12: 1.

Från K. Akademie der Wissenschaften i Berlin.

Abhandlungen, 1879.
Monatsbericht 1879: 7—11.

Från Entomologischer Verein i Berlin.

Deutsche Entomologische Zeitschrift, Jahrg. 24: 2.

Från Deutsche Geologische Gesellschaft i Berlin.

Zeitschrift, Bd. 32: 1—2.

Från Hr Öfverdirektören m. m. F. Th. Berg.

Andersson, R., Lightning conductors. Lond. 1879. 8:o.

Från Docenten Dr C. Bovallius.

Savigny, J. C., Crustacés de l'Égypte. 13 pl. Fol.

Från Hr Dr W. Leche.

Naturvetenskapliga småskrifter. 17 st.

Från Hr Dr Hj. Theel.

Köppen, F. Th., Die schädlichen Insekten Russlands. St. Pe
1880. 8:o.

Från Hr J. Hall i Albany.

Natural history of NewYork. Palæontology, Vol. 5: P. 2. T
& Atlas. New York 1879. 4:o.
Report on the New York state cabinet of natural history, N:o

Från Författarne:

Enestrom. G. Lettres inédites de J. L. Lagrange. Rome 188(
Lindeberg, C. J. Hallands och Bohusläns Fanerogamer ocl
bunkar. Göteb. 1878. 8:o.

Öfversigt af Kongl. Vetenskaps-Akademiens Förhandlingar 1887. N:o 3.
Stockholm.

en talteoretisk formels användning till transformation af en definit dubbelintegral.

Af Alexander Berger.

[Meddeladt den 9 Mars 1887 genom D. G. Lindhagen.]

Om n är ett helt tal, hvilket som hälst, och om vi med
beteckna antalet af alla hela reela lösningar till den inde-
nerade eqvationen

$$x^2 + y^2 = n$$

två obekanta x och y, så är tydligen

$$\psi(n) = 0,$$

är ett negativt tal; för $n = 0$ är

$$\psi(0) = 1,$$

v. (1) har då blott lösningen

$$x = 0,\ y = 0.$$

m vi med s beteckna ett positivt udda tal, så

$$\psi(s) = 4\sum_{d}(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

vid summationen genomlöper talets s alla positiva di-
r.

ör att evaluera $\psi(n)$, då n är ett positivt tal, hvilket
lst, sätta vi n under formen

$$n = 2^r s,$$

r ch s äro hela tal, som uppfylla vilkoren

e Vorlesungen über Zahlentheorie von P. G. Lejeune-Dirichlet. Dritte
Ausge, pag. 228.

(6) $$r \geqq 0,\ s \geqq 1,\ s \equiv 1,\ \text{mod. } 2,$$

och eqv. (1) kan då skrifvas

(7) $$x^2 + y^2 + 2^r s.$$

Om $r = 0$, så följer omedelbart af eqv. (5)

(8) $$\psi(n) = \psi(s),$$

och vi skola visa, att denna formel gäller äfven för $r \geqq 1$. nämligen i detta fall x, y en lösning till eqv. (7), så m antingen både x och y vara jämna eller också både x o vara udda. Om vi derföre sätta

(9) $$\frac{x+y}{2} = x_1,\ \frac{x-y}{2} = y_1,$$

så äro x_1 och y_1 hela tal, och man finner lätt, att dess satisfiera eqvationen

(10) $$x_1^2 + y_1^2 = 2^{r-1} s.$$

Om vi lösa eqv. (9) i afseende på x och y, så finna

(11) $$x = x_1 + y_1,\ y = x_1 - y_1.$$

Häraf följer, att vi erhålla alla hela lösningar x, y til (7) af eqv. (11), om vi der införa alla system af hela v på x_1, y_1, som satisfiera eqv. (10); på detta sätt erhålla i heller några andra värden på x, y än hela tal, som sat eqv. (7). Vi erhålla vidare på detta sätt hvarje lösning en gång; detta följer deraf, att enligt eqv. (9) talen x_1 äro entydigt bestämda af x och y.

Härmed är formeln

(12) $$\psi(2^r s) = \psi(2^{r-1} s)$$

bevisad, och genom upprepadt användande af denna form hålla vi

(13) $$\psi(2^r s) = \psi(s),$$

och således enligt eqv. (5)

(14) $$\psi(n) = \psi(s),$$

hvilken formel således gäller för hvarje helt positivt v n. Af eqv. (4) och (14) erhålla vi nu

$$\psi(n) = 4\sum_{d}(-1)^{\frac{d-1}{2}},$$

d vid summationen genomlöper talets s alla positiva divi-
r. Emedan enligt eqv. (5) talets s samtliga divisorer samman-
t med talets n udda divisorer, och emedan vidare för hvarje
a värde på d

$$(-1)^{\frac{d-1}{2}} = \sin\frac{d\pi}{2},$$

rhålles af eqv. (15)

$$\psi(n) = 4\sum_{d}\sin\frac{d\pi}{2},$$

d genomlöper talets n alla udda positiva divisorer.

Emedan vidare

$$\sin\frac{d\pi}{2} = 0,$$

n d är ett jämt tal, så kunna vi vid summationen i högra
ebrum af eqv. (17) låta d genomlöpa alla positiva divisorer
n, både jämna och udda, och vi erhålla alltså följande
om:

Teorem. Om n är ett helt positivt tal hvilket som hälst,
hom vi med $\psi(n)$ beteckna antalet af den indeterminerade
vationens

$$x^2 + y^2 = n$$

a ela lösningar, så är

$$\psi(n) = 4\sum_{d}\sin\frac{d\pi}{2},$$

r vid summationen genomlöper talets n alla positiva divisorer.

Vi antaga nu, att $f(x)$ är en funktion så beskaffad, att
bl integralen

$$I = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + y^2)\,dx\,dy$$

ä llig, och vi skola med användning af det föregående teo-

remet transformera denna integral till en enkel integral. (
vi med ε_1 och ε_2 beteckna två mot noll konvergerande posit
qvantiteter, så följer af definitionen på en dubbelintegral

$$I = \lim \varepsilon_1 \varepsilon_2 \sum_{h_1,\, h_2} f\left(h_1^2 \varepsilon_1^2 + h_2^2 \varepsilon_2^2\right), \tag{20}$$

der vid summationen i högra membrum h_1 och h_2 antaga
hela talvärden, och dessa värden kombineras med hvarandra
alla sätt. Emedan det är likgiltigt, på hvilket sätt qvant
terna ε_1 och ε_2 gå mot noll, så kunna vi sätta

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \sqrt{\varepsilon},$$

der ε är en positiv mot noll konvergerande qvantitet, och vi
hålla då af eqv. (20)

$$I = \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \sum_{h_1,\, h_2} f\left(\varepsilon\left(h_1^2 + h_2^2\right)\right). \tag{21}$$

Emedan vid summationen i högra membrum vi af uttry

$$h_1^2 + h_2^2 \tag{22}$$

ej erhålla andra värden än noll och hela positiva tal, så kn
vi sätta eqv. (21) under formen

$$I = \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \sum_{n=0}^{n=\infty} \lambda_n f(\varepsilon n), \tag{23}$$

der koefficienten λ_n tydligen är lika med antalet af alla de i
på hvilka n kan sättas under formen (22); vi erhålla allt

$$\lambda_n = \psi(n), \tag{24}$$

och af eqv. (23) och (24) följer

$$I = \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \sum_{n=1}^{n=\infty} \psi(n) f(\varepsilon n) \tag{25}$$

och alltså enligt det föregående teoremet

$$I = 4 \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \sum_{n=1}^{n=\infty} f(\varepsilon n) \sum_{d} \sin \frac{d\pi}{2}. \tag{26}$$

Om vi med $E(x)$, der x är en reel qvantitet, förstå det a tal, som är lika med eller närmast lägre än x, så att

$$0 \leqq x - E(x) < 1,$$

är tydligen differensen

$$E\left(\frac{n}{h}\right) - E\left(\frac{n-1}{h}\right),$$

n och h äro hela positiva tal, lika med 1 eller 0, alltefter- h är en divisor till n eller ej, och alltså erhålla vi af eqv. (26)

$$I = 4 \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \sum_{n=1}^{n=\infty} f(\varepsilon n) \sum_{h=1}^{h=\infty} \left\{ E\left(\frac{n}{h}\right) - E\left(\frac{n-1}{h}\right) \right\} \sin \frac{h\pi}{2},$$

raf följer efter ombyte af summationsordningen

$$I = 4 \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \sum_{h=1}^{h=\infty} \sin \frac{h\pi}{2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \left\{ E\left(\frac{n}{h}\right) - E\left(\frac{n-1}{h}\right) \right\} f(\varepsilon n).$$

Emedan differensen (28) är lika med 1 eller 0, allteftersom en multipel af h eller ej, så behöfva vi vid den sista sum- onen i högra membrum af eqv. (30) blott låta n genomlöpa positiva multipler af h, och vi erhålla alltså

$$I = 4 \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \sum_{h=1}^{h=\infty} \sin \frac{h\pi}{2} \{ f(\varepsilon h) + f(2\varepsilon h) + f(3\varepsilon h) + \ldots \}.$$

Emedan nu enligt definitionen på en definit integral

$$\lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon \{ f(\varepsilon h) + f(2\varepsilon h) + f(3\varepsilon h) + \ldots \} = \int_0^\infty f(hu)\,du,$$

hålles af eqv. (31)

$$I = 4 \sum_{h=1}^{h=\infty} \sin \frac{h\pi}{2} \int_0^\infty f(hu)\,du.$$

nföra vi i integralen i högra membrum en ny variabel z, d med u medelst relationen

$$z = hu,$$

fi a vi

$$(34) \qquad I = 4 \sum_{h=1}^{h=\infty} \frac{1}{h} \sin \frac{h\pi}{2} \cdot \int_0^\infty f(z)dz$$

och alltså

$$(35) \qquad I = 4\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots\right) \int_0^\infty f(z)dz \,.$$

Med användning af formeln

$$\frac{\pi}{4} = \frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

erhålla vi nu af eqv. (19) och (35)

$$(36) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x^2 + y^2)dxdy = \pi \int_0^\infty f(z)dz \,,$$

hvarmed den ifrågavarande transformationen är verkställd.

ENTWURF

EINER

EUEN INTEGRALRECHNUNG

AUF GRUND DER

OTENZIAL- LOGARITHMAL- UND NUMERALRECHNUNG

VON

Dr. JULIUS BERGBOHM

DIE RATIONALEN ALGEBRAISCHEN UND DIE GONIOMETRISCHEN INTEGRALE

DRUCK VON B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

1892.

Vorrede.

Ich habe in meinen „Neuen Rechnungsmethoden der höheren Mathe-
k“ (1891) eine Anzahl von neuen Rechnungsarten, nämlich die
nzial-, Radikal-, Logarithmal- und Numeralrechnung dargestellt,
he der Analysis des Unendlichen weite, bisher unbekannte Gebiete
liessen. Da die Wahrheit und der Wert des neuen Kalküls, ähnlich
dies auch bei der Erfindung der Differentialrechnung der Fall war,
nfang notwendig Zweifeln begegnen musste, so galt es vor allem,
durch die Anwendung auf ein grosses praktisches Beispiel in den
n der Mathematiker zu bewähren. Ich wählte zu diesem Zweck die
ralrechnung, einesteils, weil mir dieses Gebiet der höheren Mathe-
seit jeher als besonders reformbedürftig erschien und dann auch
lem Grunde, weil es ausgedehnt genug ist, um die Richtigkeit und
Vichtigkeit der von mir erfundenen Rechnungsmethoden für jeden
fangenen auf eine zweifellose Weise zu erproben. Die Grundzüge
uf dem neuen Kalkül beruhenden Integralrechnung wurden von mir
n „Neuen Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarith-
und Numeralrechnung“ (1892) entwickelt.

ch übergebe nunmehr dem mathematischen Publikum den ersten
les „Entwurfs einer neuen Integralrechnung“, welcher die rationalen
raischen und die goniometrischen Integrale, also den grösseren Teil
ehre von den unbestimmten Integralen umfasst. Während sich
„Neuen Integrationsmethoden“ ihrer Bestimmung gemäss vor-
hend mit den prinzipiellen Fragen beschäftigten, werden in der
genden Schrift alle wichtigeren und schwierigeren Probleme eines
lehnten Gebiets der höheren Mathematik mit Hilfe der neuen Rech-
methoden gelöst. Ich hoffe deshalb, dass schon diese Abhandlung
lathematikern die Entscheidung der Frage ermöglichen wird, ob
n mir erfundene Kalkül in den Kanon der mathematischen Erkennt-
ufzunehmen ist. Eine Schrift über die irrationalen, exponentiellen
garithmischen Integrale, für welche alle Vorbereitungen bereits ge-
sind, wird dann den vorläufigen Abschluss meiner Bestrebungen für
weiterung und Verbesserung der höheren Mathematik bilden.

Ich hatte ursprünglich die Absicht, die neuen Integrationsm
in der Darstellung fortlaufend mit der heutigen Integralrechnung
gleichen. Da jedoch kaum eine einzige Entwicklung der neuen I
rechnung mit den bisherigen Ableitungsweisen übereinstimmt, s
eine solche Vergleichung einen ungebührlich grossen Raum in A
genommen und ich konnte darauf um so eher verzichten, als die
matiker ohnedies meine Schrift vom Standpunkt der heutigen Integ
methoden beurteilen werden. Ich will mich deshalb hier dar
schränken, folgende Eigentümlichkeiten des neuen Integrationssyst
allgemeinen hervorzuheben. Alle Integrale werden in der neuen I
rechnung mittelbar oder unmittelbar aus den betreffenden Differe
selbst durch elementare Operationen mit Zuhilfenahme der Pot
Logarithmal- und Numeralrechnung abgeleitet. Diese streng wisse
liche Ableitungsweise macht es dann leicht, die auf den ersten B
so willkürlich erscheinende Struktur der Integrale in ihrer Not
keit zu begreifen und wird wohl im weiteren Lauf der Entwick
einer allgemeinen Theorie der Integrabilität der Differentiale
Die meist so lästige und weitläufige Zerlegung der Differentialfun
in Partialbrüche entfällt vollständig. Endlich tritt an die Ste
vielen Reduktionsformeln eine geringe Anzahl von Integrationsf
die jedoch gleichfalls aus den allgemeinen Differentialen durch ele
Operationen nach gewissen immer wiederkehrenden Methoden ge
werden und die deshalb Jedermann, der sich mit den neuen Rec
arten vertraut gemacht hat, ohne Schwierigkeit selbst ableiten kann.
ich daher den Unterschied zwischen der alten und der neuen I
rechnung in ein Wort zusammenfassen, so möchte ich sagen, d
Integrale nach jener *gefunden*, nach dieser *berechnet* werden.

Indem ich so den neuen Kalkül zunächst auf die Integralr
anwende, soll dessen Wirksamkeit keineswegs auf diese Disziplı
auch nur auf die Mathematik überhaupt eingeschränkt werden.
ich vielmehr bei der Erfindung der neuen Rechnungsmethoden v
bestimmten naturwissenschaftlichen Grundansicht ausgegangen
hoffe ich auch, dass sie später innerhalb der Naturwissenschaft
nehmstes Anwendungsgebiet finden werden.

Wien, im August 1892.

Der Verf

Inhalt.

Seite

de III

Erste Abteilung.

Allgemeine Bemerkungen.

Wesen der neuen Integralrechnung 1
Spezielle Methoden der neuen Integralrechnung: 1) Die Einführung von Konstanten 2
2) Die Einführung von Variabeln und Konstanten 2
3) Die Einführung von Hilfsdifferentialen 3
Die Differentialsumme 5

Zweite Abteilung.

Die rationalen algebraischen Integrale.

Integration von $\frac{dx}{a+bx^2}$ 6
Integration von $\frac{dx}{a+bx^2}$ (Fortsetzung) 8
Integration von $\frac{dx}{a+bx^2}$ (Fortsetzung) 9
Integration von $\frac{dx}{a-bx^2}$ und $\frac{dx}{-a+bx^2}$ 11
. Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx \pm cx^2}$ 12
. Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx \pm cx^2}$ (Fortsetzung) 16
. Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx \pm cx^2}$ (Fortsetzung) 18
. Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx^2 \pm cx^4}$ 22
. Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx^3}$ 26
. Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx^4}$ 28
. ntegration von $\frac{dx}{\omega^p}$ 31
. ntegration von $\frac{dx}{(a \pm bx^n)^p}$ 34

§. 18. Integration von $\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^p}$ . . . . . .

§. 19. Integration von $\frac{x^q\,dx}{\omega^p}$ . . . . . .

§. 20. Integration von $\frac{x^q\,dx}{\omega^p}$ (Fortsetzung) . . . . . .

§. 21. Integration von $\frac{dx}{x^m\omega^p}$ . . . . . .

Dritte Abteilung.

Die goniometrischen Integrale.

§. 22. Integration der einfachsten goniometrischen Differentiale . . . . . .

§. 23. Integration von $\sin^n x\,dx$ und $\cos^n x\,dx$ . . . . . .

§. 24. Integration von $\frac{dx}{\sin^n x}$ und $\frac{dx}{\cos^n x}$ . . . . . .

§. 25. Integration von $\sin^m x\cos^n x\,dx$ . . . . . .

§. 26. Integration von $\frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x}$, $\frac{\cos^m x\,dx}{\sin^n x}$, $\frac{dx}{\sin^m x\cos^n x}$ . . . . . .

§. 27. Integration von $\mathrm{tg}^n x\,dx$ . . . . . .

§. 28. Integration von $x^m\sin x\,dx$ und $x^m\cos x\,dx$ . . . . . .

§. 29. Integration von $\frac{\sin x\,dx}{x^n}$ und $\frac{\cos x\,dx}{x^n}$ . . . . . .

§. 30. Integration von $\frac{x\,dx}{\sin^n x}$ und $\frac{x\,dx}{\cos^n x}$ . . . . . .

Erste Abteilung.

Allgemeine Bemerkungen.

§. 1.

Wesen der neuen Integralrechnung.

Bekanntlich wird jedes Differential aus einer Fundamentalgleichung der Form:

$$f(x + dx) - f(x) = df(x) \qquad 1)$$

nnen. So wie uns nun die Differentialrechnung lehrt, in welcher e aus dem Ausdruck $f(x + dx) - f(x)$ das Differential $df(x)$ ent-lt wird, so besteht das Wesen der neuen Integralrechnung darin, man aus dem gegebenen Differential $df(x)$ den Ausdruck

$$f(x + dx) - f(x)$$

mitteln sucht. Die neue Integrationsmethode ist folglich, dem um-rten Charakter der Integralrechnung entsprechend, nichts als eine rtsschreitende Differentiation (Neue Integrationsmethoden S. 2, 17 ff., . Man kann deshalb die neuen Integrationsmethoden mit gutem le als die natürlichen bezeichnen, im Gegensatz zu der bisherigen ralrechnung, welche in ihren Methoden von der Differentialrechnung ändig abweicht. Denn in der heutigen Integralrechnung ist von genetischen Ableitung der Integrale aus den Differentialen keine vielmehr werden die einfachsten Integrale durch die „Umkehrung" ntsprechenden Differentialformeln gewonnen und auch die ver-lteren Integrale werden zum grossen Teile auf eine ganz unwissen-liche Weise ermittelt, indem man zunächst das gesuchte Integral dieses oder einen verwandten Ausdruck sodann differenziert und sslich aus dem Differential und dem Integral eine sogenannte Re-nsformel bildet. Freilich stehen diese Ableitungsweisen durch eine dfältige Wiederholung so fest, dass die Mathematiker die ihnen zu e liegende fehlerhafte Methode kaum mehr bemerken; aber es ist ffen, dass die alte Integralrechnung jetzt, wo durch die von mir er-nen Rechnungsmethoden die Möglichkeit einer einfachen und streng schaftlichen Ableitung der Integrale geboten ist, allmälig richtigeren den weichen wird.

§. 2.

Specielle Methoden der neuen Integralrechnung.

1) Die Einführung von Konstanten.

Der völlig abweichende Charakter der neuen Integralrechnun notwendig bewirken, dass auch die speziellen Methoden des neu grationssystems sich von der bisher üblichen erheblich unters Ich will von diesen speziellen Methoden wegen ihrer grossen pra Wichtigkeit namentlich drei hervorheben.

Die erste dieser speziellen Methoden ist die Einführung vo stanten in die Fundamentalgleichung (Neue Int.-Meth. S. 22). Das dieser Methode besteht darin, dass man die Fundamentalgleichun Bedarf mit Konstanten auf beiden Seiten multipliziert, dividie potenziert. So wird sich unten im §. 17, Gl. 2 (S. 35) ergeben, d der Fundamentalgleichung:

$$\frac{dx}{(a + bx^n)^p} = dy$$

die Integralgleichung und die Differentialsumme (N. Int.-Meth. nur dann gefunden werden können, wenn man die Gl. 1 mit der Ko $n(p - 1)$ multipliziert, so dass dieselbe folgende Gestalt annimm

$$\frac{n(p-1)\,dx}{(a + bx^n)^p} = n(p-1)\,dy.$$

Ebenso ist in einzelnen Fällen die Division und die Poten der Fundamentalgleichung mit Konstanten zum Zweck der Erm der Integralgleichung und der Differentialsumme erforderlich.

§. 3.

2) Die Einführung von Variabeln und Konstanten.

Die meisten verwickelteren Integrale können nur in der We funden werden, dass man die linke Seite der Fundamentalgleichu variablen Ausdrücken, die rechte dagegen mit Konstanten multi dividiert oder potenziert (Methode der Einführung von Variabl Konstanten). So lässt sich z. B., wie sich unten im §. 21, G (S. 46) ergeben wird, die Fundamentalgleichung:

$$\frac{dx}{x(a + bx)} = dy$$

sehr leicht auf die Differentialsumme zurückführen, indem man $a+$ und $a = \omega - bx$ setzt, und dann die linke Seite der obigen Funda

hung mit $\omega - bx$, die rechte mit a multipliziert, so dass dieselbe nde Gestalt annimmt:

$$\frac{(\omega - bx)\,dx}{x\omega} = \frac{dx}{x} - \frac{b\,dx}{\omega} = a\,dy. \qquad 2)$$

In dem vorstehenden Beispiel wurde die Gleichung zwischen den abeln und Konstanten ($\omega - bx = a$) aus der zu integrierenden Differalfunktion selbst gebildet. Sehr häufig kann aber die Integration einfachsten in der Weise bewirkt werden, dass man die endlichen ndteile des gegebenen Differentials zunächst in Faktoren zerlegt erst aus diesen die Gleichung zwischen den Variabeln und Konstanten t. Ist z. B. (vgl. unten §. 9, Gl. 1—8) die Fundamentalgleichung:

$$\frac{dx}{a - bx^2} = dy \qquad 3)$$

tegrieren und bezeichnet man die Faktoren von $a - bx^2$ mit π und ist:

$$\pi = \sqrt{a} + \sqrt{b}x, \qquad 4)$$

$$\varrho = \sqrt{a} - \sqrt{b}x, \qquad 5)$$

$$\pi + \varrho = 2\sqrt{a}, \qquad 6)$$

$$\pi\varrho = a - bx^2. \qquad 7)$$

Die Methode der Einführung von Variablen und Konstanten wird h in diesem Falle darin bestehen, dass man die Gl. 3 links mit , rechts mit $2\sqrt{a}$ multipliziert, so dass sie folgende Gestalt an:

$$\frac{(\pi + \varrho)\,dx}{\pi\varrho} = \frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho} = 2\sqrt{a}\,dy. \qquad 8)$$

er weitere Verlauf dieser Darstellung wird zeigen, dass der grösste er Differentiale durch diesen einfachen Handgriff leicht integriert n kann.

§. 4.

3) Die Einführung von Hilfsdifferentialen.

ie Methode der Einführung von Hilfsdifferentialen besteht n dass zu dem für sich nicht integrierbaren Differential ein Hilfsrtial, welches erst die Zurückführung der Fundamentalgleichung d Differentialsumme ermöglicht, zugezählt und abgezogen wird oder ehrt. So kann z. B. (s. unten §. 27, Gl. 7 ff.) die Fundamentalgleichung:

$$\mathrm{tg}^2 x\,dx = dy \qquad 1)$$

ier Gestalt auf die Integralgleichung oder die Differentialsumme

nicht zurückgeführt werden, wohl aber dann, wenn ihr folgende gegeben wird:

$$\mathrm{tg}^2 x\, dx + dx - dx = dy.$$

In dieser Gleichung ist, wie sich später (§. 27) ergeben w Differentialsumme von $\mathrm{tg}^2 x\, dx + dx$ und jene von $-dx$ leicht zu

Ein Teil der Methode der Hilfsdifferentiale ist unter dem der teilweisen Integration längst bekannt, doch wird die f Darstellung (vgl. z. B. unten §. 28, Gl. 3) zeigen, dass die Meth Hilfsdifferentiale auch für jene Fälle, in welchen schon bisher weise Integration benutzt wurde, den Gang der Rechnung viel und anschaulicher gestaltet. Aber die Methode der Hilfsdifferentia überdies in ihrer Anwendung weit über das Gebiet der teilweise gration hinaus. Denn diese kann nur dann benutzt werden, w einzelner Bestandteil des Differentials eines Produkts integriert soll, während die Methode der Hilfsdifferentiale überall anwend wo ein unvollständiges Differential durch Hinzufügung eines integrierbar wird und überdies das Hilfsdifferential selbst die Int gestattet, ohne Rücksicht, ob das gegebene Differential aus eine dukt, einem Quotienten oder einer Potenz entstanden ist. Die W keit dieses Unterschiedes wird sich erst dann vollständig zeigen ich in einer späteren Schrift die Integration der irrationalen, expone und logarithmischen Differentiale auf Grund der neuen Rechnungsm darstellen werde. An dieser Stelle kann ich mich damit begnüg den Abschnitt meiner „Neuen Integrationsmethoden“ über die irra Integrale zu verweisen. Dort (Gl. 283—290) kommt ein Fall v ein irrationales Differential durch Hinzufügung eines Hilfsdiffe integrierbar wird, ohne dass die regelmässigen Voraussetzung teilweisen Integration vorhanden sind. Insbesondere soll in Falle nicht, was bei der teilweisen Integration immer notwen das unvollständige Differential eines Produkts der Integration unt werden.

Ich glaube, dass durch die Anwendung der drei soeben (§§ dargestellten Methoden in Verbindung mit der Potenzial-, Logarithm Numeralrechnung zahlreiche Differentiale, welche bisher der Inte Widerstand geleistet haben, integriert werden können, wie den die nachfolgende Darstellung manche bisher unbekannte Integra weisen wird.

§. 5.

Die Differentialsumme.

Wie ich in meinen „Neuen Integrationsmethoden“ (S. 18, 35) gezeigt , genügt zur Integration eines gegebenen Differentials, wenn man ichtigen Methoden anwendet, schon die Auffindung der Differential- ne, ohne dass die Entwicklung der vollständigen Integralgleichung, ie sich namentlich bei verwickelten Integralen viel zu weitläufig ge- et, notwendig ist. Das von mir gewählte Zeichen für die Differential- ne ist Ds, welches, ähnlich wie das analoge Integrationszeichen, vor u integrierende Differential zu setzen ist. Es gilt folglich z. B. die hung

$$Ds\, mx^{m-1}\, dx = (x + dx)^m. \qquad 1)$$

Die Veränderung, welche mit dem Differential durch seine Verwand- in die Differentialsumme vor sich geht, besteht also darin, dass x des Differentials, gleichviel ob es als Summand, Faktor, Divisor Exponent erscheint, in den Ausdruck $x + dx$ verwandelt wird (vgl. t.-Meth. S. 17—18, 24—25). Da jedoch der überaus häufig wieder- nde Ausdruck $x + dx$ die Differentialsummen, namentlich bei ver- lten Integralen, sehr weitläufig und schleppend gestaltet, so wähle att desselben das Symbol $\bar{x}$, so dass also die Gl. 1 folgende Gestalt mt:

$$Ds\, mx^{m-1}\, dx = \bar{x}^m. \qquad 2)$$

benso ist ferner

$$\log \frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = \log \frac{\pi + d\pi}{\varrho + d\varrho} = Ds\, dy. \qquad 3)$$

urch diese Bezeichnungsweise werden die Differentialsummen nicht el kürzer und übersichtlicher gemacht, sondern dieses Symbol hat den Vorteil, dass die Differentialsumme sich sofort in das ent- ende Integral verwandelt, wenn man sich von den Variablen den beseitigt denkt.

Zweite Abteilung.

Die rationalen algebraischen Integrale.

§. 6.

Integration von $\frac{dx}{a + bx^2}$.

Die Integration der einfachsten Differentiale mittelst der Pot
Logarithmal- und Numeralrechnung ist schon in meinen „Neuer
grationsmethoden“ S. 21 ff. dargestellt worden. In der vorliegenden
sind nunmehr die neuen Rechnungsmethoden auch auf die verwick
rationalen algebraischen und auf die goniometrischen Integrale anzuw

I. Die Fundamentalgleichung für die obige Integration ist, wen
$a + bx^2 = \omega$ setzt:

$$\frac{dx}{\omega} = dy.$$

Diese Gleichung kann, wenn man sich mit einem imaginären I
begnügen will, sehr leicht durch die Einführung von Variablen un
stanten (oben §. 3) auf die Differentialsumme zurückgeführt und d
integriert werden. Zerlegt man nämlich $a+bx^2$ in Faktoren und set

$$\pi = \sqrt{a} + \sqrt{-b}\,x,$$
$$\varrho = \sqrt{a} - \sqrt{-b}\,x,$$
$$\pi + \varrho = 2\sqrt{a},$$
$$\pi\varrho = a + bx^2 = \omega,$$

so nimmt die Gl. 1, wenn man (Gl. 4) die linke Seite mit $\pi + \varrho$, die
mit $2\sqrt{a}$ multipliziert, folgende Gestalt an:

$$\frac{(\pi + \varrho)\,dx}{\pi\varrho} = 2\sqrt{a}\,dy$$

oder

$$\frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho} = 2\sqrt{a}\,dy.$$

Von der vorstehenden Gleichung kann aber die Differentialsumm
damit das Integral leicht gefunden werden. Ich habe nämlich in
„Neuen Integrationsmethoden“ S. 39, Gl. 213, S. 52, Gl. 297—29
mittelst der neuen Rechnungsarten folgende Integrale berechnet:

$$Ds\,\frac{dx}{a + bx} = \frac{1}{b}\log(a + b\bar{x}),$$
$$Ds\,\frac{dx}{a - bx} = -\frac{1}{b}\log(a - b\bar{x}).$$

Setzt man nun in der Gleichung 8 und 9 statt a die entsprechende
tante von π und ϱ, nämlich $\sqrt{a}$, statt b den Ausdruck $\sqrt{-b}$, so
t man:

$$\frac{x}{\pi} = Ds \frac{dx}{\sqrt{a} + \sqrt{-b}\,x} = \frac{1}{\sqrt{-b}} \log (\sqrt{a} + \sqrt{-b}\,\bar{x}) = \frac{1}{\sqrt{-b}} \log \bar{\pi}. \quad 10)$$

$$\frac{x}{\varrho} = Ds \frac{dx}{\sqrt{a} - \sqrt{-b}\,x} = -\frac{1}{\sqrt{-b}} \log (\sqrt{a} - \sqrt{-b}\,\bar{x}) = -\frac{1}{\sqrt{-b}} \log \bar{\varrho}. \quad 11)$$

Nimmt man nun von der Gl. 7 die Differentialsumme und substituiert
für $Ds \frac{dx}{\pi}$ und $Ds \frac{dx}{\varrho}$ die Werte aus den Gl. 10 und 11, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{-b}} \log \bar{\pi} - \frac{1}{\sqrt{-b}} \log \bar{\varrho} = Ds\, 2\sqrt{a}\, dy \quad 12)$$

$$\frac{1}{\sqrt{-b}} \log \frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = Ds\, 2\sqrt{a}\, dy. \quad 13)$$

Befreit man endlich dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{a} + \sqrt{-b}\,\bar{x}}{\sqrt{a} - \sqrt{-b}\,\bar{x}} = Ds\, dy = Ds \frac{dx}{a + bx^2} \quad 14)$$

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{a} + \sqrt{-b}\,x}{\sqrt{a} - \sqrt{-b}\,x}. \quad 15)$$

Das gefundene Integral ist imaginär, wenn a und b, wie hier überall
sgesetzt wird, positive Grössen sind.

I. Das in der Überschrift bezeichnete Differential kann unter der
ssetzung, dass a und b positive Grössen sind, noch durch einen
n imaginären Ausdruck integriert werden. Setzt man nämlich

$$\pi = \sqrt{b}\,x + \sqrt{-a}, \quad 16)$$

$$\varrho = \sqrt{b}\,x - \sqrt{-a}, \quad 17)$$

$$\pi - \varrho = 2\sqrt{-a}, \quad 18)$$

$$\pi\varrho = a + bx^2 = \omega, \quad 19)$$

wenn man genau so wie in den Gl. 6 und 7 verfährt:

$$\frac{dx}{\varrho} - \frac{dx}{\pi} = 2\sqrt{-a}\, dy. \quad 20)$$

man nun von dieser Gleichung die Differentialsumme und setzt
n den Gl. 8 und 9 statt a die entsprechende Konstante von π und
nlich $\sqrt{-a}$, statt b den Ausdruck $\sqrt{b}$, so ist

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \log \bar{\varrho} - \frac{1}{\sqrt{b}} \log \bar{\pi} = Ds\, 2\sqrt{-a}\, dy$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \log \frac{\bar{\varrho}}{\bar{\pi}} = Ds\, 2\sqrt{-a}\, dy,$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\bar{\varrho}}{\bar{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{b}\,\bar{x} - \sqrt{-a}}{\sqrt{b}\,\bar{x} + \sqrt{-a}} = Ds\, dy = Ds \frac{dx}{a + bx^2}$$

oder

$$\int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ab}} \log \frac{\sqrt{b}\,x - \sqrt{-a}}{\sqrt{b}\,x + \sqrt{-a}}.$$

§. 7.

Integration von $\frac{dx}{a + bx^2}$ (Fortsetzung).

In dem vorstehenden Paragraphen (§. 6, Gl. 8—11) wurde d
leitung der Differentialsumme von $\frac{dx}{\pi}$ und $\frac{dx}{\varrho}$ benutzt, welche ich in
„Neuen Integrationsmethoden“ (S. 39, 52) gegeben habe. Es verstel
aber von selbst, dass die gesuchten Differentialsummen vermitte
Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung auch unmittelbar a
Differentialen $\frac{dx}{\pi}$ und $\frac{dx}{\varrho}$ ermittelt werden können. So lautet die
im §. 6:

$$\frac{dx}{\sqrt{a} + \sqrt{-b}\,x} + \frac{dx}{\sqrt{a} - \sqrt{-b}\,x} = 2\sqrt{a}\, dy.$$

Multipliziert man diese Gleichung, weil die Nenner der beide
drücke auf der linken Seite das Differential $\sqrt{-b}\, dx$ liefern, mit
und numeralisiert man sodann die Gleichung, so ergiebt sich:

$$1 + \frac{\sqrt{-b}\, dx\, l d\beta}{\sqrt{a} + \sqrt{-b}\,x} + \frac{\sqrt{-b}\, dx\, l d\beta}{\sqrt{a} + \sqrt{-b}\,x} = \overset{d\beta}{\nu}\, 2\sqrt{-ab}\, dy.$$

Nun ist aber, wenn π und ϱ dieselbe Bedeutung behalten,
§. 6, Gl. 2 und 3:

$$1 + \frac{\sqrt{-b}\, dx\, l d\beta}{\pi} + \frac{\sqrt{-b}\, dx\, l d\beta}{\varrho} = \left(1 + \frac{\sqrt{-b}\, dx}{\pi} + \frac{\sqrt{-b}\, dx}{\varrho}\right)^{ld}$$

$$= \left[\frac{1 + \frac{\sqrt{-b}\, dx}{\pi}}{1 - \frac{\sqrt{-b}\, dx}{\varrho}}\right]^{l d\beta} = \left[\frac{\pi + \sqrt{-b}\, dx}{\pi} : \frac{\varrho - \sqrt{-b}\, dx}{\varrho}\right]^{l d\beta} = \left[\frac{\pi + \sqrt{-b}\, dx}{\varrho - \sqrt{-b}\, dx} : \frac{\pi}{\varrho}\right]$$

)ie in der vorstehenden Gleichung enthaltenen Operationen sind in den „Neuen Integrationsmethoden“ Gl. 311 (S. 54) vollständig ; und dort auch näher erläutert.

ubstituiert man nun den letzten Ausdruck der Gl. 3 in die Gl. 2,

$$\left[\frac{\pi + \sqrt{-b}\,dx}{\varrho - \sqrt{-b}\,dx} : \frac{\pi}{\varrho}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, 2\sqrt{-ab}\,dy. \qquad 4)$$

ogarithmalisiert man diese Gleichung, um den ursprünglichen Wert y herzustellen, so ist:

$$\log\frac{\pi + \sqrt{-b}\,dx}{\varrho - \sqrt{-b}\,dx} - \log\frac{\pi}{\varrho} = 2\sqrt{-ab}\,dy, \qquad 5)$$

enn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{\pi + \sqrt{-b}\,dx}{\varrho - \sqrt{-b}\,dx} - \frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{\pi}{\varrho} = dy. \qquad 6)$$

egnügt man sich mit der Differentialsumme, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{-ab}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} = Ds\,dy = Ds\,\frac{dx}{a + bx^2}, \qquad 7)$$

Gleichung mit §. 6, Gl. 14 übereinstimmt. Auf ähnliche Weise uch die Differentialsumme im §. 6, Gl. 23 ohne Schwierigkeit aus ifferential $\frac{dx}{a+bx^2}$ abgeleitet werden.

§. 8.

Integration von $\frac{dx}{a+bx^2}$ (Fortsetzung).

ogleich sich manche imaginäre Differentialsummen auf reelle end- Ausdrücke zurückführen lassen, so ist dies doch nicht bei den im nd 7 entwickelten Integralen möglich. Eine Integration des Diffe- $\frac{dx}{a+bx^2}$ in endlicher reeller Form ist vielmehr nur durch Tan- Kreisbögen zu bewirken, wobei die später (§. 22, Gl. 63) zu ent- nde Gleichung:

$$Ds\,\frac{df(x)}{1 + [f(x)]^2} = \arctan f(\overline{x}) \qquad 1)$$

utzen ist.

Die Fundamentalgleichung ist in diesem Fall:

$$\frac{dx}{a + bx^2} = \frac{\frac{dx}{a}}{1 + \frac{bx^2}{a}} = dy. \qquad 2)$$

ltipliziert man nun die beiden letzten Glieder der vorstehenden

Gleichung, um die Operationen in den Gl. 4—6 zu ermöglichen, mi
so ist

$$\frac{\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{1+\left(\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right)^2} = \sqrt{ab}\,dy.$$

Nun ist aber

$$\frac{dx\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = d\,\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}},$$

folglich, wenn man beiderseits von der Gl. 3 die Differentialsumme

$$Ds\,\frac{d\,\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}}{1+\left[\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}}\right]^2} = Ds\,\sqrt{ab}\,dy,$$

oder mit Rücksicht auf die Gl. 1, wenn man zugleich dy von de
stanten befreit:

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\frac{x\sqrt{b}}{\sqrt{a}} = Ds\,dy = Ds\,\frac{dx}{a+bx^2}.$$

II. Eine zweite Ableitung des Integrals von $\frac{dx}{a+bx^2}$ ist fo
Man setzt an Stelle der Gl. 2 die Relation:

$$\frac{dx}{a+bx^2} = \frac{\frac{dx}{bx^2}}{1+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,x}\right)^2} = dy.$$

Multipliziert man, um die Operationen in den Gl. 9—11 zu ermög
diese Gleichung mit $-\sqrt{ab}$, so ist

$$\frac{-\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,x^2}}{1+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,x}\right)^2} = -\sqrt{ab}\,dy.$$

Nun ist aber (Neue Int.-Meth. Gl. 180, S. 34):

$$-\frac{dx\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,x^2} = d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,x},$$

folglich

$$Ds\,\frac{d\,\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,x}}{1+\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,x}\right)^2} = Ds - \sqrt{ab}\,dy,$$

it Rücksicht auf die Gl. 1, wenn man zugleich dy von den Kon- befreit:

$$-\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,\bar{x}} = Ds\,dy. \qquad 11)$$

e Richtigkeit des vorstehenden Integrals ergiebt sich, wenn man selben aus der willkürlichen Konstante $\frac{1}{\sqrt{a\,b}}\cdot\frac{\pi}{2}$ addiert. Es ist dann

$$\frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,\bar{x}} = \frac{1}{\sqrt{ab}}\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,\bar{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{ab}}\operatorname{arccot}\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}\,\bar{x}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{ab}}\arctan\frac{\sqrt{b}\,\bar{x}}{\sqrt{a}}, \qquad 12)$$

t der Gl. 6 vollkommen übereinstimmt.

. Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass

$$Ds\,\frac{dx}{-a-bx^2} = -\,Ds\,\frac{dx}{a+bx^2} \qquad 13)$$

lass in den letzteren Ausdruck alle im §. 6—8 gefundenen Integrale $\frac{dx}{\cdot\,bx^2}$, die dann veränderte Zeichen erhalten, substituiert werden

§. 9.

Integration von $\frac{dx}{a-bx^2}$ und $\frac{dx}{-a+bx^2}$.

e besondere Entwicklung der vorstehenden Integrale ist deshalb lich, weil ich überall voraussetze (vgl. §. 6), dass die Konstanten u. s. f. positive Grössen sind.

Zur Auffindung des Integrals von $\frac{dx}{a-bx^2}$ setze man:

$$\omega = a - bx^2, \qquad 1)$$

$$\pi = \sqrt{a} + \sqrt{b}\,x, \qquad 2)$$

$$\varrho = \sqrt{a} - \sqrt{b}\,x, \qquad 3)$$

$$\pi + \varrho = 2\sqrt{a}, \qquad 4)$$

$$\pi\varrho = \omega = a - bx^2. \qquad 5)$$

ergiebt sich nun, wenn man genau so verfährt wie in §. 6, Gl. 6—7:

$$\frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho} = 2\sqrt{a}\,dy. \qquad 6)$$

mt man nach Anleitung von §. 6, Gl. 8—12 in vorstehender g beiderseits die Differentialsumme, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{b}} \log \overline{\pi} - \frac{1}{\sqrt{b}} \log \overline{\varrho} = Ds\, 2\sqrt{a}\, dy,$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\overline{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,\overline{x}} = Ds\, dy = Ds \frac{dx}{a - bx^2}.$$

II. Zur Auffindung von $Ds \frac{dx}{-a+bx^2}$ setze man:

$$\omega = -a + bx^2,$$
$$\pi = \sqrt{a} + \sqrt{b}\, x,$$
$$\varrho = -\sqrt{a} + \sqrt{b}\, x,$$
$$\pi - \varrho = 2\sqrt{a},$$
$$\pi\varrho = \omega = -a + bx^2$$

und es ergiebt sich, wenn man die zur Genüge bekannten Metho wendet,

$$\frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\overline{\varrho}}{\overline{\pi}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{-\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\overline{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\overline{x}} = Ds\, dy = Ds \frac{dx}{-a+bx^2}$$

Dieses Resultat kann übrigens auch mittelbar aus dem Inte der Gl. 8 abgeleitet werden, wenn man mit Rücksicht auf die Re

$$d \log (a - bx) = d \log (bx - a)$$

folgende Gleichung bildet:

$$Ds \frac{dx}{-a+bx^2} = -\, Ds \frac{dx}{a-bx^2} = -\frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\overline{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,\overline{x}} =$$
$$= \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}\,\overline{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\overline{x}} = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \log \frac{-\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\overline{x}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}\,\overline{x}}$$

§. 10.

Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx \pm cx^2}$.

Ich setze voraus, dass in dem vorstehenden Integral, ebenso allen früheren und späteren Fällen, die Konstanten a, b, c immer p Grössen sind. Diese Voraussetzung ist unerlässlich, damit später forderlichen Substitutionen der Faktoren-Differentiale mit Sicherhe genommen werden können. Daraus erwächst aber dann auch di wendigkeit, für alle Zeichenkombinationen des Nenners die entsprec Integrale zu ermitteln.

h setze der Kürze wegen die in den nachfolgenden Integrationen vorkommenden Ausdrücke

$$b^2 - 4ac = \delta, \quad 1)$$

$$4ac - b^2 = \Delta = -\delta, \quad 2)$$

$$b^2 + 4ac = \sigma. \quad 3)$$

Zur Auffindung des Integrals von $\frac{dx}{a + bx + cx^2}$ wendet man wieder thode der Zerlegung in Faktoren und der Einführung von Variablen onstanten an und setzt demgemäss:

$$\omega = a + bx + cx^2, \quad 4)$$

$$\pi = b + 2cx + \sqrt{\delta}, \quad 5)$$

$$\varrho = b + 2cx - \sqrt{\delta}, \quad 6)$$

$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\delta}, \quad 7)$$

$$\pi\varrho = 4c\omega;\ \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}. \quad 8)$$

bstituiert man nun in die Fundamentalgleichung:

$$\frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{dx}{\omega} = dy \quad 9)$$

ert aus der Gl. 8, so ist:

$$\frac{4c\,dx}{\pi\varrho} = dy. \quad 10)$$

hrt man nunmehr mit Rücksicht auf die Gl. 7 Variable und Kon- ein, so ist:

$$\frac{4c\,(\pi - \varrho)\,dx}{\pi\varrho} = 2\sqrt{\delta}\,dy \quad 11)$$

$$\frac{dx}{\varrho} - \frac{dx}{\pi} = \frac{\sqrt{\delta}}{2c}\,dy. \quad 12)$$

umt man nun beiderseits die Differentialsumme, so ist, wenn Gl. 8 statt a der entsprechende Wert in ϱ, nämlich $b - \sqrt{\delta}$, der Ausdruck $2c$ gesetzt wird:

$$Ds\,\frac{dx}{\varrho} = Ds\,\frac{dx}{b - \sqrt{\delta} + 2cx} = \frac{1}{2c}\log\bar{\varrho}. \quad 13)$$

nso ist:

$$Ds - \frac{dx}{\pi} = -\,Ds\,\frac{dx}{b + \sqrt{\delta} + 2cx} = -\,\frac{1}{2c}\log\bar{\pi}. \quad 14)$$

stituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 13 und 14 in 12, so nimmt diese folgende Gestalt an:

$$\frac{1}{2c}\log\bar{\varrho} - \frac{1}{2c}\log\bar{\pi} = Ds\,\frac{\sqrt{\delta}}{2c}\,dy$$

oder

$$\log\frac{\bar{\varrho}}{\bar{\pi}} = Ds\,\sqrt{\delta}\,dy.$$

Befreit man nun dy von der Konstante, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}}\log\frac{\bar{\varrho}}{\bar{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{b^2-4ac}}\log\frac{b+2c\bar{x}-\sqrt{b^2-4ac}}{b+2c\bar{x}+\sqrt{b^2-4ac}}$$

$$= Ds\,dy = Ds\,\frac{dx}{a+bx+cx^2}.$$

Das vorstehende Integral wird (ebenso wie die übrigen in Paragraph entwickelten) imaginär, wenn $b^2 < 4ac$ ist. In diese können die betreffenden Differentiale nur durch Kreisbögen i werden (vgl. unten §. 12).

II. Ist dagegen $b^2 = 4ac$, folglich $b^2 - 4ac = \delta = 0$, so ist (

$$\pi = \varrho = b + 2cx,$$

und es nimmt demgemäss die Gl. 10 folgende Gestalt an:

$$\frac{4c\,dx}{\pi^2} = \frac{4c\,dx}{\varrho^2} = dy.$$

Nun ist aber (Neue Int.-Meth. S. 36, Gl. 186):

$$Ds\,\frac{dx}{(a+bx)^2} = -\frac{1}{b\,(a+b\bar{x})},$$

folglich, wenn man in der vorstehenden Formel statt a den entspre Wert in π oder ϱ (Gl. 18), nämlich b, statt b den Ausdruck stituiert:

$$Ds\,\frac{4c\,dx}{\pi^2} = Ds\,\frac{4c\,dx}{\varrho^2} = 4c\,Ds\,\frac{dx}{\pi^2} = -\frac{2}{\bar{\pi}} = -\frac{2}{b+2c\bar{x}}$$

III. Zur Integration von $\frac{dx}{a-bx+cx^2}$ setze man:

$$\omega = a - bx + cx^2,$$

$$\pi = b - 2cx + \sqrt{\delta},$$

$$\varrho = b - 2cx - \sqrt{\delta},$$

$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\delta},$$

$$\pi\varrho = 4c\omega;\quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}.$$

Wendet man nun auf die Fundamentalgleichung:

$$\frac{dx}{a - bx + cx^2} = \frac{dx}{\omega} = dy \qquad 27)$$

Rücksicht auf die Gl. 23—26 die Methode der Einführung von
olen und Konstanten an (vgl. oben Gl. 10—12), so ergiebt sich fol-
Gleichung:

$$\frac{dx}{\varrho} - \frac{dx}{\pi} = \frac{\sqrt{\delta}}{2c}\, dy. \qquad 28)$$

t man sodann, ähnlich wie oben in den Gl. 13—17 beiderseits die
ntialsummen und befreit man zugleich dy von den Konstanten, so
t sich das Integral:

$$\log \frac{\overline{\pi}}{\varrho} = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \frac{b - 2c\bar{x} + \sqrt{b^2 - 4ac}}{b - 2c\bar{x} - \sqrt{b^2 - 4ac}} = Ds \frac{dx}{a - bx + cx^2}. \qquad 29)$$

dieses Integral wird, wenn $b^2 < 4ac$ ist, imaginär und kann dann
ler endlicher Form nur durch Kreisbögen integriert werden (vgl.
§. 12). Ist dagegen $b^2 = 4ac$, so ergiebt sich nach ähnlichen
ionen wie in der Gl. 18—21

$$Ds \frac{dx}{a - bx + cx^2} = \frac{2}{b - 2c\bar{x}}. \qquad 30)$$

. Zur Integration von $\frac{dx}{-a + bx - cx^2}$ setze man:

$$\omega = -a + bx - cx^2, \qquad 31)$$

$$\pi = b - 2cx + \sqrt{\delta}, \qquad 32)$$

$$\varrho = -b + 2cx + \sqrt{\delta}, \qquad 33)$$

$$\pi + \varrho = 2\sqrt{\delta}, \qquad 34)$$

$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}, \qquad 35)$$

wird sich nach Anwendung der zur Genüge bekannten Methoden
egral ergeben:

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}} \log \frac{\overline{\varrho}}{\overline{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}} \log \frac{-b + 2c\bar{x} + \sqrt{\delta}}{b - 2c\bar{x} + \sqrt{\delta}} = Ds \frac{dx}{-a + bx - cx^2}. \qquad 36)$$

ntegral kann übrigens (vgl. §. 9, Gl. 14, 15) auch mittelbar aus
egral in der Gl. 29 durch folgende Gleichung ermittelt werden:

$$\frac{dx}{a + bx - cx^2} = -Ds \frac{dx}{a - bx + cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{\delta}} \log \frac{b - 2c\bar{x} + \sqrt{\delta}}{b - 2c\bar{x} - \sqrt{\delta}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\delta}} \log \frac{b - 2c\bar{x} - \sqrt{\delta}}{b - 2c\bar{x} + \sqrt{\delta}}. \qquad 37)$$

beiden Integrale in der Gl. 36 und 37 sind mit Rücksicht auf
tion in §. 9, Gl. 14 identisch.

V. Zur Auffindung des Integrals von $\frac{dx}{-a-bx-cx^2}$ setze m

$$\omega = -a-bx-cx^2,$$

$$\pi = b+2cx+\sqrt{\delta},$$

$$\varrho = -b-2cx+\sqrt{\delta},$$

$$\pi+\varrho = 2\sqrt{\delta},$$

$$\pi\varrho = 4c\omega;\ \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}$$

und es ergiebt sich nach einigen leichten Operationen das Integ

$$\frac{1}{\sqrt{\delta}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\log\frac{b+2c\bar{x}+\sqrt{\delta}}{-b-2c\bar{x}+\sqrt{\delta}} = Ds\,\frac{dx}{-a-bx-cx^2}$$

Man kann aber auch (vgl. Gl. 37) mittelbar aus der Gl. 17 folgend gral entwickeln, welches mit Rücksicht auf §. 9, Gl. 14 und 15 ident

$$Ds\,\frac{dx}{-a-bx-cx^2} = -\,Ds\,\frac{dx}{a+bx+cx^2} = -\,\frac{1}{\sqrt{\delta}}\log\frac{b+2c\bar{x}-}{b+2c\bar{x}+}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\delta}}\log\frac{b+2c\bar{x}+\sqrt{}}{b+2c\bar{x}-\sqrt{}}$$

§. 11.

Integration von $\frac{dx}{\pm a\pm bx\pm cx^2}$ (Fortsetzung).

Während die im §. 10 entwickelten Integrale in dem Fall $b^2 < 4ac$ ist, imaginär werden, enthalten die nachfolgenden Integ Ausdruck $\sqrt{b^2+4ac} = \sqrt{\sigma}$, welcher bei positivem a, b, c immer

I. Zur Auffindung des Integrals von $\frac{dx}{-a+bx+cx^2}$ setze m

$$\omega = -a+bx+cx^2,$$

$$\pi = b+2cx+\sqrt{\sigma},$$

$$\varrho = b+2cx-\sqrt{\sigma},$$

$$\pi-\varrho = 2\sqrt{\sigma},$$

$$\pi\varrho = 4c\omega;\ \omega = \frac{\pi\varrho}{4c},$$

so ergiebt sich nach Anwendung der bekannten Methoden:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}}\log\frac{\overline{\varrho}}{\overline{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\log\frac{b+2c\bar{x}-\sqrt{\sigma}}{b+2c\bar{x}+\sqrt{\sigma}} = Ds\,\frac{dx}{-a+bx+cx^2}.$$

II. Zur Auffindung des Integrals von $\frac{dx}{a + bx - cx^2}$ setze man:

$$\omega = a + bx - cx^2, \tag{7}$$

$$\pi = b - 2cx + \sqrt{\sigma}, \tag{8}$$

$$\varrho = -b + 2cx + \sqrt{\sigma}, \tag{9}$$

$$\pi + \varrho = 2\sqrt{\sigma}, \tag{10}$$

$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}, \tag{11}$$

es ergiebt sich das Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{\bar{\varrho}}{\bar{\pi}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{-b + 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}}{b - 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}} = Ds \frac{dx}{a + bx - cx^2}. \tag{12}$$

II. Zur Auffindung des Integrals $\frac{dx}{-a - bx + cx^2}$ setze man:

$$\omega = -a - bx + cx^2, \tag{13}$$

$$\pi = b - 2cx + \sqrt{\sigma}, \tag{14}$$

$$\varrho = b - 2cx - \sqrt{\sigma}, \tag{15}$$

$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\sigma}, \tag{16}$$

$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}, \tag{17}$$

s ergiebt sich nach den bekannten Operationen das Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{b - 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}}{b - 2c\bar{x} - \sqrt{\sigma}} = Ds \frac{dx}{-a - bx + cx^2}. \tag{18}$$

Integral kann auch mittelbar aus jenem der Gl. 12 durch folgende ung gewonnen werden:

$$\frac{dx}{-a - bx + cx^2} = -Ds \frac{dx}{a + bx - cx^2} = -\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{-b + 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}}{b - 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{b - 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}}{-b + 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}}. \tag{19}$$

e beiden Integrale in den Gl. 18 und 19 sind mit Rücksicht auf lation in §. 9, Gl. 14 identisch.

I. Endlich zur Integration des Differentials $\frac{dx}{a - bx - cx^2}$ setze man:

$$\omega = a - bx - cx^2, \tag{20}$$

$$\pi = b + 2cx + \sqrt{\sigma}, \tag{21}$$

$$\varrho = -b - 2cx + \sqrt{\sigma}, \tag{22}$$

$$\pi + \varrho = 2\sqrt{\sigma}, \tag{23}$$

$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}, \tag{24}$$

und es ergiebt sich das Integral:

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} = \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{b + 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}}{-b - 2c\bar{x} + \sqrt{\sigma}} = Ds \frac{dx}{a - bx - cx^2}.$$

Dieses Integral kann übrigens auch mittelbar aus jenem in der G geleitet werden, indem man folgende Gleichung bildet:

$$Ds \frac{dx}{a - bx - cx^2} = - Ds \frac{dx}{-a + bx + cx^2} = - \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{b + 2c\bar{x} -$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\sigma}} \log \frac{b + 2c\bar{x} + \sqrt{}}{b + 2c\bar{x} - \sqrt{}}$$

Beide Integrale (Gl. 25 und 26) sind aus dem unter III. ange Grunde identisch.

§. 12.

Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx \pm cx^2}$ (Fortsetzung).

Die im §. 10 entwickelten Integrale enthalten insgesamt de druck $\sqrt{b^2 - 4ac} = \sqrt{\delta}$ und werden deshalb für $b^2 < 4ac$ imagi welchem Falle nur die Integration durch Kreisbögen möglich ist. Integrale sind jetzt noch aus den Differentialen abzuleiten.

I. Bei Ermittlung des Integrals von $\frac{dx}{a + bx + cx^2}$ ist die Funda gleichung:

$$\frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{dx}{\omega} = dy$$

und diese ist auf die cyclometrische Relation (§. 8, Gl. 1 ff.)

$$Ds \frac{df(x)}{1 + [f(x)]^2} = \arctan f(\overline{x})$$

zurückzuführen. Nun ist aber, wenn man $4ac - b^2 = \Delta$ setzt:

$$\frac{dx}{a + bx + cx^2} = \frac{4c\,dx}{4ac + 4bcx + 4c^2x^2 + b^2 - b^2} = \frac{4c\,dx}{\Delta + (b + 2cx)^2}$$

$$= \frac{\frac{4c\,dx}{\Delta}}{1 + \left(\frac{b + 2cx}{\sqrt{\Delta}}\right)^2}.$$

Substituiert man den letzten Ausdruck in die Gl. 1, so ist:

$$\frac{\frac{4c\,dx}{\Delta}}{1 + \left(\frac{b + 2cx}{\sqrt{\Delta}}\right)^2} = dy.$$

liziert man, um die Operationen in den Gl. 6—8 zu ermöglichen, eits mit $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$, so ist

$$\frac{\frac{2c\,dx}{\sqrt{\Delta}}}{1+\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{\Delta}}\right)^2} = \frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,dy. \qquad 5)$$

t aber:

$$\frac{2c\,dx}{\sqrt{\Delta}} = d\,\frac{b+2cx}{\sqrt{\Delta}}, \qquad 6)$$

ı, wenn man diesen letzteren Ausdruck in die Gl. 5 substituiert iderseits die Differentialsumme nimmt:

$$Ds\,\frac{d\,\frac{b+2cx}{\sqrt{\Delta}}}{1+\left(\frac{b+2cx}{\sqrt{\Delta}}\right)^2} = (\text{Gl. 2})\ \arctan\frac{b+2c\bar{x}}{\sqrt{\Delta}} = Ds\,\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\,dy \qquad 7)$$

nn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{b+2c\bar{x}}{\sqrt{\Delta}} = Ds\,dy = Ds\,\frac{dx}{a+bx+cx^2}. \qquad 8)$$

auch $(-b-2cx)^2 = b^2+4bcx+4c^2x^2$ ist, so kann man in ichung 3 den Ausdruck $b+2cx$ durch $-b-2cx$ ersetzen. Da $d(-b-2cx) = -2c\,dx$ ist, so muss in diesem Falle die Gl. 4 $\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ multipliziert werden und es ergiebt sich dann das Integral:

$$\text{rctan}\,\frac{-b-2c\bar{x}}{\sqrt{\Delta}} = (\text{§. 8, Gl. 12})\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{\sqrt{\Delta}}{-b-2c\bar{x}} = Ds\,dy, \qquad 9)$$

Gleichung übrigens auch mittelbar aus der Gl. 8 mit Hilfe von en cyclometrischen und goniometrischen Relationen gefunden kann.

Auf ganz analoge Weise kann man noch folgende Gleichungen :

$$\frac{dx}{x+cx^2} = \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{-b+2c\bar{x}}{\sqrt{\Delta}} = -\frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{b-2c\bar{x}}{\sqrt{\Delta}} = (\text{§. 8, Gl. 12})$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{\sqrt{\Delta}}{b-2c\bar{x}}. \qquad 10)$$

$$\frac{dx}{+bx-cx^2} = -\,Ds\,\frac{dx}{a-bx+cx^2} = (\text{Gl. 10})\ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{b-2c\bar{x}}{\sqrt{\Delta}}. \qquad 11)$$

$$\frac{dx}{-bx-cx^2} = -\,Ds\,\frac{dx}{a+bx+cx^2} = (\text{Gl. 8})\ \ \frac{2}{\sqrt{\Delta}}\arctan\frac{\sqrt{\Delta}}{b+2c\bar{x}}. \qquad 12)$$

Schliesslich sind noch einige Faktoren-Differentiale zu er- welche die Eigentümlichkeit haben, dass mit Rücksicht auf die

besonderen Werte von a, b, c der Ausdruck $\sqrt{b^2-4ac}$ immer i
ist. Ich werde bei diesen Integralen, welche für die späteren Integ
(§. 13 ff.) von entscheidender Bedeutung sind, zuerst die reelle
metrischen und dann die imaginären algebraischen Ausdrücke ge

Man setze in den Gleichungen §. 12, Gl. 8 (s. auch Gl. 9), f
§. 10, Gl. 17 für a, b, c die Ausdrücke α^2, $\alpha\beta$ und β^2, so ergie

$$Ds\,\frac{dx}{\alpha^2+\alpha\beta x+\beta^2x^2} = Ds\,\frac{dx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha\beta}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\alpha\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{-3}\,\alpha\beta}\log\frac{\alpha(1-\sqrt{-3})+2\beta\bar{x}}{\alpha(1+\sqrt{-3})+2\beta\bar{x}}$$

$$Ds\,\frac{dx}{\alpha^2-\alpha\beta x+\beta^2x^2} = Ds\,\frac{dx}{\varrho} = (\text{Gl. 10})\,\frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha\beta}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = (\text{§. 10, Gl. 29})\,\frac{1}{\sqrt{-3}\,\alpha\beta}\log\frac{\alpha(1+\sqrt{-3})-}{\alpha(1-\sqrt{-3})-}$$

Um die Summe und die Differenz dieser beiden Differential
zu finden, benutze man die bekannte cyclometrische Relation:

$$\arctan x \pm \arctan y = \arctan\frac{x\pm y}{1\mp xy}$$

und es ergiebt sich nach einigen Reductionen:

$$Ds\,\frac{dx}{\pi}+Ds\,\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha\beta}\arctan\frac{\sqrt{3}\,\alpha\beta\bar{x}}{\alpha^2-\beta^2\bar{x}^2} = (\text{Gl. 10})\,\frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha\beta}\arctan\frac{\beta^2\bar{x}^2-}{\sqrt{3}\,\alpha}$$

$$Ds\,\frac{dx}{\pi} - Ds\,\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha\beta}\arctan\frac{\sqrt{3}\,\alpha^2}{\alpha^2+2\beta^2\bar{x}^2}.$$

IV. Setzt man in den vorerwähnten Gleichungen $a=\alpha^2$, $b=$
$c=\beta^2$, so ergiebt sich:

$$Ds\,\frac{dx}{\alpha^2+\sqrt{2}\,\alpha\beta x+\beta^2x^2} = \frac{dx}{\pi} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,\beta\bar{x}}{\alpha}+1\right).$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{-2}\,\alpha\beta}\log\frac{\alpha(\sqrt{2}-\sqrt{-2})+2\beta\bar{x}}{\alpha(\sqrt{2}+\sqrt{-2})+2\beta\bar{x}}.$$

$$Ds\,\frac{dx}{\alpha^2-\sqrt{2}\,\alpha\beta x+\beta^2x^2} = \frac{dx}{\varrho} = \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}\arctan\left(\frac{\sqrt{2}\,\beta\bar{x}}{\alpha}-1\right).$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{-2}\,\alpha\beta}\log\frac{\alpha(\sqrt{2}+\sqrt{-2})-2\beta\bar{x}}{\alpha(\sqrt{2}-\sqrt{-2})-2\beta\bar{x}}.$$

$$Ds\,\frac{dx}{\pi}+Ds\,\frac{dx}{\varrho} = (\text{Gl. 17})\,\frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}\arctan\frac{\sqrt{2}\,\alpha\beta\bar{x}}{\alpha^2-\beta^2\bar{x}^2} =$$

$$= (\text{Gl. 10})\,\frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta^2\bar{x}^2-\alpha^2}{\sqrt{2}\,\alpha\beta\bar{x}}.$$

$$Ds\frac{dx}{\pi} - Ds\frac{dx}{\varrho} = (\text{Gl. } 17)\ \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}\arctan\frac{\alpha^2}{\beta^2\bar{x}^2} =$$

$$= (\S.\,8, \text{Gl. } 6, 11) - \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta^2\bar{x}^2}{\alpha^2}. \qquad 25)$$

. Setzt man

$$\varkappa = 2\sqrt{ac} + b. \qquad 26)$$

$$\lambda = 2\sqrt{ac} - b, \qquad 27)$$

$$\varkappa\lambda = 4ac - b^2 = \Delta, \qquad 28)$$

ertauscht man in den obenerwähnten Gleichungen a und c durch urzeln $\sqrt{a}$ und $\sqrt{c}$, b durch $\sqrt{\varkappa}$, so ist

$$\frac{dx}{+\sqrt{\varkappa}\,x+\sqrt{c}\,x^2} = Ds\frac{dx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{\sqrt{\varkappa}+2\sqrt{c}\,\bar{x}}{\sqrt{\lambda}}. \qquad 29)$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\log\frac{\sqrt{\varkappa}+2c\bar{x}-\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\varkappa}+2c\bar{x}+\sqrt{-\lambda}}. \qquad 30)$$

$$\frac{dx}{-\sqrt{\varkappa}\,x+\sqrt{c}\,x^2} = Ds\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{-\sqrt{\varkappa}+2c\bar{x}}{\sqrt{\lambda}}. \qquad 31)$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{-\lambda}}\log\frac{\sqrt{\varkappa}-2c\bar{x}+\sqrt{-\lambda}}{\sqrt{\varkappa}-2c\bar{x}-\sqrt{-\lambda}}. \qquad 32)$$

$$\frac{dx}{\pi} + Ds\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{\sqrt{\lambda}\,\bar{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}\,\bar{x}^2} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{\sqrt{c}\,\bar{x}^2-\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}\,\bar{x}}. \qquad 33)$$

$$\frac{dx}{\pi} - Ds\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{\sqrt{\Delta}}{2c\bar{x}^2-b} = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\arctan\frac{b-2c\bar{x}^2}{\sqrt{\Delta}}. \qquad 34)$$

Wendet man die nämlichen Abkürzungen wie sub V an, so ist

$$\frac{dx}{\sqrt{a}+\sqrt{\lambda}\,x+\sqrt{c}\,x^2} = Ds\frac{dx}{\pi} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\arctan\frac{\sqrt{\lambda}+2\sqrt{c}\,\bar{x}}{\sqrt{\varkappa}}. \qquad 35)$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{-\varkappa}}\log\frac{\sqrt{\lambda}+2\sqrt{c}\,\bar{x}-\sqrt{-\varkappa}}{\sqrt{\lambda}+2\sqrt{c}\,\bar{x}+\sqrt{-\varkappa}}. \qquad 36)$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a}-\sqrt{\lambda}\,x+\sqrt{c}\,x^2} = Ds\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\arctan\frac{-\sqrt{\lambda}+2\sqrt{c}\,\bar{x}}{\sqrt{\varkappa}}. \qquad 37)$$

$$\text{„} \qquad \text{„} = \frac{1}{\sqrt{-\varkappa}}\log\frac{\sqrt{\lambda}-2\sqrt{c}\,\bar{x}+\sqrt{-\varkappa}}{\sqrt{\lambda}-2\sqrt{c}\,\bar{x}-\sqrt{-\varkappa}}. \qquad 38)$$

$$\frac{dx}{\pi} + Ds\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\arctan\frac{\sqrt{\varkappa}\,\bar{x}}{\sqrt{a}-\sqrt{c}\,\bar{x}^2} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\arctan\frac{\sqrt{c}\,\bar{x}^2-\sqrt{a}}{\sqrt{\varkappa}\,\bar{x}}. \qquad 39)$$

$$\frac{lx}{\pi} - Ds\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{\varkappa}}\arctan\frac{\sqrt{\Delta}}{b+2c\bar{x}^2}. \qquad 40)$$

§. 13.

Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx^2 \pm cx^4}$.

Die vorstehenden Integrale können durch die in den §. 10–
gelegten Methoden ohne Zerlegung in Partialbrüche sehr leicht
werden. Auch hier ist bei denjenigen Integralen, welche den A
$\sqrt{b^2-4ac} = \sqrt{\delta}$ enthalten, zu unterscheiden, ob $b^2 \gtrless 4ac$ ist,
dies bei den Integralen mit dem Ausdruck $\sqrt{b^2+4ac} = \sqrt{\sigma}$ gle
ist, weil auch hier überall vorausgesetzt wird, dass a, b, c
Grössen sind.

I. Zur Integration von $\frac{dx}{a+bx^2+cx^4}$ $(b^2 > 4ac)$ setze man:

$$\omega = a + bx^2 + cx^4,$$
$$\pi = b + 2cx^2 + \sqrt{\delta},$$
$$\varrho = b + 2cx^2 - \sqrt{\delta},$$
$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\delta},$$
$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c},$$

und es ergiebt sich ganz analog wie in §. 10, Gl. 9—12:

$$\frac{dx}{\varrho} - \frac{dx}{\pi} = \frac{\sqrt{\delta}}{2c}\,dy$$

oder

$$Ds\,\frac{dx}{b-\sqrt{\delta}+2cx^2} - Ds\,\frac{dx}{b+\sqrt{\delta}+2cx^2} = Ds\,\frac{\sqrt{\delta}}{2c}\,dy.$$

Nimmt man nach Anleitung der §§. 6—8 von den Differential
die Differentialsummen und befreit man dann dy von den Kor
so ist das Integral ermittelt.

II. Setzt man zur Integration von $\frac{dx}{a-bx^2+cx^4}$ $(b^2 > 4ac)$

$$\omega = a - bx^2 + cx^4,$$
$$\pi = b - 2cx^2 + \sqrt{\delta},$$
$$\varrho = b - 2cx^2 - \sqrt{\delta},$$
$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\delta},$$
$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c},$$

so erhält man nach einigen leichten Operationen:

$$\frac{2c}{\sqrt{\delta}}\,Ds\,\frac{dx}{b-\sqrt{\delta}-2cx^2} - \frac{2c}{\sqrt{\delta}}\,Ds\,\frac{dx}{b+\sqrt{\delta}-2cx^2} = Ds\,\frac{dx}{a-bx^2+c}$$

Differentiale links können nach Anleitung des §. 9, Gl. 1—8 leicht riert werden.

Auch die Integration von $\frac{dx}{-a+bx^2-cx^4}$ und von $\frac{dx}{-a-bx^2-cx^4}$ ntweder durch Zeichenwechsel bei den Integralen in den Gl. 14 und er unmittelbar nach der Anleitung von §. 10, Abs. IV und V leicht ızuführen.

III. Ist $b^2 = 4ac$, folglich $b^2 - 4ac = \delta = 0$, so ist (Gl. 2, 3)

$$\pi = \varrho = b + 2cx^2, \tag{15}$$

analog wie in §. 10, Gl. 19

$$Ds\frac{dx}{a+bx^2+cx^4} = Ds\frac{4c\,dx}{\pi^2} = Ds\frac{4c\,dx}{\varrho^2}. \tag{16}$$

ist aber zufolge §. 16, Gl. 20

$$4cDs\frac{dx}{(b+2cx^2)^2} = 4cDs\frac{dx}{\pi^2} = \frac{2c}{b}\left(\frac{\overline{x}}{\overline{\pi}} + Ds\frac{dx}{\pi}\right) =$$

$$= Ds\frac{dx}{a+bx^2+cx^4}\ [b^2 = 4ac]. \tag{17}$$

ıo ist (Gl. 9—13) zufolge §. 17, Gl. 8

$$4c\,Ds\frac{dx}{(b-2cx^2)^2} = 4cDs\frac{dx}{\pi^2} = \frac{2c}{b}\left(\frac{\overline{x}}{\overline{\pi}} + Ds\frac{dx}{\pi}\right) =$$

$$= Ds\frac{dx}{a-bx^2+cx^4}\ [b^2 = 4ac]. \tag{18}$$

V. Ist endlich $b^2 < 4ac$, so setze man zur Integration von $\frac{dx}{a+bx^2+cx^4}$:

$$\omega = a + bx^2 + cx^4, \tag{19}$$

$$\varkappa = 2\sqrt{ac} + b, \tag{20}$$

$$\lambda = 2\sqrt{ac} - b, \tag{21}$$

$$\pi = \sqrt{a} + \sqrt{\lambda}\,x + \sqrt{c}\,x^2, \tag{22}$$

$$\varrho = \sqrt{a} - \sqrt{\lambda}\,x + \sqrt{c}\,x^2, \tag{23}$$

$$\frac{\pi-\varrho}{x} = 2\sqrt{\lambda}, \tag{24}$$

$$\pi\varrho = \omega, \tag{25}$$

; ergiebt sich aus der Fundamentalgleichung, wenn man mit Rück- tauf die Gl. 24 Variable und Konstanten einführt:

$$\frac{(\pi-\varrho)\,dx}{x\pi\varrho} = 2\sqrt{\lambda}\,dy \tag{26}$$

$$\frac{dx}{x\varrho} - \frac{dx}{x\pi} = 2\sqrt{\lambda}\,dy. \tag{27}$$

ıt aber zufolge §. 21, Gl. 24, 20 (unten S. 47, 48):

$$Ds\,\frac{dx}{x\varrho} = Ds\,\frac{dx}{x(\sqrt{a}-\sqrt{\lambda}x+\sqrt{c}\,x^2)} = \frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{\overline{x}^2}{\overline{\varrho}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{a}}\,Ds\,\frac{dx}{\varrho}.$$

$$Ds\,-\frac{dx}{x\pi} = -\,Ds\,\frac{dx}{x(\sqrt{a}+\sqrt{\lambda}x+\sqrt{c}\,x^2)} = -\,\frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{\overline{x}^2}{\overline{\pi}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{a}}\,Ds\,\frac{dx}{\pi}.$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 28 und 29
Gl. 27, so ist:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{a}}\left(Ds\,\frac{dx}{\pi} + Ds\,\frac{dx}{\varrho}\right) = Ds\,2\sqrt{\lambda}\,dy.$$

Substituiert man endlich für die Differentialsummen $Ds\,\frac{dx}{\pi}$ und
aus §. 12, Gl. 35 und 37 die entsprechenden Werte, so erschei
Integral in der Form, welche manche Darstellungen der Integralrec
aufweisen. Am einfachsten gestaltet sich aber dasselbe, wenn m
§. 12, Gl. 39 die Gesamt-Differentialsumme von $\frac{dx}{\pi}$ und $\frac{dx}{\varrho}$ substi
Es ist dann:

$$\frac{1}{2\sqrt{a}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{a\varkappa}}\arctan\frac{\sqrt{c}\,\overline{x}^2-\sqrt{a}}{\sqrt{\varkappa}\,\overline{x}} = Ds\,2\sqrt{\lambda}\,dy,$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit

$$-\frac{1}{4\sqrt{a\lambda}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + \frac{1}{2\sqrt{a\varkappa}}\arctan\frac{\sqrt{c}\,\overline{x}^2-\sqrt{a}}{\sqrt{\varkappa}\,\overline{x}} = Ds\,\frac{dx}{a+bx^2+cx^4}\;[b^2<4ac]$$

V. Zur Integration von $\frac{dx}{a-bx^2+cx^4}$ $(b^2<4ac)$ setze man (s. Gl. 2

$$\omega = a - bx^2 + cx^4,$$
$$\pi = \sqrt{a} + \sqrt{\varkappa}x + \sqrt{c}\,x^2,$$
$$\varrho = \sqrt{a} - \sqrt{\varkappa}x + \sqrt{c}\,x^2,$$
$$\frac{\pi-\varrho}{x} = 2\sqrt{\varkappa},$$
$$\pi\varrho = \omega,$$

und es ergiebt sich nach ganz ähnlichen Operationen wie in A
wenn man für $Ds\,\frac{dx}{\pi} + Ds\,\frac{dx}{\varrho}$ den Wert aus §. 12, Gl. 33 subst
das Integral:

$$\frac{1}{4\sqrt{a\varkappa}}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + \frac{1}{2\sqrt{a\lambda}}\arctan\frac{\sqrt{c}\,\overline{x}^2-\sqrt{a}}{\sqrt{\lambda}\,\overline{x}} = Ds\,\frac{dx}{a-bx^2+cx^4}\;[b^2<4ac]$$

In allen Integralen, bei welchen für $Ds\,\frac{dx}{\pi}$ und $Ds\,\frac{dx}{\varrho}$ sub IV
die reellen Kreisbogenintegrale benutzt wurden, kann auch de
sprechende imaginäre algebraische Ausdruck (§. 12, Gl. 30, 32, 36, 38
stituiert werden.

Schliesslich ist noch zu bemerken, dass die Integrale von $\frac{dx}{-a+bx^2-cx^4}$ $\frac{dx}{-a-bx^2-cx^4}$ entweder mittelbar aus den Integralen in den Gl. 7, 7, 18, 32, 38 durch Zeichenwechsel oder unmittelbar aus den Differenzen durch ähnliche Rechnungen wie oben (I—V) gefunden werden kann.

VI. Zur Integration von $\frac{dx}{-a+bx^2+cx^4}$ setze man, ähnlich wie in Gl. 1—5 ($\sigma = b^2 + 4ac$):

$$\omega = -a + bx^2 + cx^4, \tag{39}$$

$$\pi = b + 2cx^2 + \sqrt{\sigma}, \tag{40}$$

$$\varrho = b + 2cx^2 - \sqrt{\sigma}, \tag{41}$$

$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\sigma}, \tag{42}$$

$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}, \tag{43}$$

man gelangt nach den bekannten Operationen zu der Gleichung

$$\frac{dx}{\varrho} - \frac{dx}{\pi} = \frac{\sqrt{\sigma}}{2c}\,dy \tag{44}$$

$$s\frac{dx}{b-\sqrt{\sigma}+2cx^2} - \frac{2c}{\sqrt{\sigma}}Ds\frac{dx}{b+\sqrt{\sigma}+2cx^2} = Ds\frac{dx}{-a+bx^2+cx^4}. \tag{45}$$

Diese Gleichung kann nach Anleitung der §§. 6—8 leicht integriert werden.

VII. Zur Integration von $\frac{dx}{a+bx^2-cx^4}$ setze man, ähnlich wie in §. 11, Gl. 6—11:

$$\omega = a + bx^2 - cx^4, \tag{46}$$

$$\pi = b - 2cx^2 + \sqrt{\sigma}, \tag{47}$$

$$\varrho = -b + 2cx^2 + \sqrt{\sigma}, \tag{48}$$

$$\pi + \varrho = 2\sqrt{\sigma}, \tag{49}$$

$$\pi\varrho = 4c\omega; \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}, \tag{50}$$

und ergiebt sich (vgl. §. 9, Gl. 8 und §. 6—8):

$$s\frac{dx}{b+\sqrt{\sigma}-2cx^2} + \frac{2c}{\sqrt{\sigma}}Ds\frac{dx}{-b+\sqrt{\sigma}+2cx^2} = Ds\frac{dx}{a+bx^2-cx^4}. \tag{51}$$

Die Integrale für $\frac{dx}{-a-bx^2+cx^4}$ und $\frac{dx}{a-bx^2-cx^4}$ können entweder aus den Integralen in den Gl. 51 und 45 durch Zeichenwechsel oder auch unmittelbar durch Rechnung gefunden werden.

§. 14.

Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx^3}$.

I. Setzt man zur Erleichterung der Rechnung

$$\alpha = \sqrt[3]{a}\,; \quad \alpha^3 = a\,,$$

$$\beta = \sqrt[3]{b}\,; \quad \beta^3 = b\,,$$

so ist die Fundamentalgleichung:

$$\frac{dx}{a + bx^3} = \frac{dx}{\alpha^3 + \beta^3 x^3} = \frac{dx}{\omega} = dy\,.$$

Zerlegt man nun, wie in den früheren Fällen, den Nenner des Diffe in Faktoren, so ist:

$$\pi = \alpha + \beta x\,,$$

$$\pi^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 x^2,$$

$$\varrho = \alpha^2 - \alpha\beta x + \beta^2 x^2,$$

$$\frac{\pi^2 - \varrho}{x} = 3\alpha\beta,$$

$$\pi\varrho = \alpha^3 + \beta^3 x = \omega\,.$$

Führt man nun mit Rücksicht auf die Gl. 7 Variable und Kor ein, so ist:

$$\frac{(\pi^2 - \varrho)\,dx}{x\pi\varrho} = 3\alpha\beta\,dy\,,$$

oder, da $\pi = \alpha + \beta x$ ist:

$$\frac{\alpha\,dx}{x\varrho} + \frac{\beta\,dx}{\varrho} - \frac{dx}{x\pi} = 3\alpha\beta\,dy\,.$$

Nun ist aber zufolge §. 21, Gl. 24, 10:

$$Ds\,\frac{\alpha\,dx}{x\varrho} = \alpha\,Ds\,\frac{dx}{x\varrho} = \alpha\,Ds\,\frac{dx}{x(\alpha^2 - \alpha\beta x + \beta^2 x^2)} = \frac{1}{\alpha}\log\frac{\overline{x}}{\sqrt{\varrho}} + \frac{\beta}{2}Ds\,\frac{}{}$$

$$Ds\,\frac{\beta\,dx}{\varrho} = \beta\,Ds\,\frac{dx}{\varrho}\,.$$

$$Ds - \frac{dx}{x\pi} = -\,Ds\,\frac{dx}{x(\alpha + \beta x)} = -\,\frac{1}{\alpha}\log\frac{\overline{x}}{\overline{\pi}}\,.$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 11—13 Gl. 10, so ergiebt sich nach einigen leichten Reductionen:

$$\frac{1}{\alpha}\log\frac{\overline{\pi}}{\sqrt{\varrho}} + \frac{3\beta}{2}\,Ds\,\frac{dx}{\varrho} = Ds\,3\alpha\beta\,dy\,,$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit

$$\frac{1}{3\alpha^2\beta}\log\frac{\overline{\pi}}{\sqrt{\varrho}} + \frac{1}{2\alpha}\,Ds\,\frac{dx}{\varrho} = Ds\,dy\,,$$

her Gleichung man auch folgende Gestalt geben kann:

$$\frac{1}{3\alpha^2\beta}\left[\log\frac{\overline{\pi}}{\sqrt{\varrho}}+\frac{3\alpha\beta}{2}Ds\frac{x}{\varrho}\right]=Ds\,dy. \qquad 16)$$

In algebraischer imaginärer Form kann diese Gleichung leicht inte-
t werden, wenn man in derselben für $Ds\frac{dx}{\varrho}$ den Wert aus §. 12,
6 substituiert. In reeller endlicher Form ist dagegen, weil $\frac{dx}{\varrho}$ zu
im §. 12, Abs. III—V behandelten Differentialen gehört, die Inte-
on nur in der Weise möglich, dass man für $Ds\frac{dx}{\varrho}$ das in §. 12, Gl. 15
ltene Kreisbogenintegral substituiert. Es ist dann:

$$\frac{1}{3\alpha^2\beta}\left[\log\frac{\overline{\pi}}{\sqrt{\varrho}}+\sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\beta\overline{x}}{\sqrt{3}\alpha}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right]=Ds\frac{dx}{\alpha^3+\beta^3x^3}. \qquad 17)$$

man, wie üblich, $\frac{\alpha}{\beta}=k$ und ersetzt man überall mittelst der geeig-
Operationen α und β durch k, so erlangt das vorstehende Integral
orm, in welcher es häufig vorkommt, nämlich:

$$\frac{k}{3a}\left[\log\frac{k+\overline{x}}{\sqrt{k^2-k\overline{x}+\overline{x}^2}}+\sqrt{3}\arctan\frac{2\overline{x}-k}{\sqrt{3}\,k}\right]=Ds\frac{dx}{a+bx^3}. \qquad 18)$$

I. Zur Integration von $\frac{dx}{a+bx^3}$ setze man unter Festhaltung der
rzung in Gl. 1 und 2:

$$\omega=-\alpha^3+\beta^3x^3, \qquad 19)$$

$$\pi=\alpha^2+\alpha\beta x+\beta^2x^2, \qquad 20)$$

$$\varrho=-\alpha+\beta x, \qquad 21)$$

$$\varrho^2=\alpha^2-2\alpha\beta x+\beta^2x^2, \qquad 22)$$

$$\frac{\pi-\varrho^2}{x}=3\alpha\beta, \qquad 23)$$

$$\pi\varrho=\omega, \qquad 24)$$

s ergiebt sich durch Einführung von Variablen und Konstanten
3):

$$\frac{dx}{x\varrho}+\frac{\alpha\,dx}{x\pi}-\frac{\beta\,dx}{\pi}=3\alpha\beta\,dy. \qquad 25)$$

st aber zufolge §. 21, Gl. 10, 20 (unten S. 47):

$$Ds\frac{dx}{x\varrho}=Ds\frac{dx}{x(-\alpha+\beta x)}=-\frac{1}{\alpha}\log\frac{\overline{x}}{\overline{\varrho}}. \qquad 26)$$

$$Ds\frac{\alpha\,dx}{x\pi}=\alpha\,Ds\frac{dx}{x(\alpha^2+\alpha\beta x+\beta^2x^2)}=\frac{1}{2\alpha}\log\frac{\overline{x}^2}{\overline{\pi}}-\frac{\beta}{2}Ds\frac{dx}{\pi}. \qquad 27)$$

$$Ds-\frac{\beta\,dx}{\pi}=-\beta\,Ds\frac{dx}{\pi}. \qquad 28)$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 26—28 in die
ferner den Wert von $Ds\frac{dx}{\pi}$ aus §. 12, Gl. 13 und befreit man
dy von den Konstanten, so ergeben sich folgende zwei Gleichung

$$\frac{1}{3\alpha^2\beta}\log\frac{\bar{\varrho}}{\sqrt{\pi}} - \frac{1}{\sqrt{3}\,\alpha^2\beta}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = Ds\frac{dx}{-\alpha^3+\beta^3x^3}.$$

$$\frac{1}{3\alpha^2\beta}\left[\log\frac{\bar{\varrho}}{\sqrt{\pi}} - \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = Ds\frac{dx}{-\alpha^3+\beta^3x^3}.$$

III. Setzt man zur Integration von $\frac{dx}{a-bx^3}$ unter Festhaltu
Abkürzung in den Gl. 1 und 2:

$$\omega = \alpha^3 - \beta^3x^3,$$
$$\pi = \alpha^2 + \alpha\beta x + \beta^2x^2,$$
$$\varrho = \alpha - \beta x,$$
$$\varrho^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta x + \beta^2x^2,$$
$$\frac{\pi-\varrho^2}{x} = 3\alpha\beta,$$
$$\pi\varrho = \omega = \alpha^3 - \beta^3x^3,$$

so ergiebt sich nach ganz ähnlichen Rechnungen wie sub II fo
Gleichung:

$$\frac{1}{3\alpha^2\beta}\log\frac{\sqrt{\pi}}{\bar{\varrho}} + \frac{1}{\sqrt{3}\,\alpha^2\beta}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) =$$

$$= \frac{1}{3\alpha^2\beta}\left[\log\frac{\sqrt{\pi}}{\bar{\varrho}} + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = Ds\frac{dx}{\alpha^3-\beta^3x^3}.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass diese Gleichung mit Rücksicht auf die Re

$$Ds\frac{dx}{\alpha^3-\beta^3x^3} = -Ds\frac{dy}{-\alpha^3+\beta^3x^3}$$

auch durch Zeichenwechsel aus den Gl. 29 und 30 gewonnen
kann, wobei zu bemerken ist, dass $d\log(-\alpha+\beta x) = d\log(\alpha-\beta$

§. 15.

Integration von $\frac{dx}{\pm a \pm bx^4}$.

I. Setzt man zur Erleichterung der Rechnung

$$\alpha = \sqrt[4]{a}\,;\quad a = \alpha^4,$$
$$\beta = \sqrt[4]{b}\,;\quad b = \beta^4,$$

so ist die Fundamentalgleichung:

$$\frac{dx}{a+bx^4} = \frac{dx}{\alpha^4+\beta^4x^4} = \frac{dx}{\omega} = dy.$$

Zerlegt man den Nenner des Differentials in Faktoren, so ist:

$$\pi = \alpha^2 + \sqrt{2}\,\alpha\beta x + \beta^2 x^2, \tag{4}$$

$$\varrho = \alpha^2 - \sqrt{2}\,\alpha\beta x + \beta^2 x^2, \tag{5}$$

$$\frac{\pi - \varrho}{x} = 2\sqrt{2}\,\alpha\beta, \tag{6}$$

$$\pi\varrho = \omega = \alpha^4 + \beta^4 x^4. \tag{7}$$

man (Gl. 6) Variable und Konstanten ein, so nimmt die Gl. 3 fol- Gestalt an:

$$\frac{dx}{x\varrho} - \frac{dx}{x\pi} = 2\sqrt{2}\,\alpha\beta\,dy. \tag{8}$$

ist aber zufolge §. 21, Gl. 24, 20:

$$Ds\frac{dx}{x\varrho} = Ds\frac{dx}{x(\alpha^2 - \sqrt{2}\,\alpha\beta x + \beta^2 x^2)} = \frac{1}{2\alpha^2}\log\frac{\overline{x}^2}{\overline{\varrho}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}\,\alpha}Ds\frac{dx}{\varrho}. \tag{9}$$

$$\frac{d}{x\pi} = -Ds\frac{dx}{x(\alpha^2 + \sqrt{2}\,\alpha\beta x + \beta^2 x^2)} = -\frac{1}{2\alpha^2}\log\frac{\overline{x}^2}{\overline{\pi}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}\,\alpha}Ds\frac{dx}{\pi}. \tag{10}$$

tuiert man die Differentialsummen aus den Gl. 9 und 10 in die Gl. 8,

$$\frac{1}{2\alpha^2}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + \frac{\beta}{\sqrt{2}\,\alpha}\left[Ds\frac{dx}{\pi} + Ds\frac{dx}{\varrho}\right] = Ds\,2\sqrt{2}\,\alpha\beta\,dy. \tag{11}$$

nan endlich an die Stelle von $Ds\frac{dx}{\pi} + Ds\frac{dx}{\varrho}$ den in §. 12, Gl. 24 benen Wert, so ist:

$$\frac{1}{2\alpha^2}\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + \frac{1}{\alpha^2}\arctan\frac{\sqrt{2}\,\alpha\beta\overline{x}}{\alpha^2 - \beta^2\overline{x}^2} = 2\sqrt{2}\,\alpha\beta\,Ds\,dy, \tag{12}$$

nn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\,\alpha^3\beta}\left[\log\frac{\overline{\pi}}{\overline{\varrho}} + 2\arctan\frac{\sqrt{2}\,\alpha\beta\overline{x}}{\alpha^2 - \beta^2\overline{x}^2}\right] = Ds\frac{dx}{\alpha^4 + \beta^4 x^4}. \tag{13}$$

nan $\frac{\alpha}{\beta} = k$ und ersetzt man überall mittelst der geeigneten Opera- α und β durch k, so erhält das vorstehende Integral seine in den ltafeln übliche Form.

Setzt man zur Integration von $\frac{dx}{-a + bx^4} = \frac{dx}{-\alpha^4 + \beta^4 x^4}$ unter bung der Abkürzungen in Gl. 1 und 2:

$$\omega = -\alpha^4 + \beta^4 x^4, \tag{14}$$

$$\pi = \alpha^2 + \beta^2 x^2, \tag{15}$$

$$\varrho = -\alpha^2 + \beta^2 x^2, \tag{16}$$

$$\pi - \varrho = 2\alpha^2, \tag{17}$$

$$\pi\varrho = \omega = -\alpha^4 + \beta^4 x^4, \tag{18}$$

so ergiebt sich nach Einführung von Variablen und Konstanten (

$$\frac{dx}{\varrho} - \frac{dx}{\pi} = 2\alpha^2\, dy.$$

Nun ist aber zufolge §. 9, Gl. 13 und §. 8, Gl. 6 (vgl. Gl. 11):

$$Ds\,\frac{dx}{\varrho} = Ds\,\frac{dx}{-\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta}\log\frac{-\alpha+\beta\bar{x}}{\alpha+\beta\bar{x}}.$$

$$Ds - \frac{dx}{\pi} = -\,Ds\,\frac{dx}{\alpha^2+\beta^2x^2} = -\,\frac{1}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta\bar{x}}{\alpha}.$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 20 und 21 Gl. 19 und befreit man sodann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{4\alpha^3\beta}\left[\log\frac{-\alpha+\beta\bar{x}}{\alpha+\beta\bar{x}} - 2\arctan\frac{\beta\bar{x}}{\alpha}\right] = Ds\,\frac{dx}{-\alpha^4+\beta^4x^4}.$$

III. Setzt man zur Integration von $\frac{dx}{a-bx^4} = \frac{dx}{\alpha^4-\beta^4x^4}$:

$$\omega = \alpha^4 - \beta^4x^4,$$
$$\pi = \alpha^2 + \beta^2x^2,$$
$$\varrho = \alpha^2 - \beta^2x^2,$$
$$\pi + \varrho = 2\alpha^2,$$
$$\pi\varrho = \omega = \alpha^4 - \beta^4x^4,$$

so ergiebt sich nach Einführung von Variablen und Konstanten (

$$\frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho} = 2\alpha^2\, dy.$$

Nun ist aber zufolge §. 8, Gl. 6 und §. 9, Gl. 8

$$Ds\,\frac{dx}{\pi} = Ds\,\frac{dx}{\alpha^2+\beta^2x^2} = \frac{1}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta\bar{x}}{\alpha}.$$

$$Ds\,\frac{dx}{\varrho} = Ds\,\frac{dx}{\alpha^2-\beta^2x^2} = \frac{1}{2\alpha\beta}\log\frac{\alpha+\beta\bar{x}}{\alpha-\beta\bar{x}}.$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 29 und 30 Gl. 28 und befreit man dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{4\alpha^3\beta}\left[\log\frac{\alpha+\beta\bar{x}}{\alpha-\beta\bar{x}} + 2\arctan\frac{\beta\bar{x}}{\alpha}\right] = Ds\,\frac{dx}{\alpha^4-\beta^4x^4}.$$

Es ist leicht ersichtlich, dass dieses Integral jenem in der Gl. 22 erfolgtem Zeichenwechsel entspricht. Auch können die beiden Gleich 22 und 31 dadurch, dass man $\frac{\alpha}{\beta} = k$ setzt, auf ihre übliche For bracht werden.

IV. Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass auch alle ü Differentiale von der Form $\frac{dx}{\alpha+bx^n}$ sich durch Zerlegung in Fa

urch Einführung von Variablen und Konstanten integrieren lassen.
z. B., wenn das Integral von $\frac{dx}{\alpha^5+\beta^5x^5}$ zu ermitteln ist:

$$\omega = \alpha^5 + \beta^5 x^5, \qquad 32)$$

$$\pi = \alpha + \beta x, \qquad 33)$$

$$\pi^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta x + \beta^2 x^2, \qquad 34)$$

$$\varrho = \alpha^2 - 2\alpha\beta x \cos\frac{\pi}{5} + \beta^2 x^2, \qquad 35)$$

$$\tau = \alpha^2 - 2\alpha\beta x \cos\frac{3\pi}{5} + \beta^2 x^2, \qquad 36)$$

$$\frac{2\pi^2-\varrho-\tau}{x} = 2\alpha\beta\left(2 + \cos\frac{\pi}{5} + \cos\frac{3\pi}{5}\right), \qquad 37)$$

$$\pi\varrho\tau = \omega = \alpha^5 + \beta^5 x^5, \qquad 38)$$

urch diese Gleichungen kann das obige Integral mittelst mehr-
r Einführung von Variablen und Konstanten leicht gefunden
. Doch würde die Darstellung dieser ziemlich verwickelten Rech-
ier zu weit führen.

§. 16.

Integration von $\frac{dx}{\omega^p}$.

In der vorstehenden Formel $\frac{dx}{\omega^p}$ bedeutet p eine ganze positive
jedes Binom, Trinom oder Polynom von der Form $a+bx+cx^2+\cdots$,
ieses in integrable Faktoren, welche die Anwendung der Methode
führung von Variablen und Konstanten gestatten, zerlegt werden
hne Rücksicht, ob die Faktoren reell oder imaginär sind. Ich
nke mich hier auf jene Fälle, wo der Nenner des Differentials
zwei Faktoren zerfällt; übrigens ist leicht ersichtlich, dass die
wickelten Integrationsmethoden mit geringen Abweichungen auch
Differentiale angewendet werden können, welche (s. z. B. §. 15,
-38) in drei oder mehrere Faktoren zerfallen.
eichnen wir diese beiden Faktoren wie bisher mit π und ϱ, so ist:

$$\pi\varrho = \lambda\omega, \quad \omega = \frac{\pi\varrho}{\lambda}, \qquad 1)$$

$$\pi \pm \varrho = \mu, \qquad 2)$$

$$\pi^p\varrho^p = \lambda^p\omega^p; \quad \omega^p = \frac{\pi^p\varrho^p}{\lambda^p}, \qquad 3)$$

$$(\pi \pm \varrho)^p = \mu^p. \qquad 4)$$

n nun mit Rücksicht auf die Gl. 3 an die Stelle der Fundamental-
g:

$$\frac{dx}{\omega^p} = dy$$

die entsprechende Gleichung:

$$\frac{\lambda^p dx}{\pi^p \varrho^p} = dy$$

setzen.

Führt man nun mit Rücksicht auf die Gl. 4 Variable und Ko
ein, so ergiebt sich:

$$\frac{\lambda^p (\pi \pm \varrho)^p dx}{\pi^p \varrho^p} = \mu^p dy$$

oder

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^p Ds \frac{(\pi \pm \varrho)^p dx}{\pi^p \varrho^p} = Ds\, dy.$$

Häufig hat die Gleichung zwischen den Variablen und Konstant
komplizierteren Charakter als in der Gl. 2 vorausgesetzt wird.
wir z. B. oben §. 14, Gl. 7 (S. 26) gesehen, dass $\frac{\pi^2 - \varrho}{x} = 3\alpha\beta$
Um die Gl. 8 allgemein brauchbar zu machen, muss man ihr
folgende Gestalt geben:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^p Ds \frac{[f(\pi, \varrho)]^p dx}{\pi^p \varrho^p} = Ds \frac{dx}{\omega^p}.$$

II. Durch diese einfache Formel können alle oben (S. 31)
neten Differentiale von der Form $\frac{dx}{\omega^p}$ integriert werden. Ist
Gleichung

$$\frac{dx}{(a + bx^2)^2} = dy$$

zu integrieren, so setzt man (§. 6, Gl. 2—5):

$$\omega = a + bx^2,$$
$$\pi = \sqrt{a} + \sqrt{-b}\, x,$$
$$\varrho = \sqrt{a} - \sqrt{-b}\, x,$$
$$\pi + \varrho = \mu = 2\sqrt{a},$$
$$(\pi + \varrho)^2 = \mu^2 = 4a,$$
$$\pi\varrho = \omega; \quad \lambda = 1,$$

und es ist folglich mit Rücksicht auf Gl. 8

$$\frac{1}{4a} Ds \left[\frac{dx}{\varrho^2} + \frac{2dx}{\pi\varrho} + \frac{dx}{\pi^2}\right] = Ds \frac{dx}{(a + bx^2)^2}.$$

Nun ist aber

$$Ds \frac{dx}{\pi^2} + Ds \frac{dx}{\varrho^2} = -\frac{1}{\sqrt{-b}(\sqrt{a} + \sqrt{-b}\, x)} + \frac{1}{\sqrt{-b}(\sqrt{a} - \sqrt{-b}\, x)} = \frac{}{a-}$$

$$Ds\,\frac{2\,dx}{\pi\varrho} = 2\,Ds\,\frac{dx}{\omega}, \tag{19}$$

ch, wenn man die Differentialsummen aus den Gl. 18 und 19 in die 7 substituiert,

$$\frac{\bar{x}}{2\,a\bar{\omega}} + \frac{1}{2\,a}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{dx}{\omega^2} = Ds\,\frac{dx}{(a+bx^2)^2}. \tag{20}$$

II. Ist die Gleichung

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = dy \tag{21}$$

egrieren, so setze man zufolge §. 10, Gl. 1—10 (S. 13):

$$\omega = a + bx + cx^2, \tag{22}$$

$$\pi = b + \sqrt{\delta} + 2cx, \tag{23}$$

$$\varrho = b - \sqrt{\delta} + 2cx, \tag{24}$$

$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\delta}, \tag{25}$$

$$\pi\varrho = 4c\omega;\quad \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}, \tag{26}$$

h ist dann:

$$\lambda^2 = 16c^2;\quad \mu^2 = (\pi-\varrho)^2 = 4\delta. \tag{27}$$

tuiert man diese Werte in die Gl. 8, so ist:

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{4c^2}{\delta}\,Ds\,\frac{(\pi-\varrho)^2 dx}{\pi^2\varrho^2} = \frac{4c^2}{\delta}\,Ds\left[\frac{dx}{\varrho^2} - \frac{2\,dx}{\pi\varrho} + \frac{dx}{\pi^2}\right]. \tag{28}$$

st aber

$$Ds\,\frac{dx}{\varrho^2} + Ds\,\frac{dx}{\pi^2} = -\frac{1}{2c\bar{\varrho}} - \frac{1}{2c\bar{\pi}} = -\frac{b+2c\bar{x}}{4c^2\bar{\omega}}, \tag{29}$$

$$Ds - \frac{2\,dx}{\pi\varrho} = (\text{Gl. } 26) - \frac{1}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega}, \tag{30}$$

n, wenn man die beiden Differentialsummen aus den Gl. 29 und 30 letzten Ausdruck der Gl. 28 substituiert:

$$-\frac{b+2c\bar{x}}{\delta\bar{\omega}} - \frac{2c}{\delta}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2}. \tag{31}$$ [1]

. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3} = dy \tag{32}$$

grieren, so ist (Gl. 25, 26)

$$\lambda^3 = 64c^3;\quad \mu^3 = 8\delta\sqrt{\delta}, \tag{33}$$

[1] Setzt man, wie in den meisten Integraltafeln, an die Stelle von $\delta = b^2 - 4ac$ A druck $\Delta = 4ac - b^2$ (§. 10, Gl. 1 und 2), so werden die Zeichen in dem obigen r positiv. Eine gleiche Umwandlung des Zeichens tritt auch bei dem Integral e Gl. 41 in betreff jener Glieder ein, welche δ in erster Potenz enthalten, e die Glieder mit δ^2 dasselbe Zeichen behalten, weil $\delta^2 = \Delta^2$ ist.

folglich mit Rücksicht auf Gl. 8

$$Ds\,\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3} = \frac{8c^3}{\delta\sqrt{\delta}}\,Ds\left[\frac{dx}{\varrho^3} - \frac{3\,dx}{\pi\varrho^2} + \frac{3\,dx}{\pi^2\varrho} - \frac{dx}{\pi^3}\right].$$

Nun ist aber zunächst:

$$Ds\,\frac{dx}{\varrho^3} - Ds\,\frac{dx}{\pi^3} = -\frac{1}{4c\bar{\varrho}^2} + \frac{1}{4c\bar{\pi}^2} = -\frac{\sqrt{\delta}\,(b+2c\bar{x})}{16c^3\bar{\omega}^2}.$$

Dagegen lassen sich die Differentiale $-\frac{3\,dx}{\pi\varrho^2} + \frac{3\,dx}{\pi^2\varrho}$ nur durch holte Einführung von Variablen und Konstanten integrieren. Se zu diesem Zweck zuvörderst:

$$-\frac{3\,dx}{\pi\varrho^2} = dz,$$

so ergeben sich mit Rücksicht auf die Gl. 25 und 26 folgende Rel

$$-\frac{3\,(\pi-\varrho)\,dx}{\pi\varrho^2} = 2\sqrt{\delta}\,dz.$$

$$-\frac{3\,dx}{\varrho^2} + \frac{3\,dx}{4c\omega} = 2\sqrt{\delta}\,dz.$$

$$-\frac{3}{2\sqrt{\delta}}\,Ds\frac{dx}{\varrho^2} + \frac{3}{8c\sqrt{\delta}}\,Ds\frac{dx}{\omega} = Ds\,dz = Ds\,-\frac{3\,dx}{\pi\varrho^2}.$$

Ebenso ergiebt sich nach ganz analogen Rechnungen:

$$-\frac{3}{2\sqrt{\delta}}\,Ds\frac{dx}{\pi^2} + \frac{3}{8c\sqrt{\delta}}\,Ds\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{3\,dx}{\pi^2\varrho}.$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 35, 39, 40 Gl. 34, so ergiebt sich, wenn man für $Ds\,\frac{dx}{\pi^2} + Ds\,\frac{dx}{\varrho^2}$ den Wert Gl. 29 nimmt:

$$Ds\,\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^3} = -\frac{b+2c\bar{x}}{2\delta\bar{\omega}^2} + \frac{3c(b+2c\bar{x})}{\delta^2\bar{\omega}} + \frac{6c^2}{\delta^2}\,Ds\frac{dx}{\omega}$$

Einige leichte Reductionen geben dieses Integral in seiner gewöh Gestalt (s. S. 33, Note).

§. 17.

Integration von $\frac{dx}{(a \pm bx^n)^p}$.

I. Die im §. 16 entwickelte Formel für $Ds\,\frac{dx}{\omega^p}$ ist zwar un dort angegebenen Voraussetzungen allgemein anwendbar, ihre Be ist aber wegen der Weitläufigkeit der Rechnungen dann weni quem, wenn die Gleichung zwischen den Variablen und Kon (§. 16, Gl. 2, 4) zu verwickelteren Ausdrücken führt (z. B. §. 14,

esem Falle können mit Vorteil einige spezielle Formeln gebraucht
n, die sich der Natur der einzelnen Differentiale näher anschliessen
on welchen daher die wichtigsten noch zu erwähnen sind.
Es sei zuvörderst die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a \pm bx^n)^p} = \frac{dx}{\omega^p} = dy \qquad 1)$$

egrieren.
u diesem Zweck sind vor allem beiderseits Konstanten einzuführen
en §. 2), indem man die Gl. 1 mit $n(p-1)$ multipliziert, also:

$$\frac{n(p-1)\,dx}{\omega^p} = n(p-1)\,dy. \qquad 2)$$

n führt man mit Rücksicht auf die Gleichung:

$$\omega \mp bx^n = a \qquad 3)$$

le und Konstanten ein, so dass die Gl. 2 folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{n(p-1)(\omega \mp bx^n)\,dx}{\omega^p} = n(p-1)\,a\,dy \qquad 4)$$

$$\frac{n(p-1)\,dx}{\omega^{p-1}} \mp \frac{n(p-1)\,bx^n\,dx}{\omega^p} = n(p-1)\,a\,dy. \qquad 5)$$

an teile man das erste Differential in zwei Ausdrücke, so dass ist:

$$\frac{dx}{\omega^{p-1}} + \frac{(np-n-1)\,dx}{\omega^{p-1}} = \frac{n(p-1)\,dx}{\omega^{p-1}}. \qquad 6)$$

uiert man den Wert aus der Gl. 6 in die Gl. 5 und nimmt man
eits die Differentialsumme, so kann die Gl. 5 auch so geschrieben
e:

$$\frac{x}{\omega^{p-1}} \mp \frac{n(p-1)\,bx^n\,dx}{\omega^p}\Big] + Ds\,\frac{(np-n-1)\,dx}{\omega^{p-1}} = Ds\,n(p-1)\,a\,dy. \qquad 7)$$

an endlich aus der ersten Differentialsumme links $\frac{x}{\omega^{p-1}}$ heraus und
man dy von den Konstanten, so ergiebt sich folgende Formel:

$$\frac{}{-1)}\,Ds\,\frac{x}{\omega^{p-1}}\Big[\frac{dx}{x} \mp \frac{n(p-1)\,bx^{n-1}\,dx}{\omega}\Big] + \frac{np-n-1}{an(p-1)}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^{p-1}} =$$

$$= Ds\,\frac{dx}{(a \pm bx^n)^p}. \qquad 8)$$

Nach dieser Formel kann das vorstehende Integral, wenn n und p
positive Zahlen sind, leicht integriert werden.
Soll z. B. die Gleichung

$$\frac{dx}{(a+bx^3)^2} = dy$$

integriert werden, so ist mit Rücksicht auf die Gl. 2—4 zunäch mit $3(\omega - bx^3)$, rechts mit $3a$ zu multiplizieren, also:

$$\frac{3(\omega - bx^3)\,dx}{\omega^2} = \frac{3\,dx}{\omega} - \frac{3bx^3dx}{\omega^2} = 3\,a\,dy.$$

Teilt man nunmehr das Differential $\frac{3\,dx}{\omega}$ im zweiten Ausdruck zu Gl. 6 in $\frac{dx}{\omega}$ und $\frac{2\,dx}{\omega}$, so nimmt die vorstehende Gleichung folg stalt an:

$$Ds\left[\frac{dx}{\omega} - \frac{3bx^3dx}{\omega^2}\right] + Ds\,\frac{2\,dx}{\omega} = Ds\,3a\,dy.$$

Zieht man nun aus dem ersten Differential mit Rücksicht auf $\frac{x}{\omega}$ heraus, so ist:

$$Ds\,\frac{x}{\omega}\left[\frac{dx}{x} - \frac{3bx^2dx}{\omega}\right] + 2\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,3a\,dy.$$

Nun ist aber, wenn man ganz analoge Operationen vornimmt, die in den „Neuen Integrationsmethoden“ S. 47—49 entwickelt

$$Ds\,\frac{x}{\omega}\left[\frac{dx}{x} - \frac{3bx^2dx}{\omega}\right] = \frac{x}{\omega}\cdot\frac{1+\frac{dx}{x}}{1+\frac{3bx^2dx}{\omega}} = \frac{x+dx}{\omega+3bx^2dx} = \frac{\bar{x}}{\bar{\omega}}$$

Substituiert man den letzten Wert der vorstehenden Gleichung Gl. 12 und befreit man sodann dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{\bar{x}}{3a\bar{\omega}} + \frac{2}{3a}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{dx}{(a+bx^3)^2}.$$

III. Ich habe sub II die Integration in der Weise durchgefüh ich die in den Gl. 1—8 angedeuteten Umgestaltungen mit dem grierenden Differential wirklich vornahm. Die Integration kann ab so erfolgen, dass man in der Formel der Gl. 8 unmittelbar die e lichen Substitutionen vollzieht. Zu diesem Zwecke werde ich d und zweite Differentialsumme der Gl. 8 abgekürzt mit $D's$ und D bezeichnen. Dieselbe Abkürzung soll auch in den späteren Fä nutzt werden.

Ist also z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx^3)^3} = \frac{dx}{\omega^3} = dy$$

zu integrieren, so ist mit Rücksicht auf die Gl. 8 und 13:

$$\frac{1}{an(p-1)}\,D's = \frac{1}{6a}\,Ds\,\frac{x}{\omega^2}\left[\frac{dx}{x} - \frac{6bx^2dx}{\omega}\right] = \frac{1}{6a}\cdot\frac{x}{\omega^2}\cdot\frac{1+\frac{dx}{x}}{1+\frac{2\,.\,3bx^2d}{\omega}}$$

$$= \frac{1}{6a}\cdot\frac{x+dx}{\omega^2+2\,.\,3bx^2\omega\,dx} = \frac{x+dx}{6a(\omega+3bx^2dx)^2} = \frac{x+dx}{6a(\omega+d\omega)^2} = \frac{\bar{x}}{6a\bar{\omega}}$$

$$\frac{np-n-1}{an(p-1)} D''s = \frac{5}{6a} Ds \frac{dx}{\omega^2} = \text{(Gl. 14)} \frac{5\bar{x}}{18a^2\bar{\omega}} + \frac{5}{9a^2} Ds \frac{dx}{\omega}. \quad 17)$$

ituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 16 und 17 in die so ist:

$$\frac{\bar{x}}{6a\bar{\omega}^2} + \frac{5\bar{x}}{18a^2\bar{\omega}} + \frac{5}{9a^2} Ds \frac{dx}{\omega} = Ds \frac{dx}{(a+bx^3)^3}. \quad 18)$$

V. Ist die Gleichung

$$\frac{dx}{(a+bx^4)^2} = dy \quad 19)$$

egrieren, so ergeben sich mit Rücksicht auf die Gl. 8 folgende onen:

$$\frac{1}{in(p-1)} D's = \frac{1}{4a} Ds \frac{x}{\omega}\left[\frac{dx}{x} - \frac{4bx^3dx}{\omega}\right] = \frac{1}{4a} \cdot \frac{x+dx}{\omega+d\omega} = \frac{\bar{x}}{4a\bar{\omega}}. \quad 20)$$

$$\frac{np-n-1}{an(p-1)} D''s = \frac{3}{4a} Ds \frac{dx}{\omega}. \quad 21)$$

$$\frac{\bar{x}}{4a\bar{\omega}} + \frac{3}{4a} Ds \frac{dx}{\omega} = Ds \frac{dx}{(a+bx^4)^2}. \quad 22)$$

h bemerke noch, dass die Richtigkeit der Integrationsformel in 8 sich leicht dadurch ergiebt, dass man diese Formel durch einige gende Reduktionen auf das ursprüngliche Differential $\frac{dx}{\omega^p}$ zurück- kann. Dieselbe Reduktion kann man auch bei allen übrigen Inte- sformeln, die im Laufe dieser Abhandlung vorkommen, ohne rigkeit durchführen.

§. 18.

Integration von $\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^p}$.

An die im vorhergehenden Paragraphen gegebenen Entwicklungen t sich enge die Integration der Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^p} = \frac{dx}{\omega^p} = dy \quad 1)$$

bezeichne in üblicher Weise:

$$\frac{d\omega}{dx} = \omega' = b + 2cx, \quad 2)$$

$$\frac{d^2\omega}{dx^2} = \omega'' = 2c, \quad 3)$$

$$2\omega\omega'' - \omega'^2 = 4ac - b^2 = \Delta. \quad 4)$$

die Gl. 1 zu integrieren, führe man zunächst Konstanten ein, an beiderseits mit $p-1$ multipliziert, also:

$$\frac{(p-1)\,dx}{\omega^p} = (p-1)\,dy.$$

Sodann führt man mit Rücksicht auf die Gl. 4 Variable und Ko
ein, wodurch die vorstehende Gleichung folgende Gestalt annimr

$$\frac{(p-1)\,(2\,\omega\,\omega'' - \omega'^2)\,dx}{\omega^p} = \Delta\,(p-1)\,dy$$

oder:

$$\frac{2\,(p-1)\,\omega''\,dx}{\omega^{p-1}} - \frac{(p-1)\,\omega'^2\,dx}{\omega^p} = \Delta\,(p-1)\,dy.$$

Teilt man nun das erste Differential eben so wie im §. 17, Gl. 6
nimmt man dann die Differentialsumme, so ist:

$$Ds\left[\frac{\omega''\,dx}{\omega^{p-1}} - \frac{(p-1)\,\omega'^2\,dx}{\omega^p}\right] + Ds\,\frac{2c(2p-3)\,dx}{\omega^{p-1}} = Ds\,\Delta\,(p-1$$

Zieht man endlich aus der ersten Differentialsumme $\frac{\omega'}{\omega^{p-1}}$ heraus
freit man dann dy von den Konstanten (vgl. §. 17, Gl. 8), so is

$$\frac{1}{\Delta\,(p-1)}\,Ds\,\frac{\omega'}{\omega^{p-1}}\left[\frac{\omega''\,dx}{\omega'} - \frac{(p-1)\,\omega'\,dx}{\omega}\right] + \frac{2c\,(2p-3)}{\Delta\,(p-1)}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^{p-}}$$

$$= Ds\,\frac{dx}{(a+bx+cx^2)}$$

II. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a+bx+cx^2)^2} = \frac{dx}{\omega^2} = dy$$

zu integrieren, so sind, da $p-1$ in diesem Falle $= 1$ ist, so
Rücksicht auf die Gl. 4 und 6 Variable und Konstanten einzufü
dass sich folgende zwei Gleichungen ergeben:

$$\frac{(2\,\omega\,\omega'' - \omega'^2)\,dx}{\omega^2} = \Delta\,dy.$$

$$\frac{2\,\omega''\,dx}{\omega} - \frac{\omega'^2\,dx}{\omega^2} = \Delta\,dy.$$

Teilt man nun nach Anleitung der Gl. 8 das erste Differential, s

$$Ds\left[\frac{\omega''\,dx}{\omega} - \frac{\omega'^2\,dx}{\omega^2}\right] + Ds\,\frac{\omega''\,dx}{\omega} = Ds\,\Delta\,dy,$$

und wenn man mit Rücksicht auf Gl. 9 aus der ersten Differenti
$\frac{\omega'}{\omega}$ extrahiert:

$$Ds\,\frac{\omega'}{\omega}\left[\frac{\omega''\,dx}{\omega'} - \frac{\omega'\,dx}{\omega}\right] + 2c\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\Delta\,dy.$$

Nun ist aber, wenn man so wie in den „Neuen Integrationsm
S. 47—49 und wie oben im §. 17, Gl. 13 und 18 verfährt:

$$\left[\frac{\omega'' dx}{\omega'} - \frac{\omega' dx}{\omega}\right] = \frac{\omega'}{\omega} \cdot \frac{1 + \frac{\omega'' dx}{\omega'}}{1 + \frac{\omega' dx}{\omega}} = \frac{\omega' + \omega'' dx}{\omega + \omega' dx} = \frac{\bar{\omega}'}{\bar{\omega}} = \frac{b + 2c\bar{x}}{\bar{\omega}}, \quad 15)$$

wenn man den letzteren Ausdruck in die Gl. 14 substituiert und dy von der Konstante befreit:

$$\frac{b + 2c\bar{x}}{\Delta\bar{\omega}} + \frac{2c}{\Delta} Ds \frac{dx}{\omega} = Ds \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^2}. \quad 16)$$

II. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{(a + bx + cx^2)^3} = \frac{dx}{\omega^3} = dy \quad 17)$$

tegrieren, und will man das Integral, ähnlich wie in §. 17, Abs. III telbar aus der Integrationsformel ermitteln, so ist (Gl. 9):

$$\frac{1}{(p-1)} D's = \frac{1}{2\Delta} Ds \frac{\omega'}{\omega^2}\left[\frac{\omega'' dx}{\omega'} - \frac{2\omega' dx}{\omega}\right] = \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{\omega'}{\omega^2} \cdot \frac{1 + \frac{\omega'' dx}{\omega'}}{1 + \frac{2\omega' dx}{\omega}} =$$

$$= \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{\omega' + \omega'' dx}{\omega^2 + 2\omega\omega' dx} = \frac{1}{2\Delta} \cdot \frac{\omega' + \omega'' dx}{(\omega + \omega' dx)^2} = \frac{\bar{\omega}'}{2\Delta\bar{\omega}^2}. \quad 18)$$

$$\frac{2c(2p-3)}{\Delta(p-1)} D''s = \frac{3c}{\Delta} Ds \frac{dx}{\omega^2} = (\text{Gl. } 16)\ \frac{3c\bar{\omega}'}{\Delta^2\bar{\omega}} + \frac{6c^2}{\Delta^2} Ds \frac{dx}{\omega}. \quad 19)$$

stuiert man die Differentialsummen aus den Gl. 18 und 19 in die so ist:

$$\frac{\bar{\omega}'}{2\Delta\bar{\omega}^2} + \frac{3c\bar{\omega}'}{\Delta^2\bar{\omega}} + \frac{6c^2}{\Delta^2} Ds \frac{dx}{\omega} = Ds \frac{dx}{(a + bx + cx^2)^3}. \quad 20)$$

leichte Reduktionen geben diesem Integral seine gewöhnliche

§. 19.

Integration von $\frac{x^q dx}{\omega^p}$.

der vorstehenden Formel bedeutet ω ein Binom, Trinom oder rm von der Form $a + bx + cx^2 + \cdots gx^n$, auf welches die im g des §. 16 enthaltenen Voraussetzungen Anwendung finden; q bedeuten ganze positive Zahlen; gx^n endlich jenes Glied von ω, h die Variable x in der höchsten Potenz enthält.

ler ist zu unterscheiden, ob $q \geq n$ oder $q < n$ ist. Ist q gleich rösser als n, so können die betreffenden Integrale nach einer allen Formel gefunden werden, von welcher im folgenden Paragraphen Rle sein wird. Gegenwärtig haben wir also nur den Fall ins Auge sn, wo der Exponent von x im Zähler ($= q$) kleiner als der höchste pint von x im Nenner ($= n$) ist.

I. Ist q nur um eine Einheit kleiner als n, so kann x^q jeder dem Differentialquotienten von $\omega = \omega'$ ermittelt und die Int dadurch ermöglicht werden, dass man den gefundenen Wert vo das Differential substituiert. In einzelnen Fällen (z. B. bei $Ds\frac{x^3}{a+bx}$ wird der Zähler des Differentials durch diese Operation nicht vol von der Variablen x befreit, diese erscheint aber dann in nied Grade, welcher die Integration möglich macht.

So ist z. B. für $\omega = a + bx^2$:

$$\omega' = 2bx; \quad x = \frac{\omega'}{2b},$$

und wenn man diesen Wert von x in die Gleichung

$$\frac{x\,dx}{a + bx^2} = dy$$

substituiert und beiderseits die Differentialsummen nimmt, so ist S. 37 ff.):

$$Ds\,\frac{x\,dx}{a+bx^2} = Ds\,\frac{\omega'\,dx}{2b\omega} = \frac{1}{2b}\,Ds\,\frac{\omega'\,dx}{\omega} = \frac{1}{2b}\log\bar{\omega}.$$

Ebenso ist:

$$Ds\,\frac{x^2\,dx}{a + bx^3} = Ds\,\frac{\omega'\,dx}{3b\omega} = \frac{1}{3b}\log\bar{\omega}.$$

III. Ist die Gleichung

$$\frac{x\,dx}{a + bx + cx^2} = dy$$

zu integrieren, so ist:

$$\omega' = b + 2cx; \quad x = \frac{\omega' - b}{2c},$$

folglich ergeben sich, wenn man den Wert von x in die Gl. 5 subs folgende Gleichungen:

$$\frac{(\omega' - b)\,dx}{2c\omega} = dy.$$

$$\frac{1}{2c}\,Ds\,\frac{\omega'\,dx}{\omega} - \frac{b}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,dy.$$

$$\frac{1}{2c}\log\bar{\omega} - \frac{b}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{x\,dx}{a + bx + cx^2}.$$

Durch ganz analoge Rechnungen ergiebt sich:

$$\frac{1}{2c}\log\bar{\omega} + \frac{b}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{x\,dx}{a - bx + cx^2}.$$

Es wird sich übrigens weiter unten (Gl. 16—22) zeigen, dass die vorstehenden Integrale (Gl. 9 und 10) in wesentlich abweichender For dadurch gewonnen werden können, dass man x nicht aus dem Diffe quotienten von ω, sondern aus den Faktoren dieses Ausdrucks er

V. Ist die Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^2} = dy \qquad 11)$$

egrieren, so ist ähnlich wie in den Gl. 7 und 8:

$$\frac{1}{2c}\,Ds\,\frac{\omega'\,dx}{\omega^2} - \frac{b}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^2} = Ds\,dy. \qquad 12)$$

st aber zufolge N. Int.-Meth. S. 33, 34 und oben §. 16, Gl. 31, wenn n die Stelle von $\delta = b^2 - 4ac$ den Ausdruck $\Delta = 4ac - b^2$ setzt lfolge dessen die Zeichen wechselt:

$$\frac{1}{2c}\,Ds\,\frac{\omega'\,dx}{\omega^2} = -\frac{1}{2c\bar{\omega}}. \qquad 13)$$

$$-\frac{b}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^2} = -\frac{b\bar{\omega}'}{2c\Delta\bar{\omega}} - \frac{b}{\Delta}\,Ds\,\frac{dx}{\omega}. \qquad 14)$$

stuiert man die Differentialsummen aus den Gl. 13 und 14 in die l, so ist:

$$-\frac{1}{2c\bar{\omega}} - \frac{b\bar{\omega}'}{2c\Delta\bar{\omega}} - \frac{b}{\Delta}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{x\,dx}{(a+bx+cx^2)^2}. \qquad 15)$$

leichte Reduktion zwischen den beiden ersten Gliedern auf der e Seite giebt das Integral in seiner gewöhnlichen Gestalt.

. Ist der Exponent q um mehr als eine Einheit kleiner als n n), so muss x^q entweder unmittelbar aus den Faktoren von ω, lh aus π und ϱ oder auch aus den Differentialquotienten π', ϱ' er- e werden, wobei jene Methode zu wählen ist, welche die bequemste läufig können auch diese Methoden ebensogut wie die in den –III entwickelten angewendet werden, ähnlich wie ja auch in der la sehr oft mehrere Wege zu demselben Ziele führen.

b kann z. B. die Gleichung

$$\frac{x\,dx}{a+bx+cx^2} = \frac{x\,dx}{\omega} = dy, \qquad 16)$$

welche das Integral schon oben (Gl. 9) ermittelt wurde, auch in der s integriert werden, dass man ebenso wie im §. 10, Gl. 4—8 gleichsetzt:

$$\pi = b + \sqrt{\delta} + 2cx;\ x = \frac{\pi - b - \sqrt{\delta}}{2c}, \qquad 17)$$

$$\varrho = b - \sqrt{\delta} + 2cx;\ x = \frac{\varrho - b + \sqrt{\delta}}{2c}, \qquad 18)$$

$$\pi\varrho = 4c\omega;\ \omega = \frac{\pi\varrho}{4c}. \qquad 19)$$

Substituiert man den Wert für x aus der Gl. 17 in die Gl. 16, so ist:

$$\frac{2\,dx}{\varrho} - \frac{2\,(b+\sqrt{\delta})\,dx}{\pi\varrho} = dy \qquad 20)$$

oder wenn man beiderseits die Differentialsummen nimmt:

$$\frac{1}{c}\log\bar{\varrho} - \frac{b+\sqrt{\delta}}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{x\,dx}{a+bx+cx^2}.$$

Substituiert man andererseits den Wert von x aus der Gl. 18 Gl. 16, so ist:

$$\frac{1}{c}\log\bar{\pi} - \frac{b-\sqrt{\delta}}{2c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{x\,dx}{a+bx+cx^2}$$

Diese beiden Integrale kommen meines Wissens nirgends vor, s ebenso richtig und einfacher als das gewöhnliche Integral (Gl. 9

V. Das Integral der Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{a+bx^3} = \frac{x\,dx}{\alpha^3+\beta^3x^3} = \frac{x\,dx}{\omega} = dy$$

kann nur dadurch gewonnen werden, dass man x aus den Fakto ω ermittelt. Man setze wie im §. 14, Gl. 4—8:

$$\pi = \alpha+\beta x;\quad x = \frac{\pi-\alpha}{\beta},$$
$$\varrho = \alpha^2 - \alpha\beta x + \beta^2x^2,$$
$$\pi\varrho = \omega = \alpha^3+\beta^3x^3,$$

so ist, wenn man den Wert von x aus der Gl. 24 in die Gl. 23 sub

$$\frac{dx}{\beta\varrho} - \frac{\alpha\,dx}{\beta\pi\varrho} = dy.$$

Nun ist aber zufolge §. 12, Gl. 15 und §. 14, Gl. 17:

$$\frac{1}{\beta}\,Ds\,\frac{dx}{\varrho} = \frac{2}{\sqrt{3}\,\alpha\beta^2}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

$$-\frac{\alpha}{\beta}\,Ds\,\frac{dx}{\pi\varrho} = -\frac{\alpha}{\beta}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = -\frac{1}{3\alpha\beta^2}\log\frac{\bar{\pi}}{\sqrt{\bar{\varrho}}} - \frac{1}{\sqrt{3}\,\alpha\beta^2}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha} -$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 28 und 2 Gl. 27, so ist nach einigen naheliegenden Operationen:

$$\frac{1}{3\alpha\beta^2}\left[\log\frac{\sqrt{\varrho}}{\pi} + \sqrt{3}\arctan\left(\frac{2\beta\bar{x}}{\sqrt{3}\,\alpha} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right] = Ds\,\frac{x\,dx}{\alpha^3+\beta^3x^3}$$

Ersetzt man überall α und β durch $\frac{\alpha}{\beta} = k$, so erlangt stehende Integral seine gewöhnliche Gestalt.

VI. Ist die Gleichung

$$\frac{x\,dx}{a+bx^4} = \frac{x\,dx}{\alpha^4+\beta^4x^4} = \frac{x\,dx}{\omega} = dy$$

zu integrieren, so setze man ebenso wie in §. 15, Gl. 1—7

$$\pi = \alpha^2 + \sqrt{2}\,\alpha\beta x + \beta^2 x^2, \qquad 32)$$

$$\varrho = \alpha^2 - \sqrt{2}\,\alpha\beta x + \beta^2 x^2, \qquad 33)$$

$$x = \frac{\pi - \varrho}{2\sqrt{2}\,\alpha\beta}, \qquad 34)$$

$$\pi\varrho = \omega = \alpha^4 + \beta^4 x^4, \qquad 35)$$

s ergiebt sich, wenn man den Wert von x aus der Gl. 34 in die . substituiert:

$$\frac{dx}{\varrho} - \frac{dx}{\pi} = 2\sqrt{2}\,\alpha\beta\,dy. \qquad 36)$$

st aber zufolge §. 12, Gl. 25:

$$Ds\frac{dx}{\varrho} - Ds\frac{dx}{\pi} = -\left[Ds\frac{dx}{\pi} - Ds\frac{dx}{\varrho}\right] = \frac{\sqrt{2}}{\alpha\beta}\arctan\frac{\beta^2\bar{x}^2}{\alpha^2}, \qquad 37)$$

enn man diese Differentialsumme in die Gl. 36 substituiert und dy en Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2\alpha^2\beta^2}\arctan\frac{\beta^2\bar{x}^2}{\alpha^2} = Ds\frac{x\,dx}{\alpha^4 + \beta^4 x^4}. \qquad 38)$$

man $\alpha^2 = \sqrt{a}$, $\beta^2 = \sqrt{b}$ (§. 15, Gl. 1, 2), so erlangt dieses Integral gewöhnliche Form.

t endlich die Gleichung:

$$\frac{x^2dx}{a + bx^4} = \frac{x^2dx}{\alpha^4 + \beta^4 x^4} = \frac{x^2dx}{\omega} = dy \qquad 39)$$

grieren, so ergiebt sich aus der Gl. 32 und 33:

$$\pi + \varrho = 2\alpha^2 + 2\beta^2 x^2;\quad x^2 = \frac{\pi + \varrho - 2\alpha^2}{2\beta^2}, \qquad 40)$$

enn man diesen Wert von x^2 in die Gl. 39 substituiert:

$$\frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho} - \frac{2\alpha^2 dx}{\omega} = 2\beta^2\,dy. \qquad 41)$$

n man nun die Differentialsumme von $\frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho}$ aus §. 12, Gl. 24, aus §. 15, Gl. 12 und 13 und befreit man dann dy von den nten, so ergiebt sich nach einigen Reduktionen:

$$\frac{1}{4\sqrt{2}\,\alpha\beta^3}\left[\log\frac{\bar{\varrho}}{\bar{\pi}} + 2\arctan\frac{\sqrt{2}\,\alpha\beta\bar{x}}{\alpha^2 - \beta^2\bar{x}^2}\right] = Ds\frac{x^2dx}{\alpha^4 + \beta^4 x^4}. \qquad 42)$$

l Substitution von $\frac{\alpha}{\beta} = k$ wird dieses Integral leicht auf seine üb- orm gebracht.

VI. Ist die Gleichung

$$\frac{x\,dx}{a + bx^2 + cx^4} = \frac{x\,dx}{\omega} = dy \qquad 43)$$

grieren, so setze man (für $b^2 > 4ac$) wie in §. 13, Gl. 1—5:

$$\pi = b + \sqrt{\delta} + 2cx^2,$$
$$\varrho = b - \sqrt{\delta} + 2cx^2,$$
$$\pi - \varrho = 2\sqrt{\delta},$$
$$\pi\varrho = 4c\omega;\ \omega = \frac{\pi\varrho}{4c},$$

und führe in die Gl. 43 mit Rücksicht auf die Gl. 46 Variab Konstanten ein, so ergiebt sich

$$\frac{x\,dx}{\varrho} - \frac{x\,dx}{\pi} = \frac{\sqrt{\delta}}{2c}\,dy.$$

Nimmt man nun nach Anleitung der Operationen in den Gl. 1- den Differentialen links die Differentialsummen, so ergeben s $\varrho' = 4cx$, $\pi' = 4cx$, also $x = \frac{\varrho'}{4c} = \frac{\pi'}{4c}$ ist, folgende zwei Gleic

$$\frac{\varrho'\,dx}{4c\varrho} - \frac{\pi'\,dx}{4c\pi} = \frac{\sqrt{\delta}}{2c}\,dy$$
$$\frac{1}{2\sqrt{\delta}} \log \frac{\varrho}{\pi} = Ds \frac{x\,dx}{a + bx^2 + cx^4}.$$

Wird in der Gl. 43 statt x der Ausdruck x^2 gesetzt, so kann x aus den Gl. 44 oder 45 ermittelt und dann die Integration vorgen werden. Ist $x^q = x^3$, so sind die sub I dargelegten Methoden anw Auch für $b^2 < 4ac$ können die Integrale nach der obigen Darstellu auch §. 13, Gl. 19 ff.) ohne Schwierigkeit ermittelt werden.

§. 20.

Integration von $\frac{x^q\,dx}{\omega^p}$ (Fortsetzung).

I. Während die Integration der im §. 19 behandelten Diffe ein gewisses Eingehen in die Individualität der einzelnen Fälle er kann das obige Differential für $q > n$ (vgl. oben S. 39) nach ei gemeinen Formel integriert werden.

Bezeichnet man (s. oben S. 39) mit gx^n das Glied von ω höchsten Potenz von x, ferner den Rest, welcher von ω nach dieses Gliedes verbleibt, mit R, so ist:

$$\omega = R + gx^n,$$
$$x^n = \frac{\omega - R}{g}.$$

Ist nun $x^n = x^q$, so braucht man nur den vorstehenden Wer Fundamentalgleichung:

$$\frac{x^q\,dx}{\omega^p} = dy$$

bstituieren, welche dann folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{(\omega - R)\,dx}{g\,\omega^p} = dy \qquad 4)$$

$$\frac{1}{g}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^{p-1}} - \frac{1}{g}\,Ds\,\frac{R\,dx}{\omega^p} = Ds\,dy\,. \qquad 5)$$

gegen $q > n$, so muss die Gl. 2 mit x^{q-n} multipliziert werden, f sie folgende Gestalt annimmt:

$$x^q = \frac{x^{q-n}\,\omega - R x^{q-n}}{g}, \qquad 6)$$

enn man diesen letzteren Ausdruck in die Gl. 3 substituiert, so ist:

$$\frac{1}{g}\,Ds\,\frac{x^{q-n}\,dx}{\omega^{p-1}} - \frac{1}{g}\,Ds\,\frac{R x^{q-n}\,dx}{\omega^p} = Ds\,dy\,. \qquad 7)$$

n beiden Formeln in den Gl. 5 und 7 kann jedes Differential von orm $\frac{x^q\,dx}{\omega^p}$ für $q \geqq n$ leicht integriert werden.

. Es sei z. B. die Gleichung

$$\frac{x^2\,dx}{a + bx + cx^2} = \frac{x^2\,dx}{\omega} = dy \qquad 10)$$

grieren, so ist zufolge Gl. 2:

$$x^2 = \frac{\omega - a - bx}{c}, \qquad 11)$$

i, wenn man diesen Wert in die Gl. 10 substituiert:

$$Ds\,\frac{dx}{c} - \frac{a}{c}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} - \frac{b}{c}\,Ds\,\frac{x\,dx}{\omega} = Ds\,dy\,. \qquad 12)$$

n man von den Differentialen links die Differentialsummen (vgl. lich §. 19, Gl. 9), so ist nach einigen leichten Operationen:

$$\frac{\overline{x}}{c} - \frac{b}{2c^2}\log\overline{\omega} + \left(\frac{b^2}{2c^2} - \frac{a}{c}\right) Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{x^2\,dx}{a + bx + cx^2}. \qquad 13)$$

I. Ist die Gleichung

$$\frac{x^3\,dx}{a + bx + cx^2} = \frac{x^3\,dx}{\omega} = dy \qquad 14)$$

grieren, so ist zufolge Gl. 6

$$x^3 = \frac{x\omega - ax - bx^2}{c}, \qquad 15)$$

an man diesen Ausdruck in die Gl. 14 substituiert, so ist:

$$Ds\,\frac{x\,dx}{c} - \frac{a}{c}\,Ds\,\frac{x\,dx}{\omega} - \frac{b}{c}\,Ds\,\frac{x^2\,dx}{\omega} = Ds\,\frac{x^3\,dx}{\omega}. \qquad 16)$$

Integration dieser Gleichung ist blos erforderlich, dass man für die

links angedeuteten Differentialsummen aus §. 19, Gl. 9 und aus der Gl. 13 die entsprechenden Werte substituiert und dann die erforderl Reduktionen vornimmt.

§. 21.

Integration von $\frac{dx}{x^m \omega^p}$.

I. In dieser Formel bedeutet ω ein Binom, Trinom oder Polyn der Form $a + bx + cx^2 + \cdots + gx^n$ (vgl. §. 19), m, n, p bedeuten positive Zahlen, endlich bezeichne ich mit r den Rest, welcher nach Abzug der Konstante a verbleibt.

Ist nun die Gleichung

$$\frac{dx}{x^m \omega^p} = dy$$

zu integrieren, so setze man

$$\omega = a + r,$$
$$a = \omega - r,$$

und führe dann in die obige Gl. 1 mit Rücksicht auf die Gl. 3 V und Konstanten ein, so dass sich also folgende zwei Gleichungen e

$$\frac{(\omega - r)\,dx}{\omega^p} = a\,dy,$$
$$\frac{dx}{\omega^{p-1}} - \frac{r\,dx}{\omega^p} = a\,dy.$$

Nimmt man nun die Differentialsummen und befreit man sodann der Konstante, so ist:

$$\frac{Ds\,\frac{dx}{\omega^{p-1}} - Ds\,\frac{r\,dx}{\omega^p}}{a} = \frac{1}{a}\,Ds\,\frac{dx}{\omega^{p-1}} - \frac{1}{a}\,Ds\,\frac{r\,dx}{\omega^p} = Ds\,\frac{dx}{x^m \omega^p}.$$

Nach dieser einfachen Formel können alle Differentiale von der $\frac{dx}{x^m \omega^p}$ integriert werden.

II. Ist z. B. die Gleichung:

$$\frac{dx}{x\,(a + bx)} = \frac{dx}{x\omega} = dy$$

zu integrieren und multipliziert man (Gl. 3) links mit $\omega - bx$, recht so ist:

$$\frac{(\omega - bx)\,dx}{x\omega} = a\,dy$$

oder

$$\frac{dx}{x} - \frac{b\,dx}{\omega} = a\,dy.$$

t man nun beiderseits die Differentialsummen, so ist (Neue Int.-Meth. 1, 213):

$$l\bar{x} - l\bar{\omega} = \log \frac{\bar{x}}{\bar{\omega}} = Ds\, a\, dy, \qquad 9)$$

enn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{a} \log \frac{\bar{x}}{\bar{\omega}} = Ds \frac{dx}{x(a + bx)}. \qquad 10)$$

I. Ist die Gleichung

$$\frac{dx}{x^2(a + bx)} = dy \qquad 11)$$

grieren, so verfährt man so wie in Gl. 7 und es ergiebt sich

$$Ds \frac{dx}{x^2} - b\, Ds \frac{dx}{x\omega} = Ds\, a\, dy. \qquad 12)$$

uiert man links den Wert der Differentialsummen mit Rücksicht ue Int.-Meth., Gl. 180 und auf die obige Gl. 10 und befreit man y von der Konstante, so ist:

$$-\frac{1}{a\bar{x}} - \frac{b}{a^2} \log \frac{\bar{x}}{\bar{\omega}} = Ds \frac{dx}{x^2(a + bx)}. \qquad 13)$$

I. Ist die Gleichung

$$\frac{dx}{x(a + bx^2)} = \frac{dx}{x\omega} = dy \qquad 14)$$

grieren, so ist mit Rücksicht auf die Relation $\omega - bx^2 = a$:

$$Ds \frac{dx}{x} - b\, Ds \frac{x\, dx}{\omega} = Ds\, a\, dy. \qquad 15)$$

n man nun mit Rücksicht auf die obige Gl. 8 und auf §. 19, Gl. 3 erentialsummen und befreit man sodann dy von der Konstante,

$$\frac{1}{2a} \log \frac{\bar{x}^2}{\bar{\omega}} = Ds \frac{dx}{x(a + bx^2)}. \qquad 16)$$

Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{x(a + bx + cx^2)} = \frac{dx}{x\omega} = dy \qquad 17)$$

rieren, so ist:

$$\frac{(\omega - bx - cx^2)\, dx}{x\omega} = a\, dy \qquad 18)$$

$$Ds \frac{dx}{x} - b\, Ds \frac{dx}{\omega} - c\, Ds \frac{x\, dx}{\omega} = Ds\, a\, dy. \qquad 19)$$

ert man nun den Wert der Differentialsummen (s. oben §. 19, die vorstehende Gleichung, so ist nach einigen leichten Re-n:

$$\frac{1}{2a} \log \frac{\bar{x}^2}{\bar{\omega}} - \frac{b}{2a}\, Ds \frac{dx}{\omega} = Ds \frac{dx}{x(a + bx + cx^2)}. \qquad 20)$$

VI. Ist die Gleichung

$$\frac{dx}{x^2(a+bx+cx^2)} = \frac{dx}{x^2\omega} = dy$$

zu integrieren, so ist (s. Gl. 18 und 19)

$$Ds\,\frac{dx}{x^2} - b\,Ds\,\frac{dx}{x\omega} - c\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,a\,dy.$$

Substituiert man in die vorstehende Gleichung die Werte der Dif
summen (s. für das zweite Glied oben Gl. 20), so ist nach ein
duktionen, wenn man dy von der Konstante befreit:

$$-\frac{1}{ax} - \frac{b}{2a^2}\log\frac{\bar{x}^2}{\bar{\omega}} + \frac{b^2-2ac}{2a^2}\,Ds\,\frac{dx}{\omega} = Ds\,\frac{dx}{x^2(a+bx+cx}$$

Auf ganz analoge Weise wie oben (Gl. 17—20) erhält man
schon in früheren Abschnitten mehrfach benützte Integral:

$$Ds\,\frac{dx}{x(a-bx+cx^2)} = \frac{1}{2a}\log\frac{\bar{x}^2}{\bar{\omega}} + \frac{b}{2a}\,Ds\,\frac{dx}{\omega}.$$

Dritte Abteilung.

Die goniometrischen Integrale.

§. 22.

Integration der einfachsten goniometrischen Differentiale

Die neuen Rechnungsmethoden gewähren die Möglichkeit, di
metrischen Differentiale direkt zu integrieren, während diese nach d
üblichen Methoden zum grossen Teile entweder durch die beliebt
kehrungen“ oder auf einem indirekten Wege gewonnen werden, ind
die goniometrischen Funktionen und Differentiale in algebraische A
verwandelt (z. B. durch die Gleichungen $\sin x = u$ oder $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = u$
hier treten durch die neuen Rechnungsmethoden an die Stel
überaus komplizierten Formelwerks einige wenige elementare Ha
die für den Kenner der neuen Rechnungsarten kaum einer näh
läuterung bedürfen.

I. Ist die Gleichung:

$$\cos x\,dx = dy$$

zu integrieren und numeralisiert man dieselbe, so ist:

$$1 + \cos x\,dx\,l\,d\beta = \overset{d\beta}{\nu}\,dy.$$

pliziert und dividiert man das Differential links mit $\sin x$, um das eitige Numeral auf die Form $1 + \frac{d\omega}{\omega}$ zu bringen (s. Neue Int.- S. 41, Gl. 221, 222; S. 44, Gl. 245, 246 ff.), so entsteht folgender uck:

$$1 + \frac{\sin x \cos x \, dx \, l d\beta}{\sin x} = \overset{d\beta}{\nu} dy, \qquad 3)$$

venn man $\sin x$ in die Potenz versetzt und sodann die Numeral- ung bildet, so ist:

$$\frac{d\beta^{\sin x}\left(1 + \frac{\cos x \, dx \, l d\beta}{\sin x}\right)^{\sin x}}{d\beta^{\sin x}} = \overset{d\beta}{\nu} dy. \qquad 4)$$

ithmalisiert man diese Gleichung, um den ursprünglichen Wert von lrzustellen, so nimmt sie folgende Gestalt an:

$$\sin x + \cos x \, dx - \sin x = dy. \qquad 5)$$

st aber:

$$\sin dx = dx, \qquad 6)$$

$$\cos dx = 1, \qquad 7)$$

lh:

$$n x + \cos x \, dx = \sin x \cos dx + \cos x \sin dx = \sin(x + dx), \qquad 8)$$

venn man den letzteren Ausdruck in die Gl. 5 substituiert, so er- sich die beiden Gleichungen:

$$\sin(x + dx) - \sin x = dy = \cos x \, dx, \qquad 9)$$

$$\sin \bar{x} = Ds \, dy = Ds \cos x \, dx. \qquad 10)$$

f. In ganz ähnlicher Weise wird die Gleichung:

$$\sin x \, dx = dy \qquad 11)$$

giert, nur dass Multiplikation und Division mit $\cos x$ stattfindet (s. n Gl. 3). Es ergiebt sich dann (vgl. Gl. 5):

$$\cos x + \sin x \, dx - \cos x = dx. \qquad 12)$$

fultipliziert man, um die Operation in der Gl. 14 zu ermöglichen, d dy mit -1 (Neue Int.-Meth. S. 35, 53), so ist:

$$\cos x - \sin x \, dx - \cos x = -dy. \qquad 13)$$

st aber mit Rücksicht auf die Gl. 6 und 7:

$$\text{os } x - \sin x \, dx = \cos x \cos dx - \sin x \sin dx = \cos(x + dx), \qquad 14)$$

lh, wenn man den letzteren Ausdruck in die Gl. 13 substituiert:

$$\cos(x + dx) - \cos x = -dy. \qquad 15)$$

rt man endlich dy von dem Minuszeichen, so ergeben sich die beiden ichungen:

$$-[\cos(x+dx)-\cos x]=dy,$$
$$-\cos\bar{x}=Ds\,dy=Ds\sin x\,dx.$$

III. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{\cos^2 x}=dy$$

zu integrieren, so ergeben sich folgende Umwandlungen, die na bisher Gesagten keiner weiteren Erläuterung bedürfen:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\cos^2 x}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy.$$

$$1+\frac{\sin x\,dx\,l\,d\beta}{\sin x\cos^2 x}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy.$$

$$\frac{d\beta^{\frac{\sin x}{\cos x}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\sin x\cos x}\right)^{\frac{\sin x}{\cos x}}}{d\beta^{\frac{\sin x}{\cos x}}}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy.$$

Da hier $\frac{\sin x}{\cos x}$ in die Potenz versetzt werden musste, so ist es not das links erscheinende Differentialbinomium in ein Trinom zu verw weil nur ein solches (s. unten Gl. 24) die Differentialsumme eines I ergiebt. Die Umwandlung in ein Trinom erfolgt hier wie in a Fällen dadurch, dass man mit Rücksicht auf die Relation $\sin^2 x+$ co Variable und Konstanten in die Gl. 21 einführt, folglich dx mit $\sin^2 x+$ dagegen dy mit 1 multipliziert. Die Gleichung erlangt dann folgen stalt:

$$\frac{d\beta^{\frac{\sin x}{\cos x}}\left(1+\frac{\cos x\,dx\,l\,d\beta}{\sin x}+\frac{\sin x\,dx\,l\,d\beta}{\cos x}\right)^{\frac{\sin x}{\cos x}}}{d\beta^{\frac{\sin x}{\cos x}}}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy.$$

Logarithmalisiert man diese Numeralgleichung, so ist:

$$\frac{\sin x}{\cos x}\left[1+\frac{\cos x\,dx}{\sin x}+\frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right]-\frac{\sin x}{\cos x}=dy.$$

Nun ist aber (s. Neue Int.-Meth. S. 47—49 und oben §. 17, Gl. 13 §. 18, Gl. 15 und 18):

$$\frac{\sin x}{\cos x}\left[1+\frac{\cos x\,dx}{\sin x}+\frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right]=\frac{\sin x}{\cos x}\cdot\frac{1+\frac{\cos x\,dx}{\sin x}}{1-\frac{\sin x\,dx}{\cos x}}=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}$$
$$=\frac{\sin(x+dx)}{\cos(x+dx)},$$

und es ergeben sich, wenn man diesen letzteren Ausdruck in die substituiert, folgende Relationen:

$$\frac{\sin(x+dx)}{\cos(x+dx)} - \frac{\sin x}{\cos x} = dy. \qquad 24)$$

$$\frac{\sin \bar{x}}{\cos \bar{x}} = \operatorname{tg} \bar{x} = Ds\, dy = Ds \frac{dx}{\cos^2 x}. \qquad 25)$$

so ist:

$$-\frac{\cos \bar{x}}{\sin \bar{x}} = -\cot \bar{x} = Ds \frac{dx}{\sin^2 x}, \qquad 26)$$

nur zu bemerken ist, dass bei Ableitung dieses Integrals mit $\cos x$ ultiplizieren (s. Gl. 20), $\frac{\cos x}{\sin x}$ in die Potenz zu versetzen (Gl. 21), h dx und dy mit -1 zu multiplizieren ist (s. oben Gl. 13).

V. Ist die Gleichung

$$\frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x} = dy \qquad 27)$$

egrieren, so ist die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\cos x}}\left(1+\frac{\sin x\, dx\, l d\beta}{\cos x}\right)^{\frac{1}{\cos x}}}{d\beta^{\frac{1}{\cos x}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy, \qquad 28)$$

enn man diese numeralisiert:

$$\frac{1}{\cos x}\left(1+\frac{\sin x\, dx}{\cos x}\right) - \frac{1}{\cos x} = dy. \qquad 29)$$

st aber (Neue Int.-Meth. Gl. 10 und oben Gl. 14):

$$\frac{1}{\cos x}\left(1+\frac{\sin x\, dx}{\cos x}\right) = \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{1-\frac{\sin x\, dx}{\cos x}} = \frac{1}{\cos(x+dx)} = \frac{1}{\cos \bar{x}}. \qquad 30)$$

stituiert man diesen letzten Wert in die Gl. 29, so ergeben sich die onen:

$$\frac{1}{\cos \bar{x}} - \frac{1}{\cos x} = dy, \qquad 31)$$

$$\frac{1}{\cos \bar{x}} = \sec \bar{x} = Ds\, dy = Ds \frac{\sin x\, dx}{\cos^2 x}. \qquad 32)$$

e ähnliche, jedoch in einzelnen Punkten (vgl. zu Gl. 26) abweichende rionen erhält man die Gleichung:

$$-\frac{1}{\sin \bar{x}} = -\operatorname{cosec} \bar{x} = Ds \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x}. \qquad 33)$$

Ist die Gleichung:

$$\operatorname{tg} x\, dx = \frac{\sin x\, dx}{\cos x} = dy \qquad 34)$$

ngrieren, so ist nach vollzogener Numeralisierung:

$$1+\frac{\sin x\, dx\, l d\beta}{\cos x} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy. \qquad 35)$$

Multipliziert man in dieser Gleichung dx und dy mit -1, so offenbar ein logarithmisches Integral vor (Neue Int.-Meth. S. 37 Es ist nämlich:

$$1 - \frac{\sin x\, dx\, l d\beta}{\cos x} = \left[\frac{\cos x - \sin x\, dx}{\cos x}\right]^{l d\beta} = \left[\frac{\cos(x + dx)}{\cos x}\right]^{l d\beta} = \overset{d\beta}{\nu} - dy$$

Logarithmalisiert man diese Gleichung und befreit man sodann dem Minuszeichen, so ergeben sich folgende Relationen:

$$-[\log\cos(x + dx) - \log x] = dy,$$

$$-\log\cos\bar{x} = Ds\, dy = Ds\,\mathrm{tg}\, x\, dx.$$

Ebenso ist:

$$Ds\cot x\, dx = Ds\frac{\cos x\, dx}{\sin x} = \log\sin\bar{x},$$

wobei nur zu bemerken ist, dass bei Ableitung dieses Integrals mit sicht auf Gl. 8 die Multiplikation mit -1 nicht notwendig ist.

VI. Ist die Gleichung:

$$\sec x\, dx = \frac{dx}{\cos x} = dy$$

zu integrieren, so multipliziere man, um die Einführung von Va und Konstanten zu ermöglichen, Zähler und Nenner des Differenti $\cos x$ und es ist dann:

$$\frac{\cos x\, dx}{1 - \sin^2 x} = dy.$$

Setzt man nun:

$$\omega = 1 - \sin^2 x,$$

$$\pi = 1 + \sin x,$$

$$\varrho = 1 - \sin x,$$

$$\pi + \varrho = 2,$$

$$\pi\varrho = \omega = 1 - \sin^2 x,$$

und führt man mit Rücksicht auf die Gleichung 45 Variable un stanten ein, so ist:

$$\frac{\cos x\, dx}{\pi} + \frac{\cos x\, dx}{\varrho} = 2\, dy.$$

Verfährt man nun mit dieser Gleichung genau so wie in den Int.-Meth. S. 54, Gl. 307 ff. angegeben ist, so ergiebt sich:

$$\left[\frac{\pi + \cos x\, dx}{\varrho - \cos x\, dx} : \frac{\pi}{\varrho}\right]^{l d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, 2\, dy.$$

Da $\pi + \cos x\, dx = \bar{\pi}$, $\varrho - \cos x\, dx = \bar{\varrho}$ ist, so ergeben sich, wen die vorstehende Gleichung logarithmalisiert und dy von der Ko befreit, folgende zwei Relationen:

$$\frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} - \frac{1}{2}\log\frac{\pi}{\varrho} = dy, \qquad 49)$$

$$\frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = \frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\bar{x}}{1-\sin\bar{x}} = \log\operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\bar{x}}{2}\right) = Ds\sec x\,dx = Ds\frac{dx}{\cos x}. \qquad 50)$$

VII. Ist die Gleichung

$$\operatorname{cosec} x\,dx = \frac{dx}{\sin x} = dy \qquad 51)$$

tegrieren, so ist wie sub VI vorzugehen. Man multipliziert Zähler Nenner des Differentials mit $\sin x$ und setzt dann:

$$\omega = 1 - \cos^2 x, \qquad 52)$$

$$\pi = 1 + \cos x, \qquad 53)$$

$$\varrho = 1 - \cos x, \qquad 54)$$

$$\pi + \varrho = 2, \qquad 55)$$

$$\pi\varrho = \omega = 1 - \cos^2 x, \qquad 56)$$

rhält, wenn man mit Rücksicht auf die Gl. 55 Variable und Kon- n einführt,

$$\frac{\sin x\,dx}{\pi} + \frac{\sin x\,dx}{\varrho} = 2\,dy. \qquad 57)$$

oliziert man nun diese Gleichung mit — 1 und verfährt so wie in l. 47—49 angegeben ist, so erhält man, wenn man schliesslich dy em Minuszeichen befreit:

$$-\frac{1}{2}\log\frac{\bar{\pi}}{\bar{\varrho}} = \log\sqrt{\frac{1-\cos\bar{x}}{1+\cos\bar{x}}} = \log\operatorname{tang}\frac{\bar{x}}{2} = Ds\,dy = Ds\frac{dx}{\sin x}. \qquad 58)$$

III. Von den cyclometrischen Integralen kommen hier nur die ogen-Integrale der Tangente in Betracht, weil diese in dem Ver- elieser Darstellung bei der Integration von zahlreichen algebraischen onen benutzt wurden.

an setze statt der Gleichung:

$$d\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x} \qquad 59)$$

licksicht auf die bekannte goniometrische Relation $\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$,

$$\frac{d\operatorname{tang} x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = d\operatorname{arc} x. \qquad 60)$$

immt man beiderseits die Differentialsumme, so ergiebt sich:

$$Ds\frac{d\operatorname{tang} x}{1+\operatorname{tang}^2 x} = \arctan\bar{x}. \qquad 61)$$

d Funktion $\operatorname{tang} x$ auf der Strecke von 0^0 bis 360^0 alle numerischen t von $+\infty$ bis $-\infty$ durchschreitet, so kann man im Allgemeinen $= x$ setzen, so dass sich dann ergiebt:

$$Ds \frac{dx}{1+x^2} = \arctan \bar{x}$$

oder allgemeiner:

$$Ds \frac{df(x)}{1+[f(x)]^2} = \arctan f(\bar{x}).$$

Auf ähnliche Weise können auch alle übrigen einfachen cyclome Differentialsummen abgeleitet werden.

§. 23.

Integration von $\sin^n x\,dx$ und $\cos^n x\,dx$.

I. Die Integration von $\sin^n x\,dx$ und $\cos^n x\,dx$ ist den oben und 18 dargestellten Integrationen sehr analog[1]). Ist nämlich die Gl

$$\sin^n x\,dx = dy$$

zu integrieren, so multipliziert man zunächst beiderseits mit n,

$$n \sin^n x\,dx = n\,dy.$$

Nun teilt man das linksseitige Differential, so dass die Gleichung Gestalt annimmt:

$$\sin^n x\,dx + (n-1)\sin^n x\,dx = n\,dy.$$

Setzt man ferner in dem zweiten Differential an die Stelle von si Ausdruck $\sin^{n-2} x(1-\cos^2 x)$, so ist:

$$\sin^n x\,dx - (n-1)\sin^{n-2} x\cos^2 x\,dx + (n-1)\sin^{n-2} x\,dx = n$$

Nimmt man nun von vorstehender Gleichung die Differentialsumme man zugleich zur Erleichterung der Operationen bei den zwei Differentialen die Zeichen wechselt, dann $\sin^{n-1} x\cos x$ aus de extrahiert und schliesslich dy von der Konstante befreit, so ergie folgende Integrationsformel:

$$-\frac{1}{n} Ds \sin^{n-1} x\cos x\left[\frac{(n-1)\cos x\,dx}{\sin x} - \frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right] + \frac{n-1}{n} Ds \sin^n$$
$$= Ds \sin^n x\,dx$$

Auf ganz ähnliche Weise erlangt man, ohne dass jedoch ein wechsel wie in der Gl. 5 erforderlich ist:

$$\frac{1}{n} Ds \cos^{n-1} x \sin x\left[-\frac{(n-1)\sin x\,dx}{\cos x} + \frac{\cos x\,dx}{\sin x}\right] + \frac{n-1}{n} Ds \cos^{n-2}$$
$$= Ds \cos^n x\,dx.$$

II. Ist z. B. die Gleichung:

$$\sin^2 x\,dx = dy$$

---

1) Die Exponenten m und n sind ebenso wie in allen folgenden Inte (§. 24–30) ganze, positive Zahlen.

tegrieren, so multipliziert man beiderseits mit $n = 2$ (Gl. 2) und iodann (Gl. 3) das Differential, also:

$$\sin^2 x\,dx + \sin^2 x\,dx = 2\,dy. \qquad 8)$$

ersetzt in dem zweiten Differential nunmehr (Gl. 4) $\sin^2 x$ durch $\cos^2 x$, also:

$$\sin^2 x\,dx - \cos^2 x\,dx + dx = 2\,dy. \qquad 9)$$

selt man nun bei den zwei ersten Differentialen die Zeichen und iert man $\sin^{n-1} x \cos x$, so ist zufolge N. Int-Meth. Gl. 70, 2, 270 ff.:

$$-Ds \sin x \cos x \left[\frac{\cos x\,dx}{\sin x} - \frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right] =$$

$$= -\sin x \left(1 + \frac{\cos x\,dx}{\sin x}\right) \cdot \cos x \left(1 - \frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right) =$$

$$= -\sin(x + dx)\cos(x + dx) = -\sin \bar{x} \cos \bar{x}. \qquad 10)$$

ist

$$Ds\,dx = \bar{x}. \qquad 11)$$

uiert man die Differentialsummen aus den Gl. 10 und 11 in die und befreit man dann dy von der Konstante, so ist:

$$-\frac{\sin \bar{x} \cos \bar{x}}{2} + \frac{\bar{x}}{2} = Ds \sin^2 x\,dx. \qquad 12)$$

I. Ist die Gleichung:

$$\sin^3 x\,dx = dy \qquad 13)$$

grieren, so ist, wenn man die im §. 17, Abs. III benutzten Abgen anwendet, mit Rücksicht auf die Gl. 5:

$$-\frac{1}{n} D's = -\frac{1}{3} Ds \sin^2 x \cos x \left[\frac{2\cos x\,dx}{\sin x} - \frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right] =$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^2 x \left(1 + \frac{2\cos x\,dx}{\sin x}\right) \cdot \cos x \left(1 - \frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3} (\sin^2 x + 2 \sin x \cos x\,dx)(\cos x - \sin x\,dx) =$$

$$= -\frac{1}{3} (\sin x + \cos x\,dx)^2 (\cos x - \sin x\,dx) =$$

$$= -\frac{1}{3} \sin^2 \bar{x} \cos \bar{x}. \qquad 14)$$

$$\frac{n-1}{n} D''s = \frac{2}{3} Ds \sin x\,dx = (\text{§. 22, Gl. 17}) - \frac{2}{3} \cos \bar{x}. \qquad 15)$$

iert man die beiden vorstehenden Differentialsummen in die Gl. 5, gibt sich:

$$-\frac{\cos \bar{x}}{3} (\sin^2 \bar{x} + 2) = Ds \sin^3 x\,dx. \qquad 16)$$

§. 24.

Integration von $\frac{dx}{\sin^n x}$ und $\frac{dx}{\cos^n x}$.

I. Ganz analog der im §. 23 gegebenen Entwicklung ist d
gration der Gleichung:

$$\frac{dx}{\sin^n x} = dy\,.$$

Man multipliziert beiderseits mit $n-1$ und führt sodann mit R
auf die Relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Variable und Konstanten ei

$$\frac{(n-1)\,dx}{\sin^{n-2} x} + \frac{(n-1)\cos^2 x\,dx}{\sin^n x} = (n-1)\,dy\,.$$

Man teilt nunmehr das erste Differential in der bekannten We
extrahiert aus den beiden ersten Gliedern $\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}$, so dass also

$$\frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}\left[\frac{\sin x\,dx}{\cos x} + \frac{(n-1)\cos x\,dx}{\sin x}\right] + \frac{(n-2)\,dx}{\sin^{n-2} x} = (n-1)\,d$$

Nimmt man nun die Differentialsumme, indem man zugleich, u
Bildung zu ermöglichen (s. z. B. unten Gl. 7) bei dem ersten A
die Zeichen wechselt und befreit man zum Schluss dy von de
stanten, so ist:

$$-\frac{1}{n-1} Ds \frac{\cos x}{\sin^{n-1} x}\left[-\frac{\sin x\,dx}{\cos x} - \frac{(n-1)\cos x\,dx}{\sin x}\right] + \frac{n-2}{n-1} Ds \frac{d}{\sin^{n}}$$

$$= Ds \frac{dx}{\sin^n x}\,.$$

Ebenso ergiebt sich, ohne dass jedoch bei dieser Formel ein
wechsel notwendig ist:

$$\frac{1}{n-1} Ds \frac{\sin x}{\cos^{n-1} x}\left[\frac{\cos x\,dx}{\sin x} + \frac{(n-1)\sin x\,dx}{\cos x}\right] + \frac{n-2}{n-1} Ds \frac{dx}{\cos^{n-2}}$$

$$= Ds \frac{dx}{\cos^n x}\,.$$

II. Ist z. B. die Gleichung.

$$\frac{dx}{\sin^3 x} = dy$$

zu integrieren (s. oben §. 22, Gl. 58, 26) und benützt man wieder
§. 17, Abs. III enthaltenen Abkürzungen, so ist (s. oben §. 22,

$$-\frac{1}{n-1} D's = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x}{\sin^2 x}\cdot\frac{1-\frac{\sin x\,dx}{\cos x}}{1+\frac{2\cos x\,dx}{\sin x}} = -\frac{\cos x - \sin x\,dx}{2(\sin^2 x + 2\sin x\cos x}$$

$$= -\frac{\cos(x+dx)}{2(\sin x + \cos x\,dx)^2} = -\frac{\cos \bar{x}}{2\sin^2 \bar{x}}\,.$$

$$\frac{n-2}{n-1} D''s = \frac{1}{2} Ds \frac{dx}{\sin x} = (\S.\ 22,\ \text{Gl. } 58)\ \frac{1}{2} \log \text{tang} \frac{\bar{x}}{2}. \qquad 8)$$

ituiert man die beiden Differentialsummen aus den Gl. 7 und 8 in 'ormel der Gl. 4, so ist:

$$-\frac{\cos \bar{x}}{2 \sin^2 \bar{x}} + \frac{1}{2} \log \text{tang} \frac{\bar{x}}{2} = Ds \frac{dx}{\sin^3 x}. \qquad 9)$$

II. Ist die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sin^4 x} = dy \qquad 10)$$

itegrieren, so ist:

$$\frac{1}{3-1} D's = -\frac{\cos x}{3 \sin^3 x} \cdot \frac{1 - \frac{\sin x\, dx}{\cos x}}{1 + \frac{3 \cos x\, dx}{\sin x}} = -\frac{\cos x - \sin x\, dx}{3 (\sin^3 x + 3 \sin^2 x \cos x\, dx)} =$$

$$= -\frac{\cos \bar{x}}{3 \sin^3 \bar{x}}. \qquad 11)$$

$$\frac{n-2}{n-1} D''s = \frac{2}{3} Ds \frac{dx}{\sin^2 x} = (\S.\ 22,\ \text{Gl. } 26) - \frac{2}{3} \cot \bar{x}, \qquad 12)$$

$$-\frac{\cos \bar{x}}{3 \sin^3 \bar{x}} - \frac{2}{3} \cot \bar{x} = Ds \frac{dx}{\sin^4 \bar{x}}. \qquad 13)$$

§. 25.

Integration von $\sin^m x \cos^n x\, dx$.

ei der vorstehenden Integration ist zu unterscheiden, ob sowohl m ıch n oder doch wenigstens einer dieser Exponenten ungerade b beide gerade sind.

Sind beide Exponenten oder doch wenigstens einer derselben un-, ist z. B. die Gleichung:

$$\sin^3 x \cos^2 x\, dx = dy \qquad 1)$$

ıegrieren, so verwandle man das Bogendifferential in ein Cosinus-ıntial, ferner die Sinusfunktion in eine Cosinusfunktion, also:

$$\sin^2 x \cos^2 x\, d \cos x = -dy. \qquad 2)$$

$$(1 - \cos^2 x) \cos^2 x\, d \cos x = -dy. \qquad 3)$$

$$\cos^2 x\, d \cos x - \cos^4 x\, d \cos x = -dy. \qquad 4)$$

ı man nun von der letzten Gleichung beiderseits die Differential- ın und befreit sodann dy von dem Minuszeichen, so ist:

$$\frac{\cos^5 \bar{x}}{5} - \frac{\cos^3 \bar{x}}{3} = Ds \sin^3 x \cos^2 x\, dx. \qquad 5)$$

n einer der beiden Exponenten m und n ungerade, der andere ge- (ie z. B. in dem obigen Falle), so ist jedenfalls das Bogendifferential

in das Differential jener Funktion zu verwandeln, welche den g
Exponenten besitzt (im obigen Beispiel $\cos^2 x$). Ist sowohl m als
ungerade und beide gleich gross, so kann man diese Operation n
lieben rücksichtlich der einen oder der anderen Funktion vor
Sind die beiden ungeraden Exponenten nicht gleich gross, so mu
der Einfachheit wegen das Bogendifferential in das Differentia
Funktion verwandeln, welche den höheren Exponenten besitzt.

Ist z. B. die Gleichung:

$$\sin^7 x \cos^5 x\, dx = dy$$

zu integrieren, so ergeben sich folgende Gleichungen, die nach d
sagten keiner weiteren Erläuterung bedürfen:

$$\sin^7 x \cos^4 x\, d \sin x = dy.$$

$$\sin^7 x\, (1 - \sin^2 x)^2\, d \sin x = dy.$$

$$\sin^7 x\, d \sin x - 2 \sin^9 x\, d \sin x + \sin^{11} x\, d \sin x = dy.$$

$$\frac{\sin^8 x}{8} - \frac{\sin^{10} x}{5} + \frac{\sin^{12} x}{12} = Ds \sin^7 x \cos^5 x\, dx.$$

Es ist leicht ersichtlich, wie ungleich einfacher dieses Integral (
noch reduziert werden kann) ist als die Integrale, welche die In
tafeln (z. B. jene von Meier Hirsch S. 271) aufweisen.

II. Sind die beiden Exponenten m und n gerade, so ist die
thode nicht anwendbar. In diesem Falle gelten die nachstehenden
Formeln:

a) $Ds \sin^m x \cos^n x\, dx = Ds\,(1 - \cos^2 x) \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx =$

$$= Ds \sin^{m-2} x \cos^n x\, dx - Ds \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x$$

b) $Ds \sin^m x \cos^n x\, dx = Ds\,(1 - \sin^2 x) \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx =$

$$= Ds \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx - Ds \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x$$

Ist z. B. die Gleichung:

$$\sin^2 x \cos^2 x\, dx = dy$$

zu integrieren, so ergiebt sich mit Rücksicht auf die Integralfor
Gl. 12 folgender Ausdruck:

$$Ds \sin^2 x\, dx - Ds \sin^4 x\, dx = Ds \sin^2 x \cos^2 x\, dx.$$

Die Differentialsummen links sind aus den im §. 23 entwickelten F
leicht zu ermitteln.

Ist die Gleichung:

$$\sin^4 x \cos^2 x\, dx = dy$$

egrieren, so wird gleichfalls die Integrationsformel in Gl. 12 mit
l gewählt und es ist dann:

$$Ds \sin^4 x\,dx - Ds \sin^6 x\,dx = Ds\,dy, \qquad 16)$$

r Ausdruck nach §. 23 leicht integriert werden kann. Die An-
ng der Integrationsformel 11 würde auf die Gleichung führen:

$$Ds \sin^2 x \cos^2 x\,dx - Ds \sin^2 x \cos^4 x\,dx = Ds\,dy, \qquad 17)$$

r Ausdruck nur dann vorzuziehen ist, wenn die links erscheinenden
ntialsummen bereits bekannt sind.

§. 26.

Integration von $\frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x}$, $\frac{\cos^m x\,dx}{\sin^n x}$, $\frac{dx}{\sin^m x \cos^n x}$.

Die Integrale von der Form $Ds\frac{\sin^m x\,dx}{\cos^n x}$ und $\frac{\cos^m x\,dx}{\sin^n x}$ sind ent-
Ur-Integrale, sofern der Zähler die Funktion nur in der ersten
r enthält (z. B. $\frac{\sin x\,dx}{\cos x}$, $\frac{\cos x\,dx}{\sin^3 x}$ u. s. f.) oder abgeleitete Integrale,
er Zähler $\sin^2 x$, $\cos^2 x$ oder eine noch höhere Potenz dieser Funk-
aufweist.

n den Differentialen der ersten Art kann die Differentialsumme
Numeralisierung und Logarithmalisierung leicht gefunden werden,
nan das Bogendifferential des Zählers in das Differential der
unktion verwandelt. So ist z. B. (vgl. auch oben §. 22, Gl. 34
32, 33):

$$Ds \frac{\sin x\,dx}{\cos^3 x} = -Ds \frac{d\cos x}{\cos^3 x} = (\text{N. I. Gl. 195}) \frac{1}{2\cos^2 x}. \qquad 1)$$

ä dagegen der Zähler die Funktion mindestens in zweiter Potenz,
n folgende Formeln:

$$\frac{dx}{x} = Ds \frac{(1-\cos^2 x)\sin^{m-2} x\,dx}{\cos^n x} = Ds \frac{\sin^{m-2} x\,dx}{\cos^n x} - Ds \frac{\sin^{m-2} x\,dx}{\cos^{n-2} x}. \qquad 2)$$

$$\frac{dx}{x} = Ds \frac{(1-\sin^2 x)\cos^{m-2} x\,dx}{\sin^n x} = Ds \frac{\cos^{m-2} x\,dx}{\sin^n x} - Ds \frac{\cos^{m-2} x\,dx}{\sin^{n-2} x}. \qquad 3)$$

s z. B. die Gleichung:

$$\frac{\sin^2 x\,dx}{\cos x} = dy \qquad 4)$$

terieren, so erhält man durch die Substitution von $1 - \cos^2 x$ für
:

$$\frac{dx}{\cos x} - \cos x\,dx = dy, \qquad 5)$$

welche Gleichung durch Substitution der oben (§. 22, Gl. 50, 10) abg
Dfferentialsummen leicht integriert werden kann.

Durch eine analoge Substitution verwandelt sich die Gleich

$$\frac{\cos^3 x\, dx}{\sin^2 x} = dy$$

in die Relation

$$Ds\, \frac{\cos x\, dx}{\sin^2 x} - Ds \cos x\, dx = Ds\, dy,$$

welche aus §. 22, Gl. 33, 10 integriert werden kann.

II. Das dritte in der Überschrift angegebene Integral kan
folgende Formel integriert werden:

$$Ds\, \frac{dx}{\sin^m x \cos^n x} = Ds\, \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)\, dx}{\sin^m x \cos^n x} =$$

$$= Ds\, \frac{dx}{\sin^{m-2} x \cos^n x} + Ds\, \frac{dx}{\sin^m x \cos^{n-2} x}$$

So verwandelt sich die Gleichung:

$$\frac{dx}{\sin x \cos x} = dy$$

durch die in der Gl. 8 angegebene Substitution in den Ausdruc

$$\frac{\sin x\, dx}{\cos x} + \frac{\cos x\, dx}{\sin x} = dy$$

oder mit Rücksicht auf §. 22, Gl. 38, 39:

$$- \log \cos \bar{x} + \log \sin \bar{x} = \log \frac{\sin \bar{x}}{\cos \bar{x}} = \log \operatorname{tang} \bar{x} = Ds\, \frac{dx}{\sin x \cos}$$

In ähnlicher Weise können alle in der Überschrift bezeichneten
successive ohne Schwierigkeit ermittelt werden.

§. 27.

Integration von $\operatorname{tg}^n x\, dx$.

I. Das Integral $Ds \operatorname{tg} x\, dx$ ist ein Ur-Integral, welches sch
(§. 22, Gl. 34—38) entwickelt worden ist. Die Ableitung aller
Integrale von der Form $\operatorname{tg}^n x\, dx$ erfolgt, obgleich sie wie alle abg
Integrale auch direkt durch Numeralisierung und Logarithma
gewonnen werden können, am einfachsten durch die Methode d
differentiale (oben §. 4).

Wenn die Gleichung:

$$\operatorname{tg}^n x\, dx = dy$$

zu integrieren ist, so ist $\operatorname{tg}^{n-2} x\, dx$ zuzuzählen und abzuziehen,

$$\operatorname{tg}^n x\, dx + \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx - \operatorname{tg}^{n-2} x\, dx = dy.$$

etze nun, um die Differentialsumme der beiden ersten Differentiale
itteln,

$$\operatorname{tg}^{n-2} x\,dx + \operatorname{tg}^{n} x\,dx = dz. \qquad 3)$$

eser Gleichung können durch Operationen, deren Bedeutung schon
iheren Fällen bekannt ist, folgende Relationen gewonnen werden:

$$(n-1)\operatorname{tg}^{n-2} x\,dx + (n-1)\operatorname{tg}^{n} x\,dx = (n-1)\,dz, \qquad 4)$$

$$\frac{1}{n-1} Ds \operatorname{tg}^{n-1} x\left[\frac{(n-1)\,dx}{\operatorname{tg} x} + (n-1)\operatorname{tg} x\,dx\right] = Ds\,dz. \qquad 5)$$

uiert man diese letztere Differentialsumme in die Gl. 2, so ist:

$$\frac{1}{n-1} Ds \operatorname{tg}^{n-1} x\left[\frac{(n-1)\,dx}{\operatorname{tg} x} + (n-1)\operatorname{tg} x\,dx\right] - Ds \operatorname{tg}^{n-2} x\,dx =$$

$$= Ds \operatorname{tg}^{n} x\,dx. \qquad 6)$$

Ist z. B.

$$\operatorname{tg}^{2} x\,dx = dy \qquad 7)$$

trieren, so ist $\operatorname{tg}^{n-2} x = 1$, $n-1=1$, ferner $\operatorname{tg} dx = dx$ (vgl.
l. 6) und es ergiebt sich daher (s. oben §. 22, Gl. 24):

$$\bar{s} = Ds \operatorname{tg} x\left[\frac{dx}{\operatorname{tg} x} + \operatorname{tg} x\,dx\right] = \operatorname{tg} x \cdot \frac{1 + \frac{dx}{\operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x\,dx} =$$

$$= \operatorname{tg} x \cdot \frac{1 + \frac{\operatorname{tg} dx}{\operatorname{tg} x}}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} dx} = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} dx}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} dx} = \operatorname{tg}(x + dx) = \operatorname{tg} \bar{x}, \qquad 8)$$

$$-D'\bar{s} = -Ds\,dx = -\bar{x}, \qquad 9)$$

n man die Differentialsummen aus den Gl. 8 und 9 in die Formel 6
ert:

$$\operatorname{tg} \bar{x} - \bar{x} = Ds \operatorname{tg}^{2} x\,dx. \qquad 10)$$

Ist die Gleichung:

$$\operatorname{tg}^{3} x\,dx = dy \qquad 11)$$

ieren, so ist (Gl. 6):

$$\bar{s} = \frac{1}{2} Ds \operatorname{tg}^{2} x\left[\frac{2\,dx}{\operatorname{tg} x} + 2 \operatorname{tg} x\,dx\right] = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{2} x \cdot \frac{1 + \frac{2 \operatorname{tg} dx}{\operatorname{tg} x}}{1 - 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} dx} =$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\operatorname{tg}^{2} x + 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} dx}{1 - 2 \operatorname{tg} x \operatorname{tg} dx} = \frac{1}{2} \frac{(\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} dx)^{2}}{(1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} dx)^{2}} = \frac{1}{2} \operatorname{tg}^{2} \bar{x}. \qquad 12)$$

$$-D'\bar{s} = -Ds \operatorname{tg} x\,dx = (\text{§. 22, Gl. 38}) \log \cos \bar{x}. \qquad 13)$$

ert man die beiden Differentialsummen aus den Gl. 12 und 13
rmel der Gl. 6, so ist:

$$\frac{1}{2} \operatorname{tg}^{2} \bar{x} + \log \cos \bar{x} = Ds \operatorname{tg}^{3} x\,dx. \qquad 14)$$

§. 28.

Integration von $x^m \sin x\,dx$ und $x^m \cos x\,dx$.

I. Auch die Gleichung:

$$x^m \sin x\,dx = dy$$

kann nur durch Hilfsdifferentiale integriert werden. Bei Anw
dieser Methode ergeben sich folgende Relationen, die keiner w
Erläuterung bedürfen:

$$x^m\,d\cos x = -\,dy,$$

$$x^m\,d\cos x + \cos x\,dx^m - \cos x\,dx^m = -\,dy.$$

$$Ds\,x^m \cos x\left[\frac{d\cos x}{\cos x} + \frac{dx^m}{x^m}\right] - m\,Ds\,x^{m-1}\cos x\,dx = -\,Ds\,d$$

Nun ist aber (vgl. §. 23, Gl. 10):

$$Ds\,x^m \cos x\left[\frac{d\cos x}{\cos x} + \frac{dx^m}{x^m}\right] = x^m\left(1 + \frac{dx^m}{x^m}\right)\cdot\cos x\left(1 + \frac{d\cos x}{\cos x}\right)$$

$$= (x^m + dx^m)(\cos x + d\cos x) = \bar{x}^m \cos$$

folglich, wenn man diesen letzteren Wert in die Gl. 4 substituie

$$-\,\bar{x}^m \cos\bar{x} + m\,Ds\,x^{m-1}\cos x\,dx = Ds\,dy = Ds\,x^m \sin x\,d$$

Ebenso ist:

$$\bar{x}^m \sin\bar{x} - m\,Ds\,x^{m-1}\sin x\,dx = Ds\,x^m \cos x\,dx.$$

II. Ist z. B. die Gleichung:

$$x \sin x\,dx = dy$$

zu integrieren, so ist:

$$x\,d\cos x + \cos x\,dx - \cos x\,dx = -\,dy.$$

Nun ist aber zufolge Gl. 3—5:

$$Ds[x\,d\cos x + \cos x\,dx] = \bar{x}\cos\bar{x},$$

$$Ds - \cos x\,dx = -\sin\bar{x}.$$

Substituiert man die beiden Differentialsummen aus den Gl. 10
in die Gl. 9 und befreit man sodann dy von dem Minuszeichen,

$$\sin\bar{x} - \bar{x}\cos\bar{x} = Ds\,dy = Ds\,x\sin x\,dx.$$

II. Ist die Gleichung:

$$x\cos x\,dx = dy$$

zu integrieren, so ergiebt sich zufolge Gl. 7:

$$D's = \bar{x}\sin\bar{x},$$

$$-\,m\,D''s = -\,Ds\sin x\,dx = \cos\bar{x},$$

folglich

$$\bar{x}\sin\bar{x} + \cos\bar{x} = Ds\,x\cos x\,dx.$$

V. Ist die Gleichung:

$$x^2 \sin x\,dx = dy \qquad 17)$$

egrieren, so ist (Gl. 6):

$$-D's = -\bar{x}^2 \cos \bar{x}. \qquad 18)$$

$$m\,D''s = 2\,Ds\,x \cos x\,dx = (\text{Gl. } 16)\ 2\,\bar{x} \sin \bar{x} + 2 \cos \bar{x}. \qquad 19)$$

:uiert man die beiden Differentialsummen aus den Gl. 18 und 19 Formel der Gl. 6, so ist:

$$-\bar{x}^2 \cos \bar{x} + 2\,\bar{x} \sin \bar{x} + 2 \cos \bar{x} = Ds\,x^2 \sin x\,dx. \qquad 20)$$

§. 29.

Integration von $\frac{\sin x\,dx}{x^n}$ und $\frac{\cos x\,dx}{x^n}$.

Wenn die Gleichung:

$$\frac{\sin x\,dx}{x^n} = dy \qquad 1)$$

;rieren ist, so multipliziert man dieselbe mit $n-1$ und fügt dann fsdifferential $\frac{\cos x\,dx}{x^{n-1}}$ hinzu, also:

$$\frac{(n-1)\sin x\,dx}{x^n} - \frac{\cos x\,dx}{x^{n-1}} + \frac{\cos x\,dx}{x^{n-1}} = (n-1)\,dy. \qquad 2)$$

ert man nun aus den beiden ersten Differentialen in der bekannten $\frac{\sin x}{x^{n-1}}$, indem man zugleich bei Bildung der ersten Differentialsumme ien wechselt und schliesslich dy von den Konstanten befreit, so ist:

$$\frac{1}{n-1} Ds \frac{\sin x}{x^{n-1}} \left[\frac{\cos x\,dx}{\sin x} - \frac{(n-1)\,dx}{x}\right] + \frac{1}{n-1} Ds \frac{\cos x\,dx}{x^{n-1}} = Ds \frac{\sin x\,dx}{x^n}. \qquad 3)$$

o st:

$$\frac{1}{n-1} Ds \frac{\cos x}{x^{n-1}} \left[-\frac{\sin x\,dx}{\cos x} - \frac{(n-1)\,dx}{x}\right] - \frac{1}{n-1} Ds \frac{\sin x\,dx}{x^{n-1}} = Ds \frac{\cos x\,dx}{x^n}. \qquad 4)$$

· st z. B. (wenn man von dem in geschlossener Form nicht inte- ırı Ausdruck $\frac{\sin x\,dx}{x}$ absieht) die Gleichung:

$$\frac{\sin x\,dx}{x^2} = dy \qquad 5)$$

gieren, so ist zufolge Gl. 3 (vgl. oben §. 22, Gl. 24):

$$-\frac{1}{n-1}D's = -Ds\frac{\sin x}{x}\left[\frac{\cos x\,dx}{\sin x} - \frac{dx}{x}\right] = -\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1+\frac{\cos x\,dx}{\sin x}}{1+\frac{dx}{x}} = -$$

$$\frac{1}{n-1}D''s = Ds\frac{\cos x\,dx}{x},$$

folglich, wenn man die Differentialsummen aus den Gl. 6 und Gl. 3 subsituiert:

$$-\frac{\sin\bar{x}}{\bar{x}} + Ds\frac{\cos x\,dx}{x} = Ds\frac{\sin x\,dx}{x^2}.$$

III. Ist die Gleichung:

$$\frac{\sin x\,dx}{x^3} = dy$$

zu integrieren, so ist:

$$-\frac{1}{n-1}D's = -\frac{1}{2}Ds\frac{\sin x}{x^2}\left[\frac{\cos x\,dx}{\sin x} - \frac{2\,dx}{x}\right] = -\frac{1}{2}\frac{\sin x}{x^2}\cdot\frac{1+\frac{co}{}}{1+}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{\sin x + \cos x\,dx}{x^2 + 2x\,dx} = -\frac{\sin\bar{x}}{2\bar{x}^2},$$

$$\frac{1}{n-1}D''s = \frac{1}{2}Ds\frac{\cos x\,dx}{x^2} = (\text{Gl. 4}) - \frac{\cos\bar{x}}{2\bar{x}} - \frac{1}{2}Ds\frac{\sin x\,d}{x}$$

folglich:

$$-\frac{\sin\bar{x}}{2\bar{x}^2} - \frac{\cos\bar{x}}{2\bar{x}} - \frac{1}{2}Ds\frac{\sin x\,dx}{x} = Ds\frac{\sin x\,dx}{x^3}.$$

Ich bemerke, dass der Wert für $D''s$ in der Gl. 11 sich aus der in der Gl. 4 leicht berechnen lässt.

§. 30.

Integration von $\frac{x\,dx}{\sin^n x}$ und $\frac{x\,dx}{\cos^n x}$.

I. Ist die Gleichung

$$\frac{x\,dx}{\sin^n x} = dy$$

zu integrieren, so multipliziert man beiderseits mit $n-1$ und f dann mit Rücksicht auf die Relation $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ Varia Konstanten ein, so dass die Gl. 1 folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{(n-1)x\,dx}{\sin^{n-2}x} + \frac{(n-1)x\cos^2 x\,dx}{\sin^n x} = (n-1)\,dy.$$

Man teilt nunmehr das erste Differential wie in zahlreichen frühere und multipliziert die ganze Gleichung mit -1, um die Bildung d Differentialsumme in der Gl. 5 zu ermöglichen, also:

$$-\frac{x\,dx}{\sin^{n-2}x} - \frac{(n-1)x\cos^2 x\,dx}{\sin^n x} - \frac{(n-2)x\,dx}{\sin^{n-2}x} = -(n-1)($$

us den beiden ersten Differentialen die Differentialsumme $\frac{\bar{x}\cos\bar{x}}{\sin^{n-1}\bar{x}}$ zu können, ist, wie sich sofort ergeben wird, die Hinzufügung des ifferentials $\frac{\cos x\,dx}{\sin^{n-1}x}$ notwendig, so dass also die Gl. 3 lautet:

$$\frac{x\,dx}{\sin^{n-1}x} - \frac{x\,dx}{\sin^{n-2}x} - \frac{(n-1)\,x\cos^2 x\,dx}{\sin^n x} - \frac{(n-2)\,x\,dx}{\sin^{n-2}x} - \frac{\cos x\,dx}{\sin^{n-1}x} =$$

$$= -(n-1)\,dy. \qquad 4)$$

man nun beiderseits die Differentialsumme, indem man gleich- dy von $-(n-1)$ befreit, so ist:

$$Ds\,\frac{x\cos x}{\sin^{n-1}x}\left[\frac{dx}{x} - \frac{\sin x\,dx}{\cos x} - \frac{(n-1)\cos x\,dx}{\sin x}\right] + \frac{n-2}{n-1}\,Ds\,\frac{x\,dx}{\sin^{n-2}x} +$$

$$+ \frac{1}{n-1}\,Ds\,\frac{\cos x\,dx}{\sin^{n-1}x} = Ds\,\frac{x\,dx}{\sin^n x}. \qquad 5)$$

findet man in analoger Weise:

$$s\,\frac{x\sin x}{\cos^{n-1}x}\left[\frac{dx}{x} + \frac{\cos x\,dx}{\sin x} + \frac{(n-1)\sin x\,dx}{\cos x}\right] +$$

$$+ \frac{n-2}{n-1}\,Ds\,\frac{x\,dx}{\cos^{n-2}x} - \frac{1}{n-1}\,Ds\,\frac{\sin x\,dx}{\cos^{n-1}x} = Ds\,\frac{x\,dx}{\cos^n x}. \qquad 6)$$

Ist z. B., wenn man von dem in geschlossener Form nicht inte- en Differential $\frac{x\,dx}{\sin x}$ absieht, die Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{\sin^2 x} = dy \qquad 7)$$

grieren, so ist zufolge Gl. 5 (vgl. oben §. 22, Gl. 10, 24):

$$D's = -\,Ds\,\frac{x\cos x}{\sin x}\left[\frac{dx}{x} - \frac{\sin x\,dx}{\cos x} - \frac{\cos x\,dx}{\sin x}\right] =$$

$$= -\,\frac{x\left(1+\frac{dx}{x}\right)\cdot\cos\left(1-\frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right)}{\sin x\left(1+\frac{\cos x\,dx}{\sin x}\right)} = -\,\frac{\bar{x}\cos\bar{x}}{\sin\bar{x}} = -\,\bar{x}\cot\bar{x}. \qquad 8)$$

$$\frac{n-2}{n-1}\,D's = 0. \qquad 9)$$

$$D''s = Ds\,\frac{\cos x\,dx}{\sin x} = Ds\cot x\,dx = (\text{§. 22, Gl. 39})\,\log\sin\bar{x}. \qquad 10)$$

ert man die Differentialsummen aus den Gl. 8—10 in die Gl. 5,

$$-\,\bar{x}\cot\bar{x} + \log\sin\bar{x} = Ds\,\frac{x\,dx}{\sin^2 x}. \qquad 11)$$

Ist die Gleichung:

$$\frac{x\,dx}{\sin^3 x} = dy \qquad 12)$$

ieren, so ist (Gl. 5):

$$-\frac{1}{n-1}D's = -\frac{1}{2}Ds\frac{x\cos x}{\sin^2 x}\left[\frac{dx}{x} - \frac{\sin x\,dx}{\cos x} - \frac{2\cos x\,dx}{\sin x}\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{x\left(1+\frac{dx}{x}\right)\cdot\cos x\left(1-\frac{\sin x\,dx}{\cos x}\right)}{\sin^2 x\left(1+\frac{2\cos x\,dx}{\sin x}\right)}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{(x+dx)(\cos x - \sin x\,dx)}{\sin^2 x + 2\sin x\cos x\,dx} = -\frac{\bar{x}\cos\bar{x}}{2\sin^2\bar{x}}.$$

$$\frac{n-2}{n-1}D''s = \frac{1}{2}Ds\frac{x\,dx}{\sin x}.$$

$$\frac{1}{n-1}D''s = \frac{1}{2}Ds\frac{\cos x\,dx}{\sin^2 x} = (\text{§. 22, Gl. 33}) - \frac{1}{2\sin\bar{x}}.$$

Substituiert man die Differentialsummen aus den Gl. 13—15 in di
so ist:

$$-\frac{\bar{x}\cos\bar{x}+\sin\bar{x}}{2\sin^2\bar{x}} + \frac{1}{2}Ds\frac{x\,dx}{\sin x} = Ds\frac{x\,dx}{\sin^3 x}.$$

Mit dieser Ableitung mag die vorliegende Abhandlung gesch
werden. Wer meiner Darstellung in dieser und den zwei vorherge
Schriften aufmerksam gefolgt ist, wird jene Integrationsformeln,
ich hier nicht entwickelt habe, ohne Schwierigkeit auffinden könn

Neue Integrationsmethoden

auf Grund der

Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung.

Von

Dr. Julius Bergbohm.

Stuttgart.
Selbstverlag des Verfassers.
1892.

Druck von Carl Hammer in Stuttgart.

Inhalt.

		Seite
1.	Allgemeiner Charakter der heutigen Integralrechnung . . .	1
2.	Das Differentialbinomium	3
3.	Erweiterung der Logarithmalrechnung	8
4.	Erweiterung der Numeralrechnung	12
5.	Praktische Regeln für die Anwendung der Logarithmal- und Numeralrechnung	14
6.	Die Integralgleichung und die Differentialsumme	17
7.	Differentiation von x^m	19
8.	Integration von $mx^{m-1}dx$	21
9.	Integration von $(a+bx)^m dx$	27
10.	Differentiation und Integration der Exponentialfunktion . .	29
11.	Differentiation und Integration der gebrochenen Funktionen .	32
§12.	Logarithmische Integrale	37
§13.	Irrationale Integrale	40
§14.	Differentialsummen mit negativen Differentialen	51
§15.	Grundzüge der neuen Integrationsmethode	55

...e Integrationsmethoden auf Grund der Potenzial-, Logarithmal- und Numeralrechnung.[1])

§ 1.

...llgemeiner Charakter der heutigen Integralrechnung.

Von den beiden grossen Gebieten der Analysis des Unendlichen hat ...nur die Differentialrechnung eine streng wissenschaftliche Ausbildung ...rt, während die Integralrechnung unverkennbar noch heute einen ...sten Wissenschaft und blosser Empirie schwankenden Charakter an ...trägt. Denn die Differentiale werden durch allgemein gültige Metho... ...us den ursprünglichen Funktionen abgeleitet; deshalb kann auch in ...r einzelnen Falle entweder die Differentiation wirklich vollzogen werden ...mer bei allen veränderlichen Funktionen), oder es steht wie bei den Kon...nten fest, dass diese Operation unmöglich ist. Zwar besteht über die ...er Ableitung der Differentiale zwischen den Mathematikern seit zwei ...rhundderten ein wichtiger Streit, indem die älteren Analytiker, mit Leibniz ...an Spitze, die Weglassung der Differentiale höherer Ordnung für zulässig ...chten, während die Anhänger der Grenztheorie seit Cauchy diese Ver...hlässigung als der mathematischen Strenge widersprechend verwerfen, ...selbe jedoch gleichwohl auf einem Umwege und in verhüllterer Form ...in Anwendung bringen.[2]) Aber darüber besteht trotz dieser Gegensätze

---

[1]) Ich habe die in der Überschrift bezeichneten Rechnungsmethoden, dann die ...Numeral- und Immensalrechnung in meiner Schrift: „Neue Rechnungsmethoden der ...höheren Mathematik, 1891“ (welche ich in dieser Abhandlung abgekürzt mit N. R. ...zitiere) in ihren Grundzügen dargestellt. Das Büchlein, welches nicht in den Buch...handel gekommen ist, steht Freunden der Mathematik auf ihren dem Verfasser (Wien, ...Postamt 81, poste restante) geäusserten Wunsch unentgeltlich zur Verfügung.

[2]) Ich habe in dieser Abhandlung wie auch in meiner früheren Schrift (Note 1) ...die Differentiale höherer Ordnung mit den älteren Analytikern ohne Bedenken vernach...lässigt. Dass die Differentiale höherer Ordnung nicht nur weggelassen werden *können* ...oder sogar weggelassen werden *müssen*, wenn anders die Differentialrechnung ihrer ...Aufgabe genügen soll, werde ich in einer späteren Schrift nachweisen. Nur dieser ...strenge Nachweis entspricht den Anforderungen des rigor mathematicus.

zwischen den Mathematikern kein Streit, dass die Differentiale a veränderlichen Funktionen auf streng methodischem Wege abgeleit den müssen und dass eine blos empirische Auffindung derselben wissenschaftlichen Wert haben würde.

Ganz anders verhält es sich mit der Integralrechnung. All Integrationsmethoden, wie sie für die Differentiation seit langen Differentialrechnung ausgebildet worden sind, bestehen überhaup so dass in betreff der Differentiale, deren Integration bisher no gelungen ist, in der Regel niemand mit Bestimmtheit sagen kann, selben durch einen geschlossenen Ausdruck integriert werden könn nicht. Die Gründe für diesen unbefriedigenden Zustand sind gewi blos in einer einzigen Richtung zu suchen. Die Hauptursache best ohne Zweifel darin, dass es bisher an allgemeinen Methoden fehlt, Integrale unmittelbar aus den Differentialen durch Rechnung ab Die Fundamentalformeln der Integralrechnung werden vielmehr durch „Umkehrung“ der entsprechenden Differentialformeln gewon bei den verwickelteren Integralen ist das Bestreben im wesentliche gerichtet, dieselben durch allerlei methodische Hilfsmittel auf j fachsten Integralformeln zurückzuführen. Nun weiss aber jederm unsicher die Resultate sind, welche auf anderen Gebieten der Ma durch solche „Umkehrungen“ gewonnen werden. So ist, um nur kannteste Beispiel zu erwähnen, $y \times y = y^2$; aber es wäre ga durch „Umkehrung“ dieser Formel zu schliessen, dass immer $\sqrt{y^2}$ ist, weil y^2 zwei Wurzeln, nämlich $+y$ und $-y$ besitzt. Wer b dafür, dass die „Umkehrung“ der Differentialformeln nicht ebenso hafte Resultate liefert? Kurz, solange die Integrale nicht au methodischem Wege unmittelbar aus den Differentialen abgeleitet muss man den Resultaten der Integralrechnung jene unbedingte G und Notwendigkeit bestreiten, welche seit jeher den schönsten Ru der mathematischen Erkenntnisse bildet.

Ich versuche es nun in der nachfolgenden Darstellung, mit von mir erfundenen Rechnungsmethoden (Note 1) die ein Integrale aus den betreffenden Differentialen gerade so durch I zu bestimmen, wie diese letzteren ihrerseits aus den veränderlich tionen abgeleitet werden. Der Hauptzweck dieser Abhandlung allerdings darin, den Mechanismus meiner neuen Rechnungsmetho ständig klar zu legen, weil man mir mit Recht entgegengehalten dieselben in meiner ersten Schrift (Note 1) viel zu abstrakt u Rücksicht auf ihre praktische Anwendung dargestellt worden sin ich hoffe, dass die vorliegenden Untersuchungen auch für die rechnung nicht ohne Nutzen sein werden. Denn es wird durch ei

ung der Integrale, welche ihr allmähliges Entstehen aus den Diffe-
len veranschaulicht, nicht nur ihre oft so bizarre Form vollständig
nd verständlich gemacht, sondern die Berechnung der Integrale ist
als der erste Schritt zu einer allgemeinen Integrationsmethode zu
hten, welche den Bearbeitern der Integralrechnung ohne Zweifel als
s Ziel ihrer Bestrebungen vorschweben muss. Dieses Ziel kann aber
lann als erreicht gelten, wenn die Integrationsmethoden so vervoll-
net sind, dass bei jedem Differential, welches der Integration in
geschlossenen Ausdruck überhaupt fähig ist, diese Operation wirklich
gen, bei jedem Differential dagegen, welches die Integration in einem
ossenen Ausdruck nicht zulässt, der Grund dieser Unmöglichkeit klar
nt werden kann. Erst dann wird sich die Integralrechnung in Be-
g auf ihre wissenschaftliche Durchbildung der Differentialrechnung
Seite stellen können.

Bevor ich nun daran gehe, durch Berechnung der Integrale aus den
ntialen den ersten Schritt auf dieser Bahn zu versuchen, ist es un-
ich, die in meiner Schrift: „Neue Rechnungsmethoden der höheren
matik“ gegebene Darstellung in einigen Punkten zu ergänzen, um
chnungen, welche zur Auffindung der Integrale aus den Differentialen
, teils zu erleichtern, teils zu ermöglichen.

§ 2.

Das Differentialbinomium.

Unter einem Differentialbinomium verstehe ich einen Ausdruck von
rm $p \pm q\,dx$, in welchem p und q beliebige endliche (variable oder
nte) Grössen bedeuten. Da das Differentialbinomium durch die Di-
mit p sehr leicht auf die Form $p\left(1 \pm \frac{q}{p}\,dx\right)$ oder einfacher auf
rm $p(1 \pm q'\,dx)$ gebracht werden kann, so werde ich den Ausdruck
qx als das Differentialbinomium in einem vorzüglichen Sinn, den Aus-
k $1 \pm p\,dx \pm q\,dx$ als das Differentialpolynom bezeichnen.

ch habe nun schon in meiner Schrift „Neue Rechnungsmethoden der
n Mathematik“ (S. 14 ff.) die Operationen dargestellt, welche sich
bi, wenn das Differentialbinomium zu einer unendlich grossen oder
ie Potenz erhoben wird. An diese Darstellung mögen sich nun zur
icterung der unten folgenden Integrationsoperationen noch die nach-
en Formeln anschliessen. Sie sind insgesamt in der Weise ent-
d, dass die betreffenden Operationen (Multiplikation, Division u. s. f.)
d o wie bei endlichen Grössen vollzogen und nur die Differentiale

höherer Ordnung weggelassen werden. Blos in Betreff der irra
Differentialbinomien (Gl. 13—20) ist zu bemerken, dass zufol
Gleichungen 22—24 jeder endliche Exponent des Differentialbi
(welcher bei den unten dargestellten irrationalen Differentionalb
immer $= \frac{1}{2}$ ist) in dieses letztere als Faktor des Differentials
werden kann.

a) Multiplikation von zwei Differentialbinomien.

Hier ergeben sich folgende Formeln:

$$(1 + pdx) \cdot (1 + qdx) = 1 + pdx + qdx \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(1 + pdx) \cdot (1 - qdx) = 1 + pdx - qdx \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(1 - pdx) \cdot (1 + qdx) = 1 - pdx + qdx \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$(1 - pdx) \cdot (1 - qdx) = 1 - pdx - qdx \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wenn also zwei Differentialbinomien miteinander multipliziert
sollen, so ist das Produkt gleich dem Multiplikanden, welchem da
rential des Multiplikators mit unverändertem Zeichen anzuhän
Umgekehrt können aus den Gleichungen 1—4, wenn ein Differentialp
von der Form $1 \pm pdx \pm qdx$ vorliegt, sehr leicht die entspre
Faktoren ermittelt werden.

b) Division eines Differentialbinomiums durch ein ande

In diesem Falle sind folgende Formeln von Wichtigkeit:

$$\frac{1 + pdx}{1 + qdx} = 1 + pdx - qdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{1 + pdx}{1 - qdx} = 1 + pdx + qdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{1 - pdx}{1 + qdx} = 1 - pdx - qdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\frac{1 - pdx}{1 - qdx} = 1 - pdx + qdx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wenn also ein Differentialbinomium durch ein anderes dividie
so ist der Quotient gleich dem Zählerbinomium, welchem das Diff
des Nennerbinomiums mit verändertem Zeichen angehängt wird
gekehrt kann, wenn ein Differentialpolynom von der Form $1 \pm pdx$
vorliegt, auf Grund der Gleichungen 5—8 sehr leicht der betr
Bruch gefunden werden. Diese letztere Operation ist, wie sic
(Gl. 277, 310) ergeben wird, für die neue Integrationsmethode von
Bedeutung.

. Division der Einheit durch ein Differentialbinomium.

Hier ergeben sich folgende zwei Grundformeln:

$$\frac{1}{1+qdx} = 1-qdx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

$$\frac{1}{1-qdx} = 1+qdx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

ird also die Einheit durch ein Differentialbinomium dividiert, so ist otient gleich dem Nennerbinomium mit verändertem Verbindungs-. Dieser Satz ist für die neue Integrationsmethode deshalb von r Bedeutung, weil durch denselben ermöglicht wird, jederzeit ein nzialbinomium aus dem Zähler in den Nenner zu versetzen und um- (z. B. Gl. 168, 169, 301, 302).

Z den vorstehenden Gleichungen mögen noch zwei andere hinzuge- rden, werden, welche von mir später gleichfalls öfter (z. B. Gl. 177, uzuwenden sein werden, nämlich:

$$\frac{1}{+qdx} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1+\frac{qdx}{p}} = (\text{Gl. 9})\ \frac{1}{p}\left(1-\frac{qdx}{p}\right) = \frac{1}{p}-\frac{qdx}{p^2} = \frac{p-qdx}{p^2} \quad \ldots \quad (11)$$

$$\frac{1}{-qdx} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{1-\frac{qdx}{p}} = (\text{Gl. 10})\ \frac{1}{p}\left(1+\frac{qdx}{p}\right) = \frac{1}{p}+\frac{qdx}{p^2} = \frac{p+qdx}{p^2} \quad \ldots \quad (12)$$

d). Irrationale Differentialbinomien.

Hier will ich aus der grossen Fülle von Formeln nur die folgenden chten Fälle (vergl. unten § 13) wählen:

$$\sqrt{1\pm qdx} = (1\pm qdx)^{\frac{1}{2}} = (\text{Gl. 23})\ 1\pm\frac{1}{2}qdx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm qdx}} = (\text{Gl. 13})\ \frac{1}{1\pm\frac{1}{2}qdx} = (\text{Gl. 9, 10})\ 1\mp\frac{1}{2}qdx \quad \ldots \quad (14)$$

$$\sqrt{\pm 2qdx} = 1\pm qdx\ (\text{s. Gl. 13}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

$$\frac{1}{\sqrt{\pm 2qdx}} = \frac{1}{1\pm qdx} = 1\mp qdx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16)$$

$$\sqrt{p \pm q\,dx} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{q\,dx}{p}} = \sqrt{p}\left(1 \pm \frac{q\,dx}{2p}\right) =$$

$$\sqrt{p} \pm \frac{\sqrt{p}\,q\,dx}{2p} = \sqrt{p} \pm \frac{q\,dx}{2\sqrt{p}} = \frac{2p \pm q\,dx}{2\sqrt{p}} \quad .$$

$$\frac{1}{\sqrt{p \pm q\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{q\,dx}{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{q\,dx}{2p}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\left(1 \mp \frac{q\,dx}{2p}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \mp \frac{q\,dx}{2p\sqrt{p}} = \frac{2p \mp q\,dx}{2p\sqrt{p}} \quad .$$

$$\sqrt{p \pm 2q\,dx} = \sqrt{p} \cdot \sqrt{1 \pm \frac{2q\,dx}{p}} = \sqrt{p}\left(1 \pm \frac{q\,dx}{p}\right) =$$

$$\sqrt{p} \pm \frac{\sqrt{p}\,q\,dx}{p} = \sqrt{p} \pm \frac{q\,dx}{\sqrt{p}} = \frac{p \pm q\,dx}{\sqrt{p}} \quad .$$

$$\frac{1}{\sqrt{p \pm 2q\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 \pm \frac{2q\,dx}{p}}} = \frac{1}{\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{1 \pm \frac{q\,dx}{p}} =$$

$$\frac{1}{\sqrt{p}}\left(1 \mp \frac{q\,dx}{p}\right) = \frac{1}{\sqrt{p}} \mp \frac{q\,dx}{p\sqrt{p}} = \frac{p \mp q\,dx}{p\sqrt{p}} \quad .$$

e). Erhebung des Differentialbinomiums zu einer endlichen P

Die Erhebung des Differentialbinomiums zu einer unendlich
oder kleinen Potenz ist, wie bereits oben bemerkt wurde, schon in
„Neuen Rechnungsmethoden" dargestellt worden. Der Binomial
seiner Anwendung auf die Differentiale und auf die Immensale kan
auch auf den Fall ausgedehnt werden, wenn das Differentialbinom
einer endlichen Potenz erhoben werden soll. Drückt man dies
in der mathematischen Zeichensprache aus, so ist zu untersuchen,
Wert der Ausdruck $\left[1 + df(x)\right]^n$ besitzt, in welchem $df(x)$ ein be
Differential, n dagegen eine endliche (variable oder konstante)
bedeutet.

Nun ist aber:

$$\left[1 + df(x)\right]^n = 1 + n\,df(x) + \frac{n(n-1)}{1.2}\,df(x)^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}\,df(x)^3 + \ldots \quad .$$

Da in der vorstehenden Reihe das dritte und die folgenden Glieder
winden, weil sie Differentiale höherer Ordnung enthalten, so gilt die
ung:

$$\left[1 + df(x)\right]^n = 1 + n\,df(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (22)$$

Setzt man in diese Gleichung $df(x) = dx$, so entsteht der einfachere
uck:

$$(1 + dx)^n = 1 + n\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (23)$$

Da nun, wie ich in meiner früheren Schrift (N. R. § 10) nachgewiesen
auch $l d\beta$ eine endliche Grösse ist, so ist auch:

$$(1 + dx)^{l d\beta} = 1 + dx\, l d\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (24)$$

zu bemerken ist, dass der Ausdruck rechts ($= d\beta^{dx}$) das einfachste
ial (N. R. § 4, Gl. 2) darstellt.

Aus diesen Gleichungen (22—24) ergibt sich nun der für die neue
ationsmethode überaus wichtige Satz, dass man in einem Differential-
um die endlichen Faktoren des Differentials in Exponenten des
iums verwandeln kann und dass man umgekehrt die endlichen Ex-
ten eines Differentialbinomiums jederzeit als Faktoren in das
ntial des Binoms versetzen kann. Von diesem Grundsatz ist schon
bei Entwicklung der irrationalen Differentialbinomien (Gl. 13—20)
rläufiger Gebrauch gemacht worden.

Erhebung der Differentiale und Immensale zu endlichen Potenzen.

Ebenso wie das Differentialbinomium, so kann auch jedes blosse Dif-
nal oder Immensal zu einer endlichen Potenz erhoben werden,
d ich in meinen „Neuen Rechnungsmethoden“ nur den Fall ins Auge
s habe, dass ein Differential oder Immensal zu einer unendlichen
erhoben wird. Wenn wir mit n eine endliche (variable oder kon-
Grösse bezeichnen, so ist also:

$$\overset{n}{\pi}(dx) = dx^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (25)$$

$$\overset{n}{\pi}\left(\frac{1}{dx}\right) = \left(\frac{1}{dx}\right)^n = \frac{1}{dx^n} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (26)$$

Durch die Erhebung zu einer endlichen Potenz wird das Differential
nmensal niemals in eine endliche Grösse verwandelt. Die Ausdrücke
d $\frac{1}{dx^n}$ können, so viel ich sehe, nicht mehr auf eine einfachere
m gebracht werden.

Diese Ausdehnung der Potenzialrechnung auf die endlichen
nenten ist für die neue Integrationsmethode von grösster Wichtigke
die zu integrierenden Differentiale in der Regel teils aus endliche
aus unendlich kleinen Grössen bestehen, so dass die neuen Rec
methoden nur dann angewendet werden können, wenn sie sich sov
die endlichen als auch auf die unendlichen Quantitäten beziehen.
muss, wie sich sofort ergeben wird, auch bei der Logarithmal- u
meralrechnung eine ähnliche Erweiterung stattfinden.

§ 3.

Erweiterung der Logarithmalrechnung.

Die in meiner Schrift „Neue Rechnungsmethoden der höhe
thematik“ gegebene Darstellung bedarf, um sie für die neuen Integ
methoden brauchbar zu machen, in dreifacher Richtung einer Erg
1) Aus dem soeben (§ 2) angegebenen Grund sind auch hier die L
male der endlichen Grössen zu ermitteln. 2) Es sind die L
male mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ festzustellen, während ich mich in meine
wähnten Schrift auf die Basis $d\beta$ beschränkt habe, weil die erste
Integration der Differentiale, welche negative Differentialsummen e
erheblich erleichtern (vergl. unten § 14). 3). Es sind die Logar
der Differenzialpolynome von der Form $1 \pm pdx \pm qdx$ (Gl. 1—
zufinden.

a). Ausdehnung der Logarithmalrechnung auf endliche Gr

(Vergl. N. R. § 10.)

Die allgemeine Formel für das Logarithmal endlicher Grösse

$$\overset{d\beta}{\lambda} x = \frac{lx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Demgemäss werden sich als einfache Consequenz der vorst
Gleichung folgende Formeln ergeben:

$$\overset{d\beta}{\lambda} xy = \frac{lx + ly}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{d\beta}{\lambda} \frac{x}{y} = \frac{lx - ly}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{d\beta}{\lambda} x^n = \frac{nlx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (30)$$

$$\overset{d\beta}{\lambda} a^x = \frac{xla}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (31)$$

Eine eigentümliche Stellung nehmen in mancher Richtung die Logarithmale von a^{bdx} ein, weil der Ausdruck a^{bdx} das Differentialbinomium $abdx$ liefert. Es ist nun, wenn man diesen Ausdruck logarithmalisiert und numeralisiert (s. unten Gl. 61, 62):

$$\overset{d\beta}{\lambda}(a^{bdx}) = \frac{la^{bdx}}{ld\beta} = \frac{labdx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (32)$$

$$\overset{d\beta}{\nu} \frac{labdx}{ld\beta} = d\beta^{\frac{labdx}{ld\beta}} = 1 + \frac{labdx}{ld\beta} \cdot ld\beta =$$

$$\text{(N. R. § 11, Gl. 6)}\ 1 + labdx = a^{bdx} \quad . \quad . \quad (33)$$

Umgekehrt, wenn man zuerst numeralisiert und dann logarithmalisiert:

$$= \text{(Gl. 32, 33)}\ \overset{d\beta}{\nu}(1 + labdx) = d\beta^{1+labdx} = d\beta^{(1+labdxld\beta)} \quad (34)$$

$$(1 + labdxld\beta) = \overset{d\beta}{\lambda} d\beta + \overset{d\beta}{\lambda}(1 + labdxld\beta) = 1 + labdx = a^{bdx} \quad (35)$$

b). Logarithmale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$.

Ich habe in meinen „Neuen Rechnungsmethoden“ blos die Logarithmale mit der Basis $d\beta$ entwickelt. Zur Integration mancher Differentiale jedoch, wie bereits oben bemerkt wurde, auch die Ableitung der wichtigen Logarithmale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ erforderlich.

Die Grundgleichung für das Logarithmal von dx mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ ist (vergl. N. R. § 10, Gl. 1 und 7):

$$\left(\frac{1}{d\beta}\right)^{\lambda dx} = dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (36)$$

Wenn man von dieser Gleichung den natürlichen Logarithmus nimmt:

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda} dx = -\frac{ldx}{ld\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (37)$$

Auf ganz ähnliche Weise gelangt man noch zu folgenden For
(vergl. N. R. § 10, Gl. 8 ff.):

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{dx}\right) = \frac{l dx}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(a\,dx) = -\frac{l(a\,dx)}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\frac{1}{a\,dx} = \frac{l(a\,dx)}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 + a\,dx) = -\frac{a\,dx}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 - a\,dx) = \frac{a\,dx}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 + dx\,l\,dx) = -\frac{dx\,l\,dx}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\,dx^{dx} = dx\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\,dx = -\frac{dx\,l\,dx}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}(1 - dx\,l\,dx) = \frac{dx\,l\,dx}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{dx}\right)^{dx} = dx\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{dx}\right) = \frac{dx\,l\,dx}{l d\beta} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\left(\frac{1}{d\beta}\right) = 1 \text{ (vgl. N. R. § 10, Gl. 19)} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\,1 = 0 \text{ (vgl. N. R. § 10, Gl. 20)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Aus diesen Formeln ergibt sich, dass im allgemeinen das Logari
mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ gleich ist dem Logarithmal mit der Basis $d\beta$, j
mit verändertem Zeichen. Demgemäss werden auch die oben (

31) entwickelten Logarithmale der endlichen Grössen folgende Gestalt hmen:

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, x = -\frac{lx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (49)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, xy = -\frac{lx+ly}{ld\beta} = \frac{-lx-ly}{ld\beta} \quad \ldots\ldots \quad (50)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, \frac{x}{y} = -\frac{lx-ly}{ld\beta} = \frac{ly-lx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots \quad (51)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, x^n = -\frac{nlx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (52)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\lambda}\, a^x = -\frac{xla}{ld\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (53)$$

c). Logarithmale der Differentialpolynome.

Auch die Differentialpolynome können logarithmalisiert werden. Ich ränke mich der Kürze wegen auf die Differentialpolynome von der m $1 \pm pdx \pm qdx$, welche oben in der Gl. 1—8 vorgekommen sind. ii nun:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\,(1 \pm pdx \pm qdx) = \overset{d\beta}{\lambda}\,\big[1 \pm dx(p \pm q)\big] = \frac{\pm pdx \pm qdx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots \quad (54)$$

$$\overset{l\beta}{\lambda}\,(1 \pm pdx\,ld\beta \pm qdx\,ld\beta) = \pm pdx \pm qdx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (55)$$

$$\overset{\frac{1}{l\beta}}{\lambda}\,(1 \pm pdx \pm qdx) = -\frac{\pm pdx \pm qdx}{ld\beta} = \frac{\mp pdx \mp qdx}{ld\beta} \quad \ldots\ldots \quad (56)$$

$$\overset{\overline{\beta}}{\lambda}\,(1 \pm pdx\,ld\beta \pm qdx\,ld\beta) = -\big[\pm pdx \pm qdx\big] = \mp pdx \mp qdx \ldots \quad (57)$$

ie Logarithmalisierung der Differentialpolynome ist also jener der rtialbinome (N. R. § 10, Gl. 14 und 16 und oben Gl. 41 und 42) völlig

§ 4.

Erweiterung der Numeralrechnung.

Die in meinen „Neuen Rechnungsmethoden“ gegebene Darst
der Numeralrechnung (N. R. § 11) ist, um dieselbe zur Anwendun
die Integralrechnung brauchbar zu machen, in denselben drei Punkte
die Logarithmalrechnung (oben § 3) zu ergänzen.

a) Ausdehnung der Numeralrechnung auf die endlichen Grö

Da die Differentiale zu endlichen Potenzen erhoben werden k
(s. oben Gl. 25), so ist auch die Numeralisierung einer endlichen
möglich. Die allgemeine Formel für eine solche Numeralisierung ist,
man mit n eine endliche (variable oder konstante) Grösse bezeichne

$$\overset{d\beta}{\nu}\, n = d\beta^n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Setzt man nun $n = x^m$ oder $= a^x$, so verwandelt sich
Gleichung in folgende Ausdrücke:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, x^m = d\beta^{x^m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{d\beta}{\nu}\, a^x = d\beta^{a^x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisierung und Numeralisierung sind auch in Betre
endlichen Grössen, geradeso wie in Ansehung der Differentiale und I
sale (N. R. S. 24), entgegengesetzte Operationen, die sich gegenseiti
heben. Es ist also:

$$\overset{d\beta\, d\beta}{\lambda\ \nu}\, dx = dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{d\beta\, d\beta}{\lambda\ \nu}\, n = n \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Thatsächlich haben wir oben (Gl. 32—35) gesehen, dass die
rithmalisierung und Numeralisierung, wenn sie in Ansehung des näm
Ausdruckes, gleichviel in welcher Reihenfolge, vorgenommen werden,
wieder den ursprünglichen Wert ergeben.

b). Numerale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$.

Die einfache Umkehrung der in den Gleichungen 37—53 angeführten
rithmale mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ ergiebt die betreffenden Numerale mit der
ichen Basis, welche übrigens sehr leicht durch die in meinen „Neuen
nungsmethoden“ dargestellten Operationen verifiziert werden können.
folgende Numeralformeln mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ sind wegen ihrer prak-
en Wichtigkeit besonders hervorzuheben:

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, dx = 1 - dx\, l d\beta \quad \ldots \quad (63)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, (a\, dx) = 1 - a\, dx\, l d\beta \quad \ldots \quad (64)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, (1 + a\, dx) = \left(\frac{1}{d\beta}\right)^{1 + a\, dx} = \frac{1}{d\beta} \cdot \left(\frac{1}{d\beta}\right)^{a\, dx} = \text{(Gl. 64)}\ \frac{1}{d\beta} \cdot (1 - a\, dx\, l d\beta) = \frac{1 - a\, dx\, l d\beta}{d\beta} \quad \ldots \quad (65)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, (1 - a\, dx) = \frac{1}{d\beta}^{1 - a\, dx} = \frac{1}{d\beta} : \left(\frac{1}{d\beta}\right)^{a\, dx} = \text{(Gl. 64)}\ \frac{1}{d\beta} : (1 - a\, dx\, l d\beta) = \frac{1}{d\beta\, (1 - a\, dx\, l d\beta)} \quad \ldots \quad (66)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, x = \left(\frac{1}{d\beta}\right)^{x} = \frac{1}{d\beta^{x}} \quad \ldots \quad (67)$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, 1 = \frac{1}{d\beta} \quad \ldots \quad (68)$$

c). Numerale der Doppeldifferentiale.

ntsprechend den oben (Gl. 54—57) entwickelten Logarithmalen er-
n ich folgende Numeralgleichungen:

$$\frac{\pm p\, dx \pm q\, dx}{l d\beta} = 1 \pm p\, dx \pm q\, dx \quad \ldots \quad (69)$$

$$\overset{d\beta}{\nu}(\pm p dx \pm q dx) = 1 \pm p dx l d\beta \pm q dx l d\beta \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\frac{\pm p dx \pm q dx}{l d\beta} = 1 - [\pm p dx \pm q dx] = 1 \mp p dx \mp q dx \quad . \quad . \quad .$$

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}(\pm p dx \pm q dx) = 1 - [\pm p dx l d\beta \pm q dx l d\beta] =$$

$$1 \mp p dx l d\beta \mp q dx l d\beta \quad . \quad . \quad . \quad .$$

§ 5.

Praktische Regeln für die Anwendung der Logarithmal- und Numeralrechnung.

Durch die Potenzial-, Radikal-, Logarithmal- und Numeralrec wird den Differentialen eine Transformabilität verliehen, welche mitte bisher bekannten Methoden entfernt nicht erreicht werden konnte u sogar die Umgestaltungsfähigkeit der endlichen Grössen weit üb Zahlreiche Probleme, welche bisher unlösbare Schwierigkeiten boten, durch die neuen Rechnungsmethoden mit Leichtigkeit gelöst werde will hier nur jene Punkte ins Auge fassen, welche sich unmittelb die von mir behandelte Aufgabe beziehen.

Was zuvörderst die Logarithmalisierung betrifft, so wird dieselbe, ähnlich wie bei den Logarithmen endlicher Grössen, jede nungsoperation in die nächstniedrigere verwandelt, also die Multipl und die Division in eine Addition und in eine Subtraktion, die Potenz und die Radizierung in eine Multiplikation und in eine Division werden später bei der Integration des Differentials $mx^{m-1}dx$ (s. Gl. 106) sehen, dass man nach einigen Operationen zu der sogen Numeralgleichung gelangt, welche folgende Gestalt besitzt:

$$\frac{d\beta^{x^m}\left(1 + \frac{m dx l d\beta}{x}\right)^{x^m}}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu} dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Will man nun den ursprünglichen Wert dieser Gleichung wied stellen (s. z. B. unten Gl. 95, 106), so muss dieselbe auf beiden logarithmalisiert werden, was folgendes Resultat ergiebt:

$$x^m \overset{d\beta}{\lambda} d\beta + x^m \overset{d\beta}{\lambda} \left(1 + \frac{m dx l d\beta}{x}\right) - x^m \overset{d\beta}{\lambda} d\beta = \overset{d\beta\, d\beta}{\lambda\ \nu} dy \quad . \quad . \quad (74)$$

Nun ist aber $\overset{d\beta}{\lambda} d\beta = 1$ (N. R. § 10, Gl. 19), ferner:

$$\overset{d\beta}{\lambda}\left(1 + \frac{m dx l d\beta}{x}\right) = \frac{m dx l d\beta}{x l d\beta} = \frac{m dx}{x} \text{ (N. R. § 10, Gl. 14),}$$

ich ist $\overset{d\beta\, d\beta}{\lambda\ \nu} dy = dy$, weil sich Logarithmalisierung und Numerali-ng gegenseitig aufheben (oben Gl. 61, 62), so dass die Gleichung 73 erfolgter Logarithmalisierung folgende Gestalt hat:

$$x^m + x^m \cdot \frac{m dx}{x} - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (75)$$

Durch die Logarithmalisierung der Gleichung 73 wurde also, wie sich em vorstehenden Ausdruck ergiebt, der Exponent x^m überall in einen r, das im Zähler erscheinende Produkt in eine Summe, der Nenner en Subtrahenden verwandelt.

Die Numeralisierung hat, wie sich aus ihrer Natur als umge-Rechnungsoperation von selbst ergiebt, in Vergleich mit der Loga-ılisierung gerade die entgegengesetzten Wirkungen.

Die Numeralisierung verwandelt also zuvörderst jede Addition in eine likation, jede Subtraktion in eine Division. So lautet bekanntlich r Differentiation von x^m die Fundamentalgleichung:

$$(x + dx)^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (76)$$

Nimmt man nun von dieser Gleichung das Numeral, so entsteht fol-Ausdruck:

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}(x + dx)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (77)$$

n der Gleichung 77 ist die Numeralisierung in Betreff des Subtra-x^m bereits vollzogen (s. oben Gl. 59), demgemäss ist auch das al des Subtrahenden in einen Divisor verwandelt. Die Numeralisie-

$(x + dx)^m$ ist dagegen noch unentwickelt und demgemäss in den natischen Verhältnissen der einzelnen Bestandteile dieses Ausdrucks g (s. Gl. 79) noch keine Änderung vorgenommen.

urch die Numeralisierung eines Produkts wird aber zweitens auch , dass sich derjenige Faktor desselben, auf welchen sich die Nume-

ralisierung nicht bezieht, in einen Exponenten verwandelt. So k
die obige Gleichung 77, weil

$$(x+dx)^m = x^m\left(1+\frac{dx}{x}\right)^m = \text{(Gl. 22)}\ x^m\left(1+\frac{mdx}{x}\right)$$

ist, auch so schreiben:

$$\frac{{}^{d\beta}_{\nu}\, x^m\left(1+\frac{mdx}{x}\right)}{d\beta^{x^m}} = {}^{d\beta}_{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man kann nun, mit Rücksicht auf das soeben Gesagte, da
ralisierungszeichen in dem Ausdruck ${}^{d\beta}_{\nu}\, x^m\left(1+\frac{mdx}{x}\right)$ auch hi
setzen, sodann die Numeralisierung von $1+\frac{mdx}{x}$ wirklich vorneh
gleichzeitig x^m als Exponenten des gefundenen Numerals hinstel
ist dann:

$${}^{d\beta}_{\nu}\, x^m\left(1+\frac{mdx}{x}\right) = x^m\, {}^{d\beta}_{\nu}\left(1+\frac{mdx}{x}\right) = \text{(Gl. 34)}\left[d\beta\left(1+\frac{mdxld}{x}\right.\right.$$

$$d\beta^{x^m}\left(1+\frac{mdxld\beta}{x}\right)^{x^m} \quad . \quad . \quad .$$

Selbstverständlich kann das Numeralisierungszeichen hinter j
liebigen Faktor eines solchen Produkts gesetzt und dieser dadurc
Exponenten des gefundenen Numerals verwandelt werden. So i
man der Kürze wegen in der Gleichung 79 $x^m = y$ setzt:

$${}^{d\beta}_{\nu}\, y\left(1+\frac{mdx}{x}\right) = \left(1+\frac{mdx}{x}\right)^{{}^{d\beta}_{\nu}\, y} = \text{(Gl. 58)}\ (d\beta^y)^{1+\frac{mdx}{x}} =$$

$$d\beta^y \cdot d\beta^{\frac{my\,dx}{x}} = d\beta^y\left(1+\frac{my\,dxld\beta}{x}\right) = \text{(Gl. 22)}\ d\beta^y\left(1+\frac{mdxld\beta}{x}\right.$$

$$d\beta^{x^m}\left(1+\frac{mdxld\beta}{x}\right)^{x^m} \quad . \quad . \quad .$$

welches Resultat mit der Gl. 79 übereinstimmt.

Die bisher dargestellten zahlreichen Operationen, insbeson
Versetzung der endlichen Exponenten in das Differentialbinomium
gekehrt die Versetzung der endlichen Faktoren in die Potenz (Gl.
ferner die bei der Numeralisierung vorkommenden Veränderunge

) sind nun besonders geeignet, die Umgestaltung der Differentiale wirken. Ist die Transformation dann vollzogen, so kann der ursprüng- Wert des Differentials jederzeit durch die entgegengesetzte Operation hergestellt werden. In der That besteht auch, wie wir sofort sehen , die Anwendung der neuen Rechnungsmethoden auf die Differential- tegralrechnung im wesentlichen darin, dass die Fundamentalgleichung B. Gl. 76) oder das Differential (s. z. B. Gl. 100) zuerst numeralisiert , dass man dann die erforderlichen Umgestaltungen des Numerals mt und dass schliesslich der ursprüngliche Wert des nunmehr trans- ten Ausdrucks durch Logarithmalisierung wiederhergestellt wird.

§ 6.

Integralgleichung und die Differentialsumme.

ekanntlich werden alle Differentiale aus folgender Fundamental- ng

$$f(x+dx) - f(x) = df(x) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (81)$$

en. Diese Gleichung enthält drei wesentlich verschiedene Elemente. uf der linken Seite derselben erscheint an erster Stelle die ur- iche Funktion oder das Integral, in welchem jedoch jedes x, gleich- es als Summand, Faktor, Divisor, Exponent oder in einer anderen erscheint, um die unendlich kleine Grösse dx vermehrt ist. Ich halb diese Grösse, von welcher später noch oft die Rede sein wird, ferentialsumme nennen und mit dem Symbol Ds bezeichnen, e dem gegebenen Differential vorzusetzen ist, so dass also die Glei- ilt:

$$Ds\, df(x) = f(x+dx) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (82)$$

nn man ein Beispiel nehmen will:

$$Ds\, mx^{m-1} dx = (x+dx)^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (83)$$

zweiter Stelle enthält die Fundamentalgleichung 81 in der Ge- es Subtrahenden das Integral in seiner ursprünglichen, noch un- ten Gestalt.

Endlich an dritter Stelle erscheint, und zwar auf der rechten Seite undamentalgleichung, das Differential, welches sich durch die Sub- des Integrals von der Differenzialsumme ergiebt.

Die Aufgabe, ein bestimmtes Differential zu integrieren, wird nun schon dann gelöst sein, wenn es durch irgend welche mathe- Operationen gelingt, dasselbe wieder in jene Fundamentalgleichung

zu verwandeln, aus welcher es ursprünglich entstanden ist. Den Fundamentalgleichung erscheint das Integral als Subtrahend in se sprünglichen Gestalt und auch aus der Differentialsumme kann Schwierigkeit ermittelt werden, wenn man in dieser $dx = 0$ se kann z. B. die Integration von $mx^{m-1}dx$ als vollzogen gelten, wen Differential in den Ausdruck $(x + dx)^m - x^m$ transformiert ist.[3])

Ich will nun jene Fundamentalgleichung, welche für die I tiation den ersten Ausgangspunkt, für die neue Integrationsmeth gegen das letzte Ziel bildet, vom Standpunkt meiner Aufgabe als tegralgleichung bezeichnen.

Da das Integral ohne Schwierigkeit aus der Differentialsum mittelt werden kann, wenn man $dx = 0$ setzt, so wird die Integr den meisten Fällen schon dann als erreicht gelten, wenn man da tegrierende Differential in die entsprechende Differentialsumme ver und hiebei den Subtrahenden weglässt — eine Operation, welche na bei sehr verwickelten Integralen die Integration erheblich erl Dabei ist jedoch hervorzuheben, dass die Differentialsumme aus gebenen Differential erst dann ermittelt ist, wenn jedes x des Diff in dem transformierten Ausdruck in $x + dx$ verwandelt ist; fel nur bei einem einzigen x dieses Increment, so ist die Differentia noch nicht gefunden. Wir werden übrigens später (s. zu Gl. 180) dass dieser abgekürzte Weg in jenen Fällen nicht angewendet kann, wo im Laufe der Operationen die Differentialsumme und der hend (das Integral in seiner ursprünglichen Gestalt) nicht mit vo stimmtheit geschieden werden können. Um vollständig sicher zu muss man deshalb aus dem zu integrierenden Differential durch g Transformationen die ganze Integralgleichung zu ermitteln suche

Indem ich nun daran gehe, eine Reihe einfacherer Integrale u bar aus den betreffenden Differentialen mit Hilfe der neuen Meth berechnen, möchte ich bemerken, dass ich mich der Kürze wegen Integration jener algebraischen Differentiale beschränke, welche auc blos algebraische Funktionen integriert werden können, so dass cyclometrischen und goniometrischen Integrale hier vorläufig beisei Um jedoch den Mechanismus der neuen Integrationsmethoden vol klar zu machen, ist es notwendig, wenigstens bei einigen Funktion die Differentiation vermittelst der Potenzial-, Logarithmal- t meralrechnung darzustellen, weil die neue Integration im wesentliche ist, als eine rückwärtsschreitende Differentiation und deshalb im Zus hang mit dieser am besten begriffen werden kann.

[3]) Ich lasse in dieser Abhandlung, wie es auch sonst bei der Entwic unbestimmten Integrale üblich ist, die willkürliche Konstante unberücksichtigt

§ 7.

Differentiation von x^m.

Die Fundamentalgleichung für die Differentiation von x^m ist:

$$(x+dx)^m - x^m = dx^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (84)$$

Der auf der linken Seite der vorstehenden Gleichung stehende Aus- ist nun in das Differential umzugestalten.

Da die Numeralisierung sich, wie bereits oben (§ 5) bemerkt wurde, ngestaltung der Funktionen mit Differentialen besonders eignet, so eide Seiten der Gleichung zunächst zu numeralisieren. Es ist nun:

$$\overset{d\beta}{\nu}\left[(x+dx)^m - x^m\right] = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (85)$$

Die Numeralisierung des Ausdrucks auf der linken Seite kann nun eff des Subtrahenden x^m sofort vollzogen werden, indem man den- in den Ausdruck $d\beta^{x^m}$ verwandelt (Gl. 59) und dieses Numeral leitig in den Nenner versetzt (Gl. 77). Es ist dann:

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}(x+dx)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (86)$$

Um die später (Gl. 92, 93) stattfindende Reduktion zwischen Zähler nner möglich zu machen, ist aus der noch nicht numeralisierten ntialsumme $(x+dx)^m$ der Faktor x^m auszuziehen, also:

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu} x^m \left(1+\frac{dx}{x}\right)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (87)$$

unmehr ist, was nach den G. 79—80 zulässig ist, das Numerali- szeichen hinter x^m zu setzen:

$$\frac{x^m \overset{d\beta}{\nu}\left(1+\frac{dx}{x}\right)^m}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (88)$$

evor jedoch die Numeralisierung des Ausdrucks $\left(1+\frac{dx}{x}\right)^m$ wirk- ttfindet, muss der Exponent m in das Differentialbinomium als versetzt werden, was zufolge der Gl. 22—24 zulässig ist. Denn

da x^m infolge der Numeralisierung gleichfalls in einen Exponente wandelt wird, so würde der numeralisierte Zähler den Exponente haben und es könnte die in den Gl. 92, 93 vollzogene Reduktion, Auffindung des Differentials unerlässlich ist, nicht stattfinden.

Es ist daher:

$$\frac{x^m \overset{d\beta}{\nu}\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right)}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nunmehr kann die vollständige Numeralisierung des Zähler weiteres vorgenommen werden. Es ist aber:

$$\overset{d\beta}{\nu}\left(1+\frac{m\,dx}{x}\right) = d\beta^{1+\frac{m\,dx}{x}} = d\beta \,.\, d\beta^{\frac{m\,dx}{x}} = d\beta\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)$$

Substituiert man den letzteren Ausdruck in die Gl. 89 und delt man gleichzeitig x^m in den Exponenten dieses Numerals (s. Gl. 79)

$$\frac{\left[d\beta\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)\right]^{x^m}}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nimmt man nun die Potenzierung des im Zähler erscheinenden P wirklich vor, so ist:

$$\frac{d\beta^{x^m}\cdot\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m}}{d\beta^{x^m}} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

In dem vorstehenden Ausdruck erscheint nunmehr die Funda gleichung 84 vollständig numeralisiert, weshalb ich diese Gleichung irgend einer Form bei allen Differentiationen und Integrationen na neuen Methode wiederkehrt, auch die Numeralgleichung schl nennen werde. Sie bildet gleichsam den Mittelpunkt des neuen D tiations- und Integrationssystems. Ist man bei der Differentiati Numeralgleichung gelangt, so genügen einige leichte Operationen, Differenzial aufzufinden. Hat man umgekehrt bei der Integration aus dem Differential die Numeralgleichung gebildet, so kann ma Schwierigkeit zur Integralgleichung und damit zugleich auch zu d suchten Integral gelangen.

Wenn man nun in der Gleichung 92 zwischen dem Zähle dem Nenner reduziert, so ist:

$$\left(1+\frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Um dieses Numeral noch mehr zu vereinfachen, versetzt man jetzt, e entscheidende Reduktion bereits vollzogen ist (Gl. 92 und 93), den ienten x^m in das Differentialbinomium (s. Gl. 22—24), woraus sich t:

$$1 + \frac{mx^m dx l d\beta}{x} = \overset{d\beta}{\nu} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (94)$$

enn man reduziert:

$$1 + mx^{m-1} dx l d\beta = \overset{d\beta}{\nu} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (95)$$

Mit diesem Ausdruck hat die Numeralgleichung jedenfalls ihre ein- Form erlangt. Um jedoch zu dem ursprünglichen Wert von dx^m, welcher durch die Numeralisierung verändert worden ist, zu gelangen, bedarf es noch der entgegengesetzten Operation, nämr Logarithmalisierung der Gleichung. Es ist also:

$$\overset{d\beta}{\lambda} (1 + mx^{m-1} dx l d\beta) = \overset{d\beta}{\lambda} \overset{d\beta}{\nu} dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (96)$$

un ist aber (N. R. § 10, Gl. 14 und oben Gl. 74, 75):

$$\overset{d\beta}{\lambda} (1 + mx^{m-1} dx l d\beta) = mx^{m-1} dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (97)$$

ufolge Gl. 61:

$$\overset{d\beta}{\lambda} \overset{d\beta}{\nu} dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (98)$$

s durch Substitution dieser Werte in der Gleichung 96 letztere folestalt annimmt:

$$mx^{m-1} dx = dy = dx^m \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (99)$$

s gesuchte Differential von x^m ist also $mx^{m-1} dx$. Genau dasIsultat würde sich auch ergeben, wenn man die Gleichung 93 unlogarithmalisiert (s. z. B. unten Gl. 141, 142).

§. 8.

Integration von $mx^{m-1} dx$.

D Integration des Differentials $mx^{m-1} dx$ ist nichts als eine Umg der im vorigen Paragraphen dargestellten Rechnungsoperationen. li en Parallelismus klar hervortreten zu lassen, habe ich das

Differential $mx^{m-1}dx$ zur Integration gewählt, obgleich die übliche
des Potenzintegrals bekanntlich $\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$ ist.

I. Die Fundamentalgleichung bei der Integration ist jener Aus
mit welchem oben (Gl. 99) die Differentiation abgeschlossen wurde, nä

$$mx^{m-1}dx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und unsere Aufgabe geht nun dahin, diese Gleichung durch die Nu
sierung und Logarithmalisierung in die entsprechende Integralglei
(s. Gl. 84), nämlich:

$$(x+dx)^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

umzugestalten.

Zu diesem Zweck ist zuvörderst die Verwandlung der Gl. 100
Numeralgleichung (Gl. 92) anzustreben. Numeralisiert man nun Gl. 1
ergiebt sich:

$$\overset{d\beta}{\nu}\, mx^{m-1}dx = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder wenn man auf der linken Seite die Numeralisierung wirklich voll
(N. R. § 11, Gl. 13):

$$1 + mx^{m-1}dx l d\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Da aus dem in vorstehender Gleichung links erschein
Differentialbinomium später (Gl. 109—111) die Differentialsumme ge
werden soll, so muss demselben die Form $1 + \frac{Pdx}{x}$ gegeben werden
dadurch geschieht, dass man das Differential mit x multipliciert und
diert, wobei zu bemerken ist, dass die mit P bezeichneten Faktore
Differentialbinomiums (im vorliegenden Falle $mx^m l d\beta$) durch sp
Operationen (Gl. 105, 107, 109) eliminiert werden. Es ist also:

$$1 + \frac{mx^m dx l d\beta}{x} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Man versetzt nun x^m aus dem Differentialbinomium in die P
was zufolge der Gl. 22—24 jederzeit zulässig ist. Die richtige Ausw
in die Potenz zu versetzenden Faktoren — welche fast bei allen In
tionen nach der neuen Methode wiederkehrt —, erfordert eine ge
Uebung in der Numeral- und Logarithmalrechnung, insbesondere
Ueberblick über die durch den späteren Verlauf der Operationen ohn
eliminierten Faktoren, welche selbstverständlich nicht in die Potenz
setzt werden dürfen. So ist z. B. in der Gl. 104 nur x^m, nicht ab

$'d\beta$ in einen Exponenten des Differentialbinomiums zu verwandeln, ch zur Bildung der Differentialsumme nur der Ausdruck $1 + \frac{dx}{x}$ ndet werden kann, und zwar aus dem Grunde, weil ohnedies m in l. 109, $ld\beta$ in der Gl. 107 aus dem Differentialbinomium verschwindet. man nun jene Operation vor, so ist:

$$\left(1 + \frac{mdxld\beta}{x}\right)^{x^m} = {}^{d\beta}\nu\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (105)$$

Wir sind nunmehr in unserer rückwärtsschreitenden Integration bis . 93, also bis unmittelbar vor die Numeralgleichung gelangt. jetzt nur noch nothwendig, aus der Gl. 105 diese letztere zu bilden, Integration des gegebenen Differentials zu bewirken. So wie in die in den Gleichungen 92 und 93 im Zähler und Nenner voll- Reduktion von $d\beta x^m$ zur Folge hatte, dass durch die Logarith- ung des reduzierten Ausdruckes sich das Differential ergab, so es umgekehrt nur der Umbildung des Ausdruckes $\left(1+\frac{mdxld\beta}{x}\right)^{x^m}$ Numeralgleichung, um durch die Logarithmalisierung dieser Letzteren ngralgleichung und damit zum gesuchten Integral zu gelangen. Mit Worten: die Numeralgleichung hat die merkwürdige Eigenschaft, e Logarithmalisierung mit jener Reduction das Differential, ohne duction das Integral ergibt.

ie Umbildung der Gl. 105 zur Numeralgleichung erfolgt aber ein- durch, dass man den Ausdruck $\left(1 + \frac{mdx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m}$ mit der Basis arithmals multipliciert und dividiert und letztere zu derselben Potenz Differentialbinomium erhebt. Der Multiplicator und Divisor wird i vorliegenden Falle $d\beta^{x^m}$ sein. Will man nur die Differential- und nicht die ganze Integralgleichung ermitteln, so genügt schon iplication mit $d\beta^{x^m}$, weil die Division den Zweck hat, den Subtra- der Integralgleichung daraus hervorgehen zu lassen (S. Gl. 107). mmt man die soeben angedeuteten Operationen vor, so nimmt die folgende Gestalt an:

$$\frac{d\beta^{x^m}\left(1 + \frac{mdxld\beta}{x}\right)^{x^m}}{d\beta^{x^m}} = {}^{d\beta}\nu\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (106)$$

Logarithmalisiert man nun, um den durch die Numeralisierung in den und 103 veränderten Werth von dy wieder herzustellen, nach den

oben (Gl. 74, 75) gegebenen Regeln die vorstehende Numeralgl
so ist:

$$x^m + x^m \cdot \frac{m\,dx}{x} - x^m = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy = dy \quad . \quad .$$

oder:

$$x^m \left(1 + \frac{m\,dx}{x}\right) - x^m = dy \quad . \quad . \quad .$$

Da nun aus den beiden Faktoren des Ausdrucks $x^m \left(1 + \frac{m}{}\right.$

Differentialsumme gebildet werden soll, so müssen dieselben
gleichen Exponenten gebracht werden, was in diesem Falle ohne
dadurch geschehen kann, dass man den Faktor m aus dem Diff
binomium in die Potenz versetzt (Gl. 22—24). Sollte das zu integ
Differential so beschaffen sein, dass das aus demselben gebildete Diff
binomium diese Operation nicht gestattet, so muss es entweder g
Anfang vor erfolgter Numeralisierung oder auch später, so lange
nicht in die Differentialsumme verwandelt ist, mit den erford
Constanten multipliciert und dividiert werden, was dann zur Folge h
die nämlichen Operationen auch an dy vorgenommen werden
(S. z. B. Gl. 125, 131, 132.) Es ist also im vorliegenden Falle:

$$x^m \left(1 + \frac{dx}{x}\right)^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$\left[x \left(1 + \frac{dx}{x}\right)\right]^m - x^m = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$(x + dx)^m - x^m = dy \,. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nunmehr ist also die Integralgleichung und damit auch das g
Integral $= x^m$ ermittelt.

II. Will man nicht die vollständige Integralgleichung, sondern
Differentialsumme auffinden (s. Gl. 82, 83), so entstehen von Gl.
folgende abweichende Ausdrücke, die keiner weiteren Erläuterung be

$$^{d\beta}x^m \left(1 + \frac{m\,dx\,l\,d\beta}{x}\right)^{x^m} = Ds\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy \text{ (s. Gl. 106)} \quad . \quad .$$

$$x^m + x^m \cdot \frac{m\,dx}{x} = \overset{d\beta}{\lambda}\ Ds\ \overset{d\beta}{\nu}\ dy = Ds\,dy \text{ (s. Gl 107)} \quad .$$

$$x^m \left(1 + \frac{m\,dx}{x}\right) = Ds\,dy \text{ (s. Gl. 108)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (114)$$

$$\left[x \left(1 + \frac{m\,dx}{x}\right)\right]^m = Ds\,dy \text{ (s. Gl. 109, 110)} \quad . \quad . \quad (115)$$

$$(x + dx)^m = Ds\,dy \text{ (s. Gl. 111)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (116)$$

Setzt man in der Gl. 116 das Increment $dx = o$, so ergiebt sich ıfalls das Integral x^m.

III. Gewöhnlich wird das Potenz-Integral durch die Formel ausgedrückt:

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (117)$$

Nimmt man nun die in den Gl. 100—104 angedeuteten Operationen lem Differential $x^m dx$ vor, so wird die Gl. 104 folgende Gestalt men:

$$1 + \frac{x^{m+1} dx l d\beta}{x} = {}^{d\beta}_{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (118)$$

emgemäss wird auch in allen folgenden Gleichungen x^{m+1} an die von x^m treten, dagegen der Faktor m, welcher in dem gegebenen ential $x^m dx$ fehlt, aus dem Differentialbinomium entfallen. Es wird die Gl. 108 folgende Gestalt annehmen:

$$x^{m+1} \left(1 + \frac{dx}{x}\right) - x^{m+1} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (119)$$

Es ist klar, dass die beiden Faktoren des Ausdrucks $x^{m+1}\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$ ur Bildung der Differentialsumme unerlässlich ist) nur dann unter ben Exponenten gebracht werden können, wenn an die Stelle des s $1 + \frac{dx}{x}$ der Ausdruck $1 + \frac{(m+1)\,dx}{x}$ treten würde, weil man n $n + 1$ in die Potenz versetzen könnte. Diese Aenderung kann auch ·icht dadurch bewirkt werden, dass man die Fundamentalgleichung:

$$x^m dx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (120)$$

or erfolgter Numeralisierung mit $m + 1$ multipliciert, wodurch sie eile Gestalt erhält:

$$x^m (m+1)\, dx = (m+1)\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (121)$$

Nimmt man dann alle sub I angedeuteten Operationen vor, so wird G 108 lauten:

$$x^{m+1}\left[1+\frac{(m+1)\,dx}{x}\right]-x^{m+1}=(m+1)\,dy \quad . \quad . \quad .$$

und die Gl. 111:

$$(x+dx)^{m+1}-x^{m+1}=(m+1)\,dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man dy durch Division von den Konstanten befreit:

$$\frac{(x+dx)^{m+1}}{m+1}-\frac{x^{m+1}}{m+1}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

welche Integralgleichung das Integral in seiner gewöhnlichen Form dar

Ich bemerke noch, dass die auf der rechten Seite der Gleich stehende Grösse dy ohne Weiteres mit jeder Konstanten multipli dividiert oder potenziert werden kann, weil alle Rechnungsoperationen aus der bisherigen Darstellung ersichtlich ist, nur die Umformung variablen Bestandteile (der x) in $x+dx$ bezwecken, während die stanten unberührt bleiben. Nur muss dy immer am Ende der Rech von den Konstanten, mit welchen es behaftet ist, durch die geeig Operationen wieder befreit werden (s. z. B. Gl. 123, 124).

Die Multiplikation und die Division der Fundamentalgleichung den Konstanten vor erfolgter Numeralisierung entspricht den Anforderu einer strengen Methode, sie erfordert aber eine genaue Uebersicht den späteren Verlauf des Integrationsprozesses, welche übrigens d längeren Gebrauch der neuen Rechnungsmethoden leicht erworben Da jedoch die konstanten Bestandtheile der Differentiale auf beiden S der Gleichungen durch die Numeralisierung und Logarithmalisierung l andere Veränderung erleiden, als dass sie allmählig eliminiert we (s. Gl. 102 und ff.), so kann die Einführung der Konstanten auch sp so lange noch nicht die Differentialsumme gebildet ist, in dem Zeitpu stattfinden, wo die Konstanten zur Durchführung der Rechnung nothwe werden. Dies geschieht nun in der Weise, dass einerseits das Differe des Binoms dx, und andererseits dy mit den erforderlichen Konsta multipliciert oder dividiert werden, ohne dass diese Operationen sich die übrigen Bestandtheile der Gleichung beziehen (s. unten Gl. Wenn man z. B. bei der Integration von $x^m dx$ zu der Gleichung gelangt ist, so kann man noch immer $\frac{dx}{x}$ und dy mit $m+1$ mul cieren, die übrigen Bestandtheile der Gleichung aber unberührt lasse dass diese dann die Gestalt annimmt:

$$x^{m+1}\left[1+\frac{(m+1)\,dx}{x}\right]-x^{m+1}=(m+1)\,dy \quad . \quad .$$

Genau dieselbe Form hätte aber diese Gleichung erlangt, wenn man die Fundamentalgleichung mit $m+1$ multipliziert hätte (s. Gl. 120 2). Da die Resultate nach beiden Methoden die nämlichen sind, aber nführung der Konstanten erst in dem Augenblick, wo der Lauf der ung sie nothwendig macht, die Entstehung der Integrale viel anschaugestaltet, so werde ich in der folgenden Darstellung mich vorzüglich zweiten Methode bedienen.

§. 9.

Integration von $(a+bx)^m dx$; — $[a+bx=\omega]$.

anz analog mit der Integration von $x^m dx$ ist die Integration des ineren Ausdrucks $(a+bx)^m dx$. Die Fundamentalgleichung ist enn man $a+bx=\omega$ setzt:

$$\omega^m dx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (126)$$

unmehr wäre die Fundamentalgleichung mit den erforderlichen ten zu multiplizieren (s. Gl. 120, 121). Der Einfachheit wegen ch aber mit Rücksicht auf das am Schlusse des § 8 Gesagte die ten erst dann einführen, wenn der Lauf der Rechnung dies nothi macht.

umeralisiert man die Fundamentalgleichung, so ist:

$$1+\omega^m dx l d\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (127)$$

un ist aber (s. Gl. 103—106):

$$1+\omega^m dx l d\beta = 1+\frac{\omega^{m+1} dx l d\beta}{\omega} = \left(1+\frac{dx l d\beta}{\omega}\right)^{\omega^{m+1}} =$$

$$\frac{d\beta\omega^{m+1}\left(1+\frac{dx l d\beta}{\omega}\right)^{\omega^{m+1}}}{d\beta\omega^{m+1}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (128)$$

Substituiert man den letzten Ausdruck in der Gl. 127, so entsteht die gleichung:

$$\frac{d\beta\omega^{m+1}\left(1+\frac{dx l d\beta}{\omega}\right)^{\omega^{m+1}}}{d\beta\omega^{m+1}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad (129)$$

Logarithmalisiert man die vorstehende Gleichung, so ist:

$$\omega^{m+1} + \omega^{m+1} \cdot \frac{dx}{\omega} - \omega^{m+1} = \overset{\alpha\beta}{\lambda}\ \overset{\alpha\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad .$$

oder:

$$\omega^{m+1}\left(1 + \frac{dx}{\omega}\right) - \omega^{m+1} = dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Damit nun in dieser Gleichung aus dem Ausdruck $\omega^{m+1}\left(1 -$ die Differentialsumme gebildet werden kann, ist die Einführung von 2 K ten erforderlich. Vor Allem muss $\frac{dx}{\omega}$ und dy mit $m+1$ multipliziert um ω^{m+1} und $1 + \frac{dx}{\omega}$ auf den gleichen Exponenten zu bringen. Da ist zweitens zur Bildung der Differentialsumme notwendig, dass das Diffe binom auf die Form $1 + \frac{d\omega}{\omega}$ gebracht wird, ähnlich wie im § Differentialbinom die Gestalt $1 + \frac{dx}{x}$ annehmen musste. Nun is $d\omega = d(a + bx) = b\,dx$; folglich muss noch überdies $\frac{dx}{x}$ und d multipliziert werden. Diese Operationen hätten übrigens ohne Ä des Resultates auch gleich am Beginne der Rechnung vorgenommen können. Die Gl. 131 nimmt nunmehr folgende Gestalt an:

$$\omega^{m+1}\left[1 + \frac{(m+1)\,b\,dx}{\omega}\right] - \omega^{m+1} = (m+1)\,b\,dy \quad . \quad .$$

oder:

$$\omega^{m+1}\left(1 + \frac{b\,dx}{\omega}\right)^{m+1} - \omega^{m+1} = (m+1)\,b\,dy \quad . \quad . \quad .$$

oder (s. Gl. 108—111):

$$(\omega + b\,dx)^{m+1} - \omega^{m+1} = (m+1)\,b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Befreit man nun dy von den Konstanten, so ist:

$$\frac{1}{b}\,\frac{(\omega + b\,dx)^{m+1}}{m+1} - \frac{1}{b}\,\frac{\omega^{m+1}}{m+1} = dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b}\,\frac{\omega^{m+1}}{m+1} = \frac{1}{b}\,\frac{(a+bx)^{m+1}}{m+1}$

§ 10.

ferentiation und Integration der Exponential-function.

a). Differentiation.

Die Fundamentalgleichung ist in diesem Falle:

$$a^{bx+bdx} - a^{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (136)$$

enn man numeralisiert:

$$\overset{d\beta}{\nu}\left[a^{bx+bdx} - a^{bx}\right] = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (137)$$

. Gl. 85, 86):

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\, a^{bx+bdx}}{d\beta^{a^{bx}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (138$$

Nun ist aber:

$$\overset{\beta}{,}\, a^{bx+bdx} = \overset{d\beta}{\nu}\, a^{bx} \cdot a^{bdx} = (\text{Gl. } 88)\ a^{bx}\ \overset{d\beta}{\nu}\, a^{bdx} = (\text{Gl. } 33)$$

$$: a^{bx}\ \overset{d\beta}{\nu}\ (1 + lab\,dx) = (\text{Gl. } 91)\ [d\beta\,(1 + lab\,dx\,ld\beta)]^{a^{bx}} =$$

$$= d\beta^{a^{bx}}\ (1 + lab\,dx\,ld\beta)^{a^{bx}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (139)$$

ıbstituiert man den letzteren Ausdruck in die Gl. 138, so entsteht Neralgleichung:

$$\frac{d\beta^{a^{bx}}\,(1 + lab\,dx\,ld\beta)^{a^{bx}}}{d\beta^{a^{bx}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (140)$$

wn man reduziert:

$$(1 + lab\,dx\,ld\beta)^{a^{bx}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (141)$$

Logarithmalisiert man jetzt, um den ursprünglichen Werth von dy rzustellen, so ist (s. Gl. 96—98):

$$a^{bx} \cdot lab\,dx = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (142)$$

oder:

$$a^{bx} labdx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

womit das Differential ermittelt erscheint.

b). Integration.

Die Fundamentalgleichung ist hier (s. Gl. 143):

$$a^{bx} labdx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man numeralisiert:

$$1 + a^{bx} labdxld\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Da zum Zwecke der Bildung der Differentialsumme jedes z integrierenden Differentials sich in $x + dx$ verwandeln muss, folg im vorstehenden Differentialbinomium erscheinende Ausdruck a^{bx+bdx} zu transformieren ist, so muss aus dem Binom a^{bx} in di versetzt werden, weil der übrig bleibende Ausdruck $1 + labdxld$ man von dem später (Gl. 148) verschwindenden $ld\beta$ absieht, Gl. $33 = a^{bdx}$ ist. Es ist also:

$$1 + a^{bx} labdxld\beta = [1 + labdxld\beta]^{a^{bx}} = \frac{d\beta^{a^{bx}}(1 + labdxld\beta)^{a}}{d\beta^{a^{bx}}}$$

Substituiert man den letzteren Ausdruck in die Gl. 145, so die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{a^{bx}}(1 + labdxld\beta)^{a^{bx}}}{d\beta^{a^{bx}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man zur Herstellung des ursprünglichen von dy die vorstehende Gleichung, so ist:

$$a^{bx} + a^{bx} \cdot labdx - a^{bx} = \overset{d\beta}{\lambda}\, \overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad .$$

oder:

$$a^{bx}(1 + labdx) - a^{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$a^{bx} \cdot a^{bdx} - a^{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$a^{bx+bdx} - a^{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das gesuchte Integral ist also a^{bx}.

c). Integration von $e^{ax}dx$.

Will man das Integral der Exponentialfunktion in der üblichen Form $\int e^{ax}dx = \frac{e^{ax}}{a}$ berechnen, so ist die Fundamentalgleichung:

$$e^{ax}dx = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (152)$$

wenn man numeralisiert:

$$1 + e^{ax}dx\,l\,d\beta = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (153)$$

Nun ist aber (s. Gl. 146):

$$1 + e^{ax}dx\,l\,d\beta = (1 + dx\,l\,d\beta)^{e^{ax}} = \frac{d\beta^{e^{ax}}(1 + dx\,l\,d\beta)^{e^{ax}}}{d\beta^{e^{ax}}} \quad . \quad (154)$$

lh die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{e^{ax}}(1 + dx\,l\,d\beta)^{e^{ax}}}{d\beta^{e^{ax}}} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (155)$$

Logarithmalisiert man diese Gleichung, so ist:

$$e^{ax} + e^{ax} \cdot dx - e^{ax} = \overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{d\beta}{\nu}\, dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (156)$$

$$e^{ax}(1 + dx) - e^{ax} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (157)$$

Da nun zur Bildung der Differentialsumme aus e^{ax} der Ausdruck $1 + a\,dx$ notwendig ist, das Differentialbinom $1 + dx$ aber nur e^{dx} el, so muss dx und dy mit a multipliciert werden (s. Gl. 125, 132). s dann:

$$e^{ax}(1 + a\,dx) - e^{ax} = a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (158)$$

$$e^{ax} \cdot e^{a\,dx} - e^{ax} = a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (159)$$

$$e^{ax + a\,dx} - e^{ax} = a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (160)$$

Wnn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{e^{ax + a\,dx}}{a} - \frac{e^{ax}}{a} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (161)$$

as gesuchte Integral ist also $\frac{e^{ax}}{a}$.

§ 11.

Differentiation und Integration der gebroche Funktionen.

a). Differentiation von $\frac{a}{bx}$.

Die Fundamentalgleichung ist hier:

$$\frac{a}{b(x+dx)} - \frac{a}{bx} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder, da man die Konstanten, welche zur Durchführung der fol Rechnungsoperationen nicht notwendig sind, auf die rechte Sei Gleichung schaffen kann:

$$\frac{1}{x+dx} - \frac{1}{x} = \frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Wenn man diese Gleichung numeralisiert, so ist (s. Gl. 8 137, 138):

$$\frac{\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{1}{x+dx}}{\frac{1}{d\beta^{x}}} = \overset{d\beta}{\nu}\,\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Zieht man, um später (Gl. 167, 168) die bekannte Redukt ermöglichen und um den Ausdruck $x+dx$ in das Differentialbin zu verwandeln, aus dem noch zu numeralisierenden Ausdruck $\frac{1}{x}$ hera setzt man $\overset{d\beta}{\nu}$ hinter diesen Faktor, so ist:

$$\frac{\frac{1}{x}\,\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{1}{1+\frac{dx}{x}}}{\frac{1}{d\beta^{x}}} = \overset{d\beta}{\nu}\,\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nun ist aber:

$$\overset{d\beta}{\nu}\,\frac{1}{1+\frac{dx}{x}} = \text{(Gl. 9)}\ \overset{d\beta}{\nu}\left(1-\frac{dx}{x}\right) = d\beta^{1-\frac{dx}{x}} = \frac{d\beta}{d\beta^{\frac{dx}{x}}} =$$

$$\frac{d\beta}{1+\frac{dx\,l\,d\beta}{x}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Substituiert man den letzten Ausdruck in die Gl. 165, indem man zeitig $\frac{1}{x}$ in die Potenz versetzt, so entsteht die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{x}}}{d\beta^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{dx\,ld\,\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = \overset{d\beta}{\nu}\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (167)$$

enn man reduciert:

$$\frac{1}{\left(1+\frac{dx\,ld\,\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}} = \overset{d\beta}{\nu}\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (168)$$

ersetzt man nunmehr in vorstehender Gleichung den Exponenten $\frac{1}{x}$ Differentialbinomium und dieses letztere selbst in den Zähler (Gl. 9), t

$$1-\frac{dx\,ld\,\beta}{x^2} = \overset{d\beta}{\nu}\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (169)$$

ogarithmalisiert man endlich, um den ursprünglichen Wert von dy herzustellen, diese Gleichung, so ist:

$$-\frac{dx}{x^2} = \overset{d\beta}{\lambda}\,\overset{d\beta}{\nu}\frac{b}{a}\,dy = \frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (170)$$

nn man dy von den Konstanten befreit:

$$-\frac{a\,dx}{b\,x^2} = dy = d\,\frac{a}{b\,x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (171)$$

b.) Integration von $\frac{a\,dx}{b\,x^2}$.

Le Fundamentalgleichung ist, wenn man die Konstanten, die zur fhrung der Rechnungsoperationen nicht notwendig sind, auf die eite schafft:

$$\frac{dx}{x^2} = \frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (172)$$

ren man numeralisiert:

$$1+\frac{dx\,ld\,\beta}{x^2} = \overset{d\beta}{\nu}\frac{b}{a}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (173)$$

Wenn man, um das links stehende Numeral auf die Form 1 zu bringen, (s. Gl. 104, 105), $\frac{1}{x}$ in die Potenz versetzt, so ist:

$$1+\frac{dxld\beta}{x^2}=\left(1+\frac{dxld\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=\frac{d\beta^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{dxld\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{d\beta^{\frac{1}{x}}}$$

und wenn man diesen letzteren Ausdruck in die Gl. 173 substitu entsteht die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{dxld\beta}{x}\right)^{\frac{1}{x}}}{d\beta^{\frac{1}{x}}}=\overset{d\beta}{\nu}\frac{b}{a}dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man nun, um den ursprünglichen Wert herzustellen, die vorstehende Gleichung, so ist:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{x}\cdot\frac{dx}{x}-\frac{1}{x}=\overset{d\beta}{\lambda}\overset{d\beta}{\nu}\frac{b}{b}dy=\frac{b}{a}dy \quad . \quad . \quad .$$

Nun ist aber zufolge Gl. 11:

$$\frac{1}{p+qdx}=\frac{1}{p}-\frac{qdx}{p^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

folglich, wenn man in der letzten Gleichung $p=x$, $q=1$ setzt:

$$\frac{dx}{x^2}-\frac{1}{x}=-\left(\frac{1}{x}-\frac{dx}{x^2}\right)=-\frac{1}{x+dx} \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man den letzten Ausdruck in die Gl. 176 substituiert:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x+dx}=\frac{b}{a}dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder wenn man der Integralgleichung durch Wechsel der Zeich gewöhnliche, anschauliche Form verleiht und dy von den Ko befreit, so ist:

$$-\left[\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x+dx}-\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x}\right]=dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Es ist also $\int\frac{adx}{bx^2}=-\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{x}=-\frac{a}{bx}$.

Ich bemerke, dass hier ein Fall vorliegt, wo die Differenti und der Subtrahend der Integralgleichung nicht mit Sicherheit ge

n können (s. oben S. 18), weil die erstere nicht blos aus dem Zähler, rn zum Theil auch aus dem Nenner der Numeralgleichung 175 ent- :n ist. Man kann übrigens zu dem in der Gl. 180 enthaltenen at auch dadurch gelangen, dass man in der Gl. 176 die Differentiale id dy mit der Konstante -1 multipliziert und am Ende der ung dy durch Zeichenwechsel von dem Minuszeichen befreit. In Falle kann dann die Differentialsumme von dem Subtrahenden ebenso i den übrigen Integrationen genau unterschieden werden.

c). **Integration von** $\frac{dx}{(a+bx)^2}$; — $[a+bx=\omega]$.

ie Integration von $\frac{dx}{(a+bx)^2} = \frac{dx}{\omega^2}$ ist dem Falle unter b voll- analog.

ie Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega^2} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (181)$$

ie Numeralgleichung lautet (s. Gl. 172—175):

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\omega}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega}}}{d\beta^{\frac{1}{\omega}}} = {}^{d\beta}\nu\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (182)$$

garithmalisiert man diese Gleichung, so ist:

$$\frac{1}{\omega}+\frac{1}{\omega}\cdot\frac{dx}{\omega}-\frac{1}{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (183)$$

l. der Ausdruck $\frac{dx}{\omega^2}-\frac{1}{\omega}$ oder $-\left[\frac{1}{\omega}-\frac{dx}{\omega^2}\right]$ zufolge den ind 178 $-\frac{1}{\omega+dx}$ ergiebt, die Differentialsumme von $\frac{1}{\omega}=\frac{1}{a+bx}$ $\frac{1}{+bx+bdx}$ ist, so muss vor Bildung der Differentialsumme dy mit b multipliziert werden. Die Gl. 183 nimmt dann folgende tan:

$$\frac{1}{\omega}+\frac{b\,dx}{\omega^2}-\frac{1}{\omega} = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (184)$$

wan man in der Gl. 177 $p=\omega$, $q=b$ setzt:

$$\frac{1}{\omega}-\frac{1}{\omega+b\,dx} = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (185)$$

oder, wenn man die Zeichen wechselt und dy von der Konstante

$$-\left[\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\omega+b\,dx}-\frac{1}{b}\cdot\frac{1}{\omega}\right]=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Es ist also $\int\frac{dx}{(a+bx)^2}=-\frac{1}{b\,(a+bx)}$.

d). Integration von $\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)^3}$; — $[a+bx=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega^3}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man diese numeralisiert:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega^3}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Hier muss, um das links stehende Numeral auf die Form $1+$ zu bringen und dadurch die Bildung der Differentialsumme zu ermög $\frac{1}{\omega^2}$ in die Potenz versetzt werden. Es ergiebt sich dann die N gleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\omega^2}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{\omega^2}}}{d\beta^{\frac{1}{\omega^2}}}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man diese Gleichung, so ist:

$$\frac{1}{\omega^2}+\frac{1}{\omega^2}\cdot\frac{dx}{\omega}-\frac{1}{\omega^2}=\overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\ \nu}\,dy=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nun ist aber:

$$\frac{1}{(\omega+b\,dx)^2}=\frac{1}{\omega^2+2b\omega\,dx}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{2b\omega\,dx}{\omega^4}=\frac{1}{\omega^2}-\frac{2b\,dx}{\omega^3} \quad .$$

Der zweite Ausdruck dieser Gleichung entsteht, wenn man i ersten $(\omega+b\,dx)^2$ entwickelt und b^2dx^2 weglässt; der dritte und wenn man in der Gl. 177 $p=\omega^2$, $q=2b\omega$ setzt. Um also z Differentialsumme $\frac{1}{(\omega+b\,dx)^2}$ zu gelangen, braucht man in der G blos dx und dy mit $2b$ zu multiplizieren. Es ist dann:

$$\frac{1}{\omega^2}+\frac{2b\,dx}{\omega^3}-\frac{1}{\omega^2}=2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

wenn man teilweise die Zeichen wechselt:

$$\frac{1}{\omega^2} - \left[\frac{1}{\omega^2} - \frac{2b\,dx}{\omega^3}\right] = 2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (193)$$

mit Rücksicht auf die Gl. 191:

$$\frac{1}{\omega^2} - \frac{1}{(\omega + b\,dx)^2} = 2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (194)$$

Giebt man der Integralgleichung durch Zeichenwechsel ihre gewöhn-Form, und befreit man dy von den Konstanten, so ist:

$$-\left[\frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{(\omega + b\,dx)^2} - \frac{1}{2b} \cdot \frac{1}{\omega^2}\right] = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

Das gesuchte Integral ist also $-\frac{1}{2b\,(a + bx)^2}$.

§ 12.

Logarithmische Integrale.

lle bisherigen Integrale hatten die gemeinsame Eigentümlichkeit, ıs dem Differentialbinomium vor Bildung der Numeralgleichung ein-aktoren in die Potenz versetzt werden mussten, um das Binom auf m $1 + \frac{dx}{x}$ oder $1 + \frac{d\omega}{\omega}$ zu bringen. Anders verhält sich dies logarithmischen Integralen. Hier liefert sofort die Numeralisierung ferentials die Numeralgleichung entweder in der Form $1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{x}$ der Form $1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}$; in dem letzteren Falle (s. Gl. 209, 210, 16) ist zwar die Multiplikation mit Konstanten, aber nicht eine ıng in die Potenz erforderlich.

a) Integration von $\frac{dx}{x}$.

e Fundamentalgleichung ist hier:

$$\frac{dx}{x} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (196)$$

wın man numeralisiert:

$$1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{x} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

Nun ist aber:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{x} = \text{(Gl. 24)}\ \left(1+\frac{dx}{x}\right)^{l\,d\beta} = \left(\frac{x+dx}{x}\right)^{l\,d\beta} \quad . \ .$$

folglich, wenn man den letzteren Ausdruck in die Gl. 197 substitui

$$\left(\frac{x+dx}{x}\right)^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

Logarithmalisiert man vorstehende Gleichung, so ist (Gl. 29):

$$l\,d\beta \cdot \frac{l\,(x+dx)-lx}{l\,d\beta} = \overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\ \nu}\,dy = dy \quad . \ . \ . \ .$$

oder:

$$l\,(x+dx)-lx = dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

Das gesuchte Integral ist also lx.

b) Integration von $\frac{dx}{xlx}$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{xlx} = dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

und wenn man numeralisiert:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{xlx} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ . \ . \ .$$

Nun ist aber:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{xlx} = \left[1+\frac{dx}{xlx}\right]^{l\,d\beta} = \left[1+\frac{l\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{lx}\right]^{l\,d\beta}$$

$$= \left[\frac{lx+l\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{lx}\right]^{l\,d\beta} = \left[\frac{log\ x\left(1+\frac{dx}{x}\right)}{lx}\right]^{l\,d\beta} = \left[\frac{l\,(x+dx)}{lx}\right]^{l\,d\beta}$$

Substituiert man den letzten Ausdruck in die Gl. 203, so ist:

$$\left[\frac{l\,(x+dx)}{lx}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \ . \ . \ . \ . \ .$$

Logarithmalisiert man nun, um den ursprünglichen Wert vo herzustellen, die vorstehende Gleichung, so ist:

$$l d\beta \cdot \frac{l^2(x+dx) - l^2 x}{l d\beta} = \overset{d\beta\, d\beta}{\lambda\ \ \nu}\, dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (206)$$

$$l^2(x+dx) - l^2 x = dy. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (207)$$

Das gesuchte Integral ist also $l^2 x = l(lx)$.

c) Integration von $\frac{dx}{a+bx}$; — $[a+bx = \omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (208)$$

enn man numeralisiert:

$$1 + \frac{dx\, l d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (209)$$

Da in dem vorstehenden Ausdruck die Differentialsumme aus ω und
z bilden ist (s. unten Gl. 211), die Differentialsumme von ω aber
$a + bx + b\,dx = \omega + b\,dx$ ist, so muss zunächst dx und dy mit b
iziert werden. Es ergiebt sich dann:

$$1 + \frac{b\,dx\, l d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (210)$$

. Gl. 198, 199):

$$\left(\frac{\omega + b\,dx}{\omega}\right)^{l d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (211)$$

ogarithmalisiert man diesen Ausdruck (s. Gl. 200, 206), so ist:

$$l(\omega + b\,dx) - l\omega = \overset{d\beta\, d\beta}{\lambda\ \ \nu}\, b\, dy = b\, dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (212)$$

nn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{1}{b} l(\omega + b\,dx) - \frac{1}{b} l\omega = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (213)$$

as gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b} l(a + bx.)$

d) Integration von $\frac{x\,dx}{a+bx^2}$; — $[a+bx^2=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{x\,dx}{\omega}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Numeralisiert man, so ist:

$$1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Da aus ω und $x\,dx$ die Differentialsumme gebildet wird, die Diffe
summe von ω aber $a+bx^2+2bx\,dx=\omega+2bx\,dx$ ist, so muss
stehender Gleichung dx und dy mit $2b$ multipliziert werden. Es is

$$1+\frac{2bx\,dx\,l\,d\beta}{\omega}=\overset{d\beta}{\nu}\,2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$\left[\frac{\omega+2bx\,dx}{\omega}\right]^{l\,d\beta}=\overset{d\beta}{\nu}\,2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$l\,(\omega+2bx\,dx)-l\omega=\overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\ \nu}\,2b\,dy=2b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2b}\,l\,(\omega+2bx\,dx)-\frac{1}{2b}\,l\omega=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{2b}\,l\,(a+bx^2)$.

§ 13.

Irrationale Integrale.

a) Integration von $dx\sqrt{a+bx}$; — $[a+bx=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\sqrt{\omega}\,dx=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Numeralisiert man, so ist:

$$1+\sqrt{\omega}\,dx\,l\,d\beta = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots \quad (221)$$

Multipliziert man, um das Numeral links auf die Form $1+\frac{d\omega}{\omega}$
ngen, Zähler und Nenner des Differentials mit ω, so ist:

$$1+\frac{\omega\sqrt{\omega}\,dx\,l\,d\beta}{\omega} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots \quad (222)$$

ersetzt man zu dem gleichen Zwecke $\omega\sqrt{\omega}$ in die Potenz, so ver-
lt sich die vorstehende Gleichung in folgenden Ausdruck:

$$\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\omega\sqrt{\omega}} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots \quad (223)$$

die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\omega\sqrt{\omega}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\omega\sqrt{\omega}}}{d\beta^{\omega\sqrt{\omega}}} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad \ldots\ldots \quad (224)$$

ogarithmalisiert man nun, so erhält man folgende Gleichung:

$$\omega\sqrt{\omega}+\omega\sqrt{\omega}\cdot\frac{dx}{\omega}-\omega\sqrt{\omega} = {}^{d\beta\,d\beta}\lambda\,\nu\,dy = dy \quad \ldots \quad (225)$$

$$\omega^{\frac{3}{2}}+\omega^{\frac{1}{2}}dx-\omega^{\frac{3}{2}} = dy \quad \ldots\ldots \quad (226)$$

un ist aber die Differentialsumme von $\omega^{\frac{3}{2}}$, welche zufolge des Sub-
nen in der Gl. 226 allein in Frage kommen kann:

$$(\omega+b\,dx)^{\frac{3}{2}} = \omega^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}\,\omega^{\frac{1}{2}}b\,dx \quad \ldots\ldots \quad (227)$$

c] muss in der Gl. 226 dx und dy mit $\frac{3b}{2}$ multipliziert werden, da-
n die Differentialsumme bilden kann. Es ist also:

$$\omega^{\frac{3}{2}}+\frac{3b}{2}\,\omega^{\frac{1}{2}}dx-\omega^{\frac{3}{2}} = \frac{3b}{2}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (228)$$

nn man aus der Gl. 227 die Differentialsumme substituiert:

$$(\omega+b\,dx)^{\frac{3}{2}}-\omega^{\frac{3}{2}} = \frac{3b}{2}\,dy \quad \ldots\ldots \quad (229)$$

und wenn man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{2}{3b}(\omega + b\,dx)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3b}\omega^{\frac{3}{2}} = dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{2}{3b}\omega\sqrt{\omega}$.

b) Integration von $\frac{dx}{\sqrt{a+bx}}$; — $[a+bx=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Diese, numeralisiert, ist:

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}} = {}^{d\beta}_{\gamma}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Multipliziert man, um das Numeral links auf die Form 1+ zu bringen, im Zähler und Nenner mit $\sqrt{\omega}$, so ist:

$$1+\frac{\sqrt{\omega}\,dx\,l\,d\beta}{\omega} = {}^{d\beta}_{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und versetzt man aus dem gleichen Grund $\sqrt{\omega}$ aus dem Zähler ferentials in die Potenz, so ergiebt sich:

$$\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}} = {}^{d\beta}_{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

ferner die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\sqrt{\omega}}\left(1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}}}{d\beta^{\sqrt{\omega}}} = {}^{d\beta}_{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega}\cdot\frac{dx}{\omega}-\sqrt{\omega} = {}^{d\beta\,d\beta}_{\lambda\ \ \nu}\,dy = dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$\sqrt{\omega}\left(1+\frac{dx}{\omega}\right)-\sqrt{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Da die Differentialsumme von $\omega = \omega + b\,dx$ ist, so muss in der vor-
ıdên Gleichung dx und dy mit b multipliziert werden. Da ferner
usdruck $1 + \frac{dx}{\omega}$ mit $\sqrt{\omega}$ unter denselben Exponenten $(= \frac{1}{2})$ ge-
werden muss, so ist dx und dy überdies mit $\frac{1}{2}$, also mit $\frac{b}{2}$ zu
lizieren. Die Gl. 236 resp. 237 nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\sqrt{\omega} + \frac{b\,dx}{2\sqrt{\omega}} - \sqrt{\omega} = \frac{b}{2}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (238)$$

Nun ist aber zufolge Gl. 17:

$$\sqrt{p + q\,dx} = \sqrt{p} + \frac{p\,dx}{2\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (239)$$

, wenn man $p = \omega$, $q = b$ setzt:

$$\sqrt{\omega + b\,dx} = \sqrt{\omega} + \frac{b\,dx}{2\sqrt{\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (240)$$

asselbe Resultat kann man übrigens ohne Zuhilfenahme der Gl. 17
lbar aus Gl. 238 gewinnen. Es ist nämlich:

$$\sqrt{\omega}\left(1 + \frac{b\,dx}{2\omega}\right) = (\text{Gl. } 23)\ \sqrt{\omega}\sqrt{1 + \frac{b\,dx}{\omega}} = \sqrt{\omega\left(1 + \frac{b\,dx}{\omega}\right)} =$$

$$\sqrt{\omega + b\,dx} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (241)$$

bstituiert man nun die Differentialsumme aus den Gl. 240 und 241
l. 238, so ist:

$$\sqrt{\omega + b\,dx} - \sqrt{\omega} = \frac{b}{2}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (242)$$

n man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{2}{b}\sqrt{\omega + b\,dx} - \frac{2}{b}\sqrt{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (243)$$

s gesuchte Integral ist also $\frac{2}{b}\sqrt{\omega}$.

c) Integration von $\frac{x\,dx}{\sqrt{a + bx^2}}$; — $[a + bx^2 = \omega]$.

D Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{x\,dx}{\sqrt{\omega}} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (244)$$

und wenn man numeralisiert:

$$1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man, um das Numeral links auf die Form $1+\frac{d\omega}{\omega}$ zu b
Zähler und Nenner des Differentials mit $\sqrt{\omega}$ multipliziert:

$$1+\frac{\sqrt{\omega}\,x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man endlich zu dem gleichen Zwecke $\sqrt{\omega}$ aus dem
in die Potenz versetzt:

$$\left(1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

woraus sich die Numeralgleichung ergiebt:

$$\frac{d\beta^{\sqrt{\omega}}\left(1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\sqrt{\omega}}}{d\beta^{\sqrt{\omega}}}=\overset{d\beta}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$\sqrt{\omega}+\sqrt{\omega}\cdot\frac{x\,dx}{\omega}-\sqrt{\omega}=\overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\ \nu}\,dy=dy \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$\sqrt{\omega}\left(1+\frac{x\,dx}{\omega}\right)-\sqrt{\omega}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Soll nun das Differentialbinomium links in $1+\frac{d\omega}{\omega}$ verwandel
den, so muss man $x\,dx$, weil $d\omega=2\,b\,x\,dx$ ist, mit $2\,b$ multipli
Da ferner das Differentialbinomium mit $\sqrt{\omega}$ unter denselben Expo
$(=\frac{1}{2})$ gebracht werden muss, so ist ferner dx mit $\frac{1}{2}$ zu multipli
Es muss also dx und dy mit $\frac{2b}{2}$, d. i. mit b multipliziert werden.
gemäss ergiebt sich aus den Gleichungen 249 und 250 folgender Aus

$$\sqrt{\omega}+\frac{b\,x\,dx}{\sqrt{\omega}}-\sqrt{\omega}=b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nun ist aber zufolge Gl. 19:

$$\sqrt{p+2\,q\,dx}=\sqrt{p}+\frac{q\,dx}{\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

h, wenn man $p = \omega$, $q = bx$ setzt:

$$\sqrt{\omega + 2bxdx} = \sqrt{\omega} + \frac{bxdx}{\sqrt{\omega}} \quad \ldots\ldots \quad (253)$$

Dasselbe Resultat kann auch ohne Zuhilfenahme der Gl. 19 unmittel- der Gl. 249 und 250 gewonnen werden, wenn man dx mit $\frac{2b}{2}$, dy mit ipliziert. Es ist dann (Gl. 250):

$$\sqrt{\omega}\left(1 + \frac{2bxdx}{2\omega}\right) = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt{1 + \frac{2bxdx}{\omega}} = \sqrt{\omega\left(1 + \frac{2bxdx}{\omega}\right)} = \sqrt{\omega + 2bxdx} \quad \ldots\ldots \quad (254)$$

ubstituiert man nun die Differentialsumme aus den Gl. 253 und die Gl. 251, so ist:

$$\sqrt{\omega + 2bxdx} - \sqrt{\omega} = bdy \quad \ldots\ldots \quad (255)$$

nn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{\sqrt{\omega + 2bxdx}}{b} - \frac{\sqrt{\omega}}{b} = dy \quad \ldots\ldots \quad (256)$$

as gesuchte Integral ist also $\frac{\sqrt{\omega}}{b} = \frac{\sqrt{a + bx^2}}{b}$.

d) Integration von $\frac{xdx}{\sqrt{(a + bx^2)^3}}$; — $[a + bx^2 = \omega]$.

le Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{xdx}{\omega\sqrt{\omega}} = dy \quad \ldots\ldots \quad (257)$$

meralisiert man, so ist:

$$1 + \frac{xdxld\beta}{\omega\sqrt{\omega}} = {}^{d\beta}\nu dy \quad \ldots\ldots \quad (258)$$

rsetzt man, um zum Ausdruck $1 + \frac{d\omega}{\omega}$ zu gelangen, $\frac{1}{\sqrt{\omega}}$ in die z, so ergiebt sich:

$$\left[1 + \frac{xdxld\beta}{\omega}\right]^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}} = {}^{d\beta}\nu dy \quad \ldots\ldots \quad (259)$$

und die Numeralgleichung:

$$\frac{d\beta^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}}\left(1+\frac{x\,dx\,l\,d\beta}{\omega}\right)^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}}}{d\beta^{\frac{1}{\sqrt{\omega}}}} = {}^{d\beta}\nu\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man, so ist:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}}+\frac{1}{\sqrt{\omega}}\cdot\frac{x\,dx}{\omega}-\frac{1}{\sqrt{\omega}} = {}^{d\beta\,d\beta}\lambda\,\nu\,dy = dy \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\left[\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\frac{x\,dx}{\omega\sqrt{\omega}}\right] = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nun ist aber zufolge Gl. 20:

$$\frac{1}{\sqrt{p+2q\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{p}}-\frac{q\,dx}{p\sqrt{p}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

folglich, wenn man in dieser Gl. $p = \omega$, $q = bx$ setzt:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega+2b\,x\,dx}} = \frac{1}{\sqrt{\omega}}-\frac{b\,x\,dx}{\omega\sqrt{\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Demgemäss muss in der Gl. 262, damit man aus dem in den Klam eingeschlossenen Ausdruck die Differentialsumme bilden kann, dx u mit b multipliziert werden. Es ist dann:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\left[\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\frac{b\,x\,dx}{\omega\sqrt{\omega}}\right] = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder, wenn man die Differentialsumme aus Gl. 264 substituiert:

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}}-\frac{1}{\sqrt{\omega+2b\,x\,dx}} = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Giebt man der Integralgleichung durch Zeichenwechsel ihre ge liche Form und befreit man dy von der Konstante, so ist:

$$-\left[\frac{1}{b\sqrt{\omega+2b\,x\,dx}}-\frac{1}{b\sqrt{\omega}}\right] = dy \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das gesuchte Integral ist also $-\frac{1}{b\sqrt{\omega}}$.

c) Integration von $\frac{dx}{\sqrt{(a+bx^2)^3}}$; — $[a+bx^2=\omega]$.

Beträchtlich complizierter als die bisherigen Fälle ist die Integration stehenden Differentials, und zwar aus dem Grunde, weil $a+bx^2=\omega$ erentialsumme $\omega+2bxdx$ ergiebt, während das gegebene Differential ir ersten Grades ist. Am einfachsten wäre nun, dx und dy mit x tiplizieren; aber die bisher dargestellten Methoden gewähren uns ittel, x auf der rechten Seite in $x+dx$ zu verwandeln und dann dieser Variablen zu befreien. Man muss desshalb zu einer Substi- seine Zuflucht nehmen.

ie Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\omega\sqrt{\omega}}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (268)$$

an multipliziert nun, da $\omega - bx^2 = a$ ist, dx mit $\omega - bx^2$, ferner a, so dass die vorstehende Gleichung folgende Gestalt annimmt:

$$\frac{(\omega-bx^2)\,dx}{\omega\sqrt{\omega}}=a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (269)$$

imeralisiert man, so ist:

$$1+\frac{(\omega-bx^2)\,dx\,l\,d\beta}{\omega\sqrt{\omega}}=\overset{d\beta}{\nu}\,a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (270)$$

$$1+\frac{dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}}-\frac{bx^2\,dx\,l\,d\beta}{\omega\sqrt{\omega}}=\overset{d\beta}{\nu}\,a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (271)$$

I liegt also in diesem Falle ein Differentialpolynom von der Form $\pm qdx$ vor. Sowie nun in früheren Fällen unser Bestreben dahin ge- t ar, dem Differentialbinom durch Versetzung einzelner Faktoren des ials in die Potenz die Form $1+\frac{dx}{\omega}$ oder $1+\frac{d\omega}{\omega}$ zu verleihen, ien wir hier durch eine analoge Operation bewirken, dass das ialtrinom die Gestalt $1\pm\frac{dx}{x}\pm\frac{d\omega}{\omega}$ oder $1\pm\frac{d\omega}{\omega}\pm\frac{d\omega}{\omega}$ an- . Dies wird, wie leicht ersichtlich ist, bei dem Ausdruck $\frac{dx\,l\,d\beta}{\sqrt{\omega}}$ l erreicht werden, dass man denselben mit $\sqrt{\omega}$ multipliziert und vidiert. Die Integrabilität des Trinoms in einem geschlossenen hängt davon ab, dass diese Operationen auch in dem Ausdruck $\frac{x\,l\beta}{f_{(}}$ die erforderlichen Änderungen bewirken.

Nimmt man nun diese Operationen vor, so ist:

$$1+\frac{x}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{dxld\beta}{x}-\frac{bxdxld\beta}{\omega}\right]=\overset{d\beta}{\nu}ady \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Versetzt man nun $\frac{x}{\sqrt{\omega}}$ in die Potenz, so ist:

$$\left[1+\frac{dxld\beta}{x}-\frac{bxdxld\beta}{\omega}\right]^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}}=\overset{d\beta}{\nu}ady \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man die Numeralgleichung bildet:

$$\frac{d\beta^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}}\left(1+\frac{dxld\beta}{x}-\frac{bxdxld\beta}{\omega}\right)^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}}}{d\beta^{\frac{x}{\sqrt{\omega}}}}=\overset{d\beta}{\nu}ady \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man so ist (s. Gl. 55):

$$\frac{x}{\sqrt{\omega}}+\frac{x}{\sqrt{\omega}}\left[\frac{dx}{x}-\frac{bxdx}{\omega}\right]-\frac{x}{\sqrt{\omega}}=\overset{d\beta\,d\beta}{\lambda\ \nu}ady=ady$$

oder:

$$\frac{x}{\sqrt{\omega}}\left[1+\frac{dx}{x}-\frac{bxdx}{\omega}\right]-\frac{x}{\sqrt{\omega}}=ady \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Nun ist aber zufolge Gl. 5:

$$1+\frac{dx}{x}-\frac{bxdx}{\omega}=\frac{1+\frac{dx}{x}}{1+\frac{bxdx}{\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

wobei zu bemerken ist, dass $-\frac{bxdx}{\omega}$ jedenfalls mit verändertem
tivem) Verbindungszeichen in den Nenner versetzt werden muss, we
Differentialsumme von $\omega = a + bx^2$ nur positive Differentiale, nä
$+ 2bxdx$ liefert.

Substituiert man nun den Bruch aus der Gl. 277 in die Gl. 276,

$$\frac{x}{\sqrt{\omega}}\cdot\frac{1+\frac{dx}{x}}{1+\frac{bxdx}{\omega}}-\frac{x}{\sqrt{\omega}}=ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Die Multiplikation von x mit $1+\frac{dx}{x}$ ergibt, wie leicht ersic
ist, die Differentialsumme $x + dx$.

Damit aber auch aus $\sqrt{\omega}\left(1+\frac{bxdx}{\omega}\right)$ die entsprechende Diffe-
alsumme gebildet werden kann, muss das Differential im Zähler und
ıer mit 2 multipliziert werden. Es ist dann:

$$\sqrt{\omega}\left(1+\frac{bxdx}{\omega}\right)=\sqrt{\omega}\left(1+\frac{2bxdx}{2\omega}\right)=\sqrt{\omega}\cdot\sqrt{1+\frac{2bxdx}{\omega}}=$$

$$\sqrt{\omega\left(1+\frac{2bxdx}{\omega}\right)}=\sqrt{\omega+2bxdx} \quad . \quad (279)$$

Nimmt man nun in der Gl. 278 die Multiplikation und die anderen in
79 angedeuteten Operationen wirklich vor, so ist:

$$\frac{x+dx}{\sqrt{\omega+2bxdx}}-\frac{x}{\sqrt{\omega}}=ady \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (280)$$

lwenn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{x+dx}{\sqrt{\omega+2bxdx}}-\frac{1}{a}\cdot\frac{x}{\sqrt{\omega}}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (281)$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{x}{a\sqrt{\omega}}$.

f) Integration von $\frac{dx}{\sqrt{a^2+b^2x^2}}$; $-[a^2+b^2x^2=\omega]$.

Die Fundamentalgleichung ist:

$$\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (282)$$

Da $d\sqrt{\omega}=\frac{b^2xdx}{\sqrt{\omega}}$ ist, so müsste dx und dy mit Rücksicht auf
peration in Gl. 286 mit bx multipliziert werden, was aber in An-
ıı; von dy nach dem früher Gesagten (S. 47) nicht zulässig ist. Es
d shalb hier die Addition des Hilfsdifferentials dx erforderlich. Es
dm:

$$\left(\frac{bxdx}{\sqrt{\omega}}+dx\right)z=\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (283)$$

ı:lıer Gleichung z jene Grösse bedeutet, mit der $\frac{bxdx}{\sqrt{\omega}}+dx$
ti iziert werden muss, damit der Wert des Differentials $\frac{dx}{\sqrt{\omega}}=dy$ unge-
ei bleibt.

Es ist nun zufolge Gl. 283, wenn man aus derselben den Wert z ermittelt:

$$z = \frac{1}{bx + \sqrt{\omega}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

und wenn man diesen Ausdruck in die Gl. 282 und 283 substituiert

$$\frac{\frac{bx\,dx}{\sqrt{\omega}} + dx}{bx + \sqrt{\omega}} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

Diese Gleichung ist zunächst, da $d\omega = \frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}}$ ist, mit b zu m plizieren, folglich:

$$\frac{\frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}} + b\,dx}{bx + \sqrt{\omega}} = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

Numeralisiert man nun, so ist (s. Gl. 70 und 24):

$$\left[1 + \frac{\frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}} + b\,dx}{bx + \sqrt{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = {}^{d\beta}_{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

oder:

$$\left[\frac{bx + b\,dx + \sqrt{\omega} + \frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}}}{bx + \sqrt{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = {}^{d\beta}_{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad ($$

oder, da $\sqrt{\omega} + \frac{b^2 x\,dx}{\sqrt{\omega}} = \sqrt{\omega + 2b^2 x\,dx}$ ist (s. Gl. 279):

$$\left[\frac{b\,(x + dx) + \sqrt{\omega + 2b^2 x\,dx}}{bx + \sqrt{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = {}^{d\beta}_{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad ($$

Logarithmalisiert man, und befreit man gleichzeitig dy von Konstante, so ist:

$$\frac{1}{b}\, l\left[b\,(x + dx) + \sqrt{\omega + 2b^2 x\,dx}\right] - \frac{1}{b}\, l\left[bx + \sqrt{\omega}\right] = dy \quad . \quad ($$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b}\, l\left[bx + \sqrt{\omega}\right]$.

§ 14.

fferentialsummen mit negativen Differentialen.

Die bisher dargestellten Methoden sind lediglich auf Differential-ien berechnet, welche positive Differentiale ergeben. So ist z. B. Differentialsumme von $a + bx = a + bx + bdx$. Enthält dagegen zu integrierende Differential ein Binom von der Form $a - bx$ $\cdot \frac{dx}{a - bx}\Big)$, so ist die Differentialsumme $a - bx - bdx$ und es n deshalb auf solche Differentiale die bisher dargestellten Numerali-igs- und Logarithmalisierungsformeln nicht angewendet werden. Hier eshalb besondere Methoden notwendig, die noch kurz darzustellen sind.

a) Integration von $\frac{dx}{a - bx}$; — $[a - bx = \omega]$.

Denken wir uns, um diese Methoden anschaulicher zu machen, dass bige Differential $\frac{dx}{a - bx}$ zu integrieren ist. Hier kann die Integra-uf eine dreifache Weise stattfinden.

. Vorerst kann man zu diesem Zweck die Numeralisierungs- und thmalisierungsformeln mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ verwenden. Wir erinnern . Gl. 63, 64), dass

$$\overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}(a\,dx) = 1 - a\,dx \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (291)$$

Wenn wir nun die Fundamentalformel für obige Integration bilden,

$$\frac{dx}{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (292)$$

nn man mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$ numeralisiert:

$$1 - \frac{dx\,l\,d\beta}{\omega} = \overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (293)$$

a $d\omega = -bdx$ ist, so muss dx und dy in vorstehender Gleichung ultipliziert werden, folglich ist:

$$1 - \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\omega} = \overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder (s. Gl. 210, 211):

$$\left(\frac{\omega - b\,dx}{\omega}\right)^{l\,d\beta} = \overset{\frac{1}{d\beta}}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Logarithmalisiert man nun die vorstehende Gleichung, um den ursp lichen Wert von dy wieder herzustellen, mit der Basis $\frac{1}{d\beta}$, so ist (Gl. 5

$$l\,d\beta \cdot - \frac{l(\omega - b\,dx) - l\,\omega}{l\,d\beta} = \overset{\frac{1}{d\beta}\ \frac{1}{d\beta}}{\lambda\ \ \nu}\, b\,dy = b\,dy \quad . \quad .$$

oder:

$$-\left[l(\omega - b\,dx) - l\,\omega\right] = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Schafft man das Minuszeichen am Anfang der vorstehenden Glei weg, so ist:

$$l\frac{1}{\omega - b\,dx} - l\frac{1}{\omega} = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

und wenn man dy von der Konstante befreit:

$$\frac{1}{b}\,l\frac{1}{\omega - b\,dx} - \frac{1}{b}\,l\frac{1}{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Das gesuchte Integral ist also $\frac{1}{b}\,l\frac{1}{\omega} = \frac{1}{b}\,l\frac{1}{a - bx}$.

II. Dasselbe Resultat kann jedoch auch durch eine Numeralisi und Logarithmalisierung mit der Basis $d\beta$ erreicht werden.

Man numeralisiert die Gl. 292 mit der Basis $d\beta$, also:

$$1 + \frac{dx\,l\,d\beta}{\omega} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

multiplizirt dx und dy mit b:

$$1 + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\omega} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

versetzt nun das linksseitige Numeral, um das Differential $\frac{b\,dx}{\omega}$ negativ zu machen, zufolge Gl. 10 in den Nenner:

$$\frac{1}{1-\frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\omega}} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (302)$$

$$\left[\frac{1}{\frac{\omega - b\,dx}{\omega}}\right]^{l\,d\beta} = \overset{d\beta}{\nu}\, b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (303)$$

Logarithmalisiert man nun mit der Basis $d\beta$, so ist:

$$l\,d\beta \frac{-\,l\frac{\omega - b\,dx}{\omega}}{l\,d\beta} = \overset{d\beta\ d\beta}{\lambda\quad \nu}\, b\,dy = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (304)$$

$$-\left[l\,(\omega - b\,dx) - l\,\omega\right] = b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (305)$$

Diese Gleichung stimmt mit der Gl. 297 überein und auch die folgenden Operationen sind völlig identisch.

III. Eine dritte, vielleicht die einfachste Methode besteht darin, dass man die Fundamentalgleichung, ebenso wie in der Gl. 300, mit $d\beta$ logarithmisiert und dann dx und dy mit der Konstante -1 multipliziert. Der weitere Verlauf der Operationen gestaltet sich genau so wie in den Gl. 209—212, nur dass das Verbindungszeichen des linkseitigen Numerals ω' in Folge der Multiplikation mit -1 negativ sind. Am Ende der Rechnung wird dy durch Zeichenwechsel von dem Minuszeichen befreit (siehe S. 35).

b) Integration von $\frac{dx}{a^2 - b^2x^2}$.

Aus den Gl. 208—213 und 292—299 ergiebt sich dass $\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\,l\,(a+bx)$, dagegen $\int \frac{dx}{a-bx} = \frac{1}{b}\,l\frac{1}{a-bx}$ ist. Findet also bei dem zu integrierenden Ausdruck eine Kombination von Differentialen mit positiven und negativen Differentialen statt (z. B. bei $\int \frac{c}{a^2 - b^2x^2} = \int \frac{dx}{(a+bx)\,(a-bx)}$), so wird auch eine analoge Kombination der Integrale eintreten.

Setzen wir nun der Kürze wegen $a + bx = \pi$, $a - bx = \varrho$, folglich $\pi + \varrho = 2a$, so wird die Fundamentalgleichung lauten:

$$\frac{dx}{\pi\,\varrho} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (306)$$

Da jedoch das Differential des Zählers im Ausdruck link Grades ist, während der Nenner $a^2 - b^2x^2$ die Variable x in der Potenz enthält, so müssen Zähler und Nenner auf den gleichen bracht werden. Dies kann in unserem Falle sehr leicht dadurch ge dass man dx mit $\pi + \varrho$, dy mit $2a$ multipliziert. Durch diese Substitution wird sowohl das Differential des Zählers als auch die Diff summe des Nenners auf die Form pdx gebracht, ohne dass es Gl. 271, 272) noch einer Division mit x bedarf. Es ist dann:

$$\frac{(\pi + \varrho)\,dx}{\pi\,\varrho} = 2a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

oder:

$$\frac{dx}{\pi} + \frac{dx}{\varrho} = 2a\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Da sowohl π als auch ϱ das Differential $b\,dx$ und zw das erstere $+ b\,dx$, das zweite $- b\,dx$ liefern, so muss obige G mit b multipliziert werden, also:

$$\frac{b\,dx}{\pi} + \frac{b\,dx}{\varrho} = 2ab\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Numeralisiert man diese Gleichung, so ist (s. Gl. 70):

$$1 + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\pi} + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\varrho} = \overset{d\beta}{\nu}\,2ab\,dy \quad . \quad . \quad .$$

Nun ist aber:

$$1 + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\pi} + \frac{b\,dx\,l\,d\beta}{\varrho} = \left[1 + \frac{b\,dx}{\pi} + \frac{b\,dx}{\rho}\right]^{l\,d\beta} = \text{(Gl. 6)}$$

$$\left[\frac{1 + \frac{b\,dx}{\pi}}{1 - \frac{b\,dx}{\varrho}}\right]^{l\,d\beta} = \left[\frac{\pi + b\,dx}{\pi} : \frac{\varrho - b\,dx}{\varrho}\right]^{l\,d\beta} = \left[\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} : \frac{\pi}{\varrho}\right]^{l}$$

Der dritte Ausdruck in vorstehender Gleichung ist aus dem dadurch entstanden, dass man zufolge Gl. 6 das Differential $\frac{bdx}{\varrho}$ ändertem Verbindungszeichen, ähnlich wie in der Gl. 302, in den versetzt, was deshalb notwendig ist, weil ϱ ein negatives Dif liefert. Der fünfte Ausdruck entsteht dadurch aus dem vierten, da sowohl den Dividend, als auch den Divisor mit π multiplizie $\varrho - b\,dx$ dividiert.

ubstituiert man nun den letzten Ausdruck der Gl. 311 in die), so ist:

$$\left[\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} : \frac{\pi}{\varrho}\right]^{l\,d\beta} = v^{\,2\,a\,b\,dy} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (312)$$

a hier offenbar ein rein logarithmisches Integral (s. § 12) vorliegt, rf es keiner weiteren Umformung, sondern man kann sofort durch hmalisierung den ursprünglichen Wert von dy herstellen. Es ist enn man gleichzeitig mit $l\,d\beta$ reduziert:

$$l\,\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} - l\,\frac{\pi}{\varrho} = 2\,a\,b\,dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (313)$$

n man dy von den Konstanten befreit:

$$\frac{1}{2\,a\,b}\,l\,\frac{\pi + b\,dx}{\varrho - b\,dx} - \frac{1}{2\,a\,b}\,l\,\frac{\pi}{\varrho} = dy \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (314)$$

s gesuchte Integral ist also $\frac{1}{2\,a\,b}\,l\,\frac{a + b\,x}{a - b\,x}$.

§ 15.

undzüge der neuen Integrationsmethode.

n Schluss dieses Aufsatzes mag eine kurze Zusammenfassung der ewonnenen Resultate bilden. Es konnte natürlich meine Absicht n, in dem engen Rahmen dieser Blätter ein vollständiges System n Integralrechnung zu bieten, vielmehr verfolgte ich lediglich den die praktische Anwendung der von mir erfundenen Rechnungs- auf die einfacheren Integrationen klarzulegen. Ich behalte mir ibrigen Teile der Integralrechnung in späteren Schriften auf Grund n Methoden darzustellen.

r schon jetzt kann ich im Hinblicke auf die von mir gewonnenen die Behauptung wagen, dass die heutige Integralrechnung neuen Rechnungsmethoden einer völligen Umgestaltung entgegen- endlosen Reduktions- und Rekursionsformeln, welche bisher die echnung zu einem so abschreckenden Gedächtniswerk gemacht erden verschwinden. An ihre Stelle werden einfache Integrations- treten, die nicht erheblich komplizierter sind als die Opera- r Differentialrechnung und die zugleich eine genetische, streng iftliche Ableitung der Integrale aus ihren Differentialen ermög-

lichen werden. Fast alle Methoden, welche nötig sind, um selbst d wickeltesten Integrale zu ermitteln, sind schon in der vorliegend handlung angedeutet. Ich hoffe dadurch das Resultat herbeizuführe Jedermann, der sich mit den neuen Rechnungsmethoden vertraut g hat, die Integrale ohne Hilfe von Integraltafeln und weitläufigen auf eine einfache Weise selbst berechnen kann.

In folgenden Punkten möchte ich die charakteristischen Eig lichkeiten der neuen Integrationsmethode zusammenfassen.

1. Nach der neuen Integrationsmethode wird das Integral durch dieselben, wenngleich in entgegengesetzter Richtung vorgeno Operationen aus dem Differential gewonnen, wie umgekehrt das Dif aus dem Integral (vgl. bes. § 7 und 8). Der inverse Charakter de rentiation und der Integration tritt dadurch auch in der Rechnu zu Tage. Bisher trug die Auffindung der Differentiale und der I einen wesentlich verschiedenen Charakter, indem die ersteren a Integralen durch wissenschaftliche Methoden abgeleitet, die letzte rein empirischem Wege erraten werden.

2. Das Ziel der neuen Integrationsmethode ist die Ableitu Integralgleichung (s. § 6) aus dem gegebenen Differential. Aus der I gleichung kann dann das Integral ohne Schwierigkeit gefunden we

3. Zur Auffindung des Integrals genügt in der Regel auc die Berechnung der blossen Differentialsumme, indem man in dieser setzt (s. § 6 und Gl. 112—116). Die blosse Berechnung der Diff summe gewährt namentlich bei verwickelten Integralen den Vorteil g Uebersichtlichkeit, ihre Ergebnisse sind aber niemals vollständig weil bei manchen Funktionen die Differentialsumme und der hend nicht mit Sicherheit geschieden werden können (siehe zu Gl. 180).

4. Da die Konstanten weder bei Ableitung der Integralgl noch auch bei jener der Differentialsumme eine Aenderung erlei kann man sie, dafern sie nicht im weiteren Fortgang der Operati eliminieren sind, gleich beim Beginn der Rechnung auf die rech der Gleichung (dy) schaffen (s. z. B. Gl. 172).

5. Die nämliche Operation ist dagegen in Ansehung der v Bestandtheile des zu integrierenden Differentials (in Betreff der halb nicht zulässig, weil dy durch die Numeralisierungs- und L malisierungs-Operationen nicht verändert wird, folglich die Umw der auf die rechte Seite übertragenen x in die Form $x + dx$ nicht ist. Die Auffindung von Rechnungsoperationen, welche die Erreichun Zweckes ermöglichen, würde folglich eine wesentliche Verbesser neuen Integrationsmethoden bedeuten.

Bevor zur Numeralisierungs- und Logarithmalisierungs-Operation
ten wird, ist das zu integrierende Differential — in der Regel durch
kation mit Konstanten — so umzugestalten, dass später die Bildung
erentialsumme keinen Schwierigkeiten begegnet. Die Multiplikation
ision mit den Konstanten kann auch später erfolgen, so lange das
tialbinomium sich noch nicht in die Differentialsumme verwandelt
sie bezieht sich auch in diesem Fall lediglich auf die beiden
tiale der Gleichung (auf dx und dy), mögen inzwischen durch
ig der Operationen auch andere variable und konstante Bestand-
inzugetreten sein (s. § 6). Ich habe wegen der grösseren Anschau-
regelmässig diese letztere Methode gewählt.

Nunmehr wird die Fundamentalgleichung numeralisiert. Rücksicht-
zu integrierenden Differentials wird die Numeralisierung wirklich
n, rücksichtlich des rechts stehenden Ausdrucks dy nur symbolisch
tet.

Bei den logarithmischen Integralen (s. § 12 und auch § 14) wird
ie ad 7) erwähnte Numeralisierung bewirkt, dass das Differential
der Form $1 + \frac{dx l d\beta}{x}$ oder allgemeiner in der Form $1 + \frac{d\omega l d\beta}{\omega}$
, wo ω jede beliebige Funktion von x bedeutet. Tritt dieser
so braucht man jenem Ausdruck nur die Form $\left(\frac{x+dx}{x}\right)^{l d\beta}$
$\left(\frac{\omega + d\omega}{\omega}\right)^{l d\beta}$ zu geben und durch Logarithmalisierung den ur-
hen Wert von dy herzustellen, um zur Integralgleichung zu

In allen übrigen Fällen muss das Numeral des zu integrierenden
als vor der Logarithmalisierung noch einer Umgestaltung unter-
erden, welche den Zweck hat, dasselbe auf die Form
$\frac{d\beta}{\ }$ oder $1 + \frac{d\omega l d\beta}{\omega}$ zu bringen. Diese Umgestaltung erfolgt
eise, dass alle übrigen variablen oder konstanten Bestandtheile
rals, welche nicht ohnedies durch den Lauf der weiteren Operationen
werden, in die Potenz zu versetzen sind.

Sobald die ad 9) bezeichnete Operation vollzogen ist, kann zur
ler Numeralgleichung geschritten werden. Diese erfolgt in der
ass man die Basis $d\beta$ zu derselben Potenz erhebt wie das Numeral
) und dieses letztere mit dem so gefundenen Ausdruck gleich-
ltipliziert und dividiert (s. sämmtliche Integrationen mit Ausnahme
ithmischen Integrale).

11. Die Numeralgleichung ist der Mittelpunkt der neuen Differentiati und Integrationsmethode, ihre Auffindung das eigentliche Ziel sowohl der Differentiation als auch bei der Integration. Die Logarithmalisier der Numeralgleichung ohne die in Nr. 9 erwähnte Multiplikation Division ergibt das Differential, mit derselben dagegen das Inte (s. bes. zu Gl. 92, 105).

12. Sobald die Numeralgleichung gefunden ist, wird dieselbe logar malisiert und auf diese Weise der durch die frühere Numeralisier (Nr. 7) veränderte Wert von dy wieder hergestellt. Da auf der rec Seite der Gleichung die Numeralisierungs- und Logarithmalisieru Operationen nur angedeutet werden (z. B. $\overset{d\beta}{\lambda}\ \overset{z\beta}{\nu}\ dy$), so können die be sich aufhebenden Zeichen weggelassen werden. Das auf der linken S der Gleichung stehende, der Logarithmalisierung wirklich unterzog Numeral ist durch geeignete Umgestaltungsoperationen auf die Form Integralgleichung (Differentialsumme und Subtrahend) zu bringen.

13. Enthält dy auf der rechten Seite der Gleichung Konsta (Nr. 4, 6 und 12), so ist dy nach Bildung der Differentialsumme und Subtrahenden (Nr. 12) durch geeignete Operationen von denselben befreien. Der sodann erscheinende Ausdruck ist die Integralgleichung, der sich das Integral unmittelbar ergibt.

14) Ist das zu integrierende Differential positiv, während die in d selben enthaltenen endlichen Variablen auf ein negatives Differential füh

so ist die Numeralisierung und die Logarithmalisierung mit der Basis

vorzunehmen. Auch kann zu diesem Zwecke der Satz benützt wer dass jedes Differentialbinomium gleich ist der Einheit, dividiert durch selbe Binom, jedoch mit verändertem Verbindungszeichen. Endlich drittens in diesem Falle auch die Multiplikation von dx und dy mit Konstante — 1 zulässig. (S. § 14.)

Ueber

die Entwickelung

r höheren Differentiale

zusammengesetzter und implicirter Functionen.

INAUGURAL-DISSERTATION

der philosophischen Facultät zu Jena

zur

Erlangung der Doctorwürde

vorgelegt

von

F. Bessell.
in Hildesheim.

Jena 1872.
Druck von W. Ratz.

). **Problem.** Eine Grösse w sei Function von m Veränderlichen $\overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{m}{x}$, lbst aber seien wieder abhängig von den r Argumenten $\overset{1}{t}, \overset{2}{t}, \overset{3}{t}, \ldots \overset{r}{t}$. Der Zu-hang zwischen w und dem x sei gegeben durch die Gleichung $F(w, \overset{1}{x}, \overset{2}{x}, \ldots \overset{m}{x}) = 0$ Abhängigkeit der x von den t durch die m Gleichungen $\overset{1}{\varphi}(\overset{1}{x_1} \ldots \overset{m}{x}; \overset{1}{t_1} \ldots \overset{r}{t}) = 0$ $\overset{m}{x}; \overset{1}{t_1} \ldots \overset{r}{t}) = 0, \ldots \overset{m}{\varphi}(\overset{1}{x_1} \ldots \overset{m}{x}; \overset{1}{t_1} \ldots \overset{r}{t}) = 0.$

ıcht wird die Entwickelung des totalen Differentials d^{n+1} nach den Differentialen bhängigen t.

werden diese Aufgabe indictorisch behandeln und demnach folgende Fälle unter-:

Wenn sämmtliche Functionen entwickelte sind, und zwar

.) wenn nur eine vermittelnde Grösse und nur eine Unabhängige vorliegt

$$w = f(x) \qquad x = \varphi(t)$$

) wenn m vermittelnde Grössen da sind, doch nur eine Unabhängige

$$w = f(x, y, ..) \quad x = \varphi'(t) \quad y = \psi(t) \text{ etc.}$$

) wenn eine Vermittelnde und m Unabhängige in Frage kommen

$$w = f(x) \qquad x = \varphi(t, s, \ldots)$$

) wenn m Vermittelnde und r Unabhängige existiren

$$w = f(x, y, \ldots) \quad x = \varphi(t, s, ..) \quad y = \psi(t, s, ..)$$

Wenn die Functionen unentwickelt sind.

ıst beschäftigen wir uns mit der Betrachtung einer Determinante, auf welche ziehmenden Entwickelungen führen.

I.

§ 1. **Lemma.** Wenn in einer Determinante n^{ten} Grades alle diejenigen Elem entgegengesetzten Zeichen genommen werden, in welchen die Summe der horizont verticalen Stellenzeiger eine gerade Zahl ist; so wird dadurch die Determin $(-1)^n$ multiplicirt.

Beweis. Ist μ der horizontale und ν der verticale Index irgend eines Elem ist die genannte Aenderung der Zeichen äquivalent einer Multiplication jedes Elem $(-1)^{\mu+\nu-1}$. Jedes Glied der Determinante ist aber ein Product von n solchen El bei welchen die Summe sowohl der horizontalen als der verticalen Stellenzeiger = ist. Mithin hat die Multiplication jedes Elements durch $(-1)^{\mu+\nu-1}$ eine Multiplic des Gliedes durch $(-1)^{\frac{1}{2}n.(n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)-n}$ d. i. durch $(-1)^{nn}$ zur Folge; und $(-1)^{nn} = (-1)^n$, so ergiebt sich w. z. b. w.

§ 2. **Definition.** Mit Δ_0, Δ_1, $\Delta_2 \ldots \Delta_{n+1}$ wollen wir eine Reihe von Grös zeichnen, von denen jede folgende aus den vorhergehenden nach dem Recursions

$$\Delta_{n+1} = n_0 . a_1 b . \Delta_n + n_1 . a_2 b . \Delta_{n+1} + \ldots + n_n . a_{n+1} b . \Delta_0$$

abgeleitet wird; wobei n_0, n_1, .. n_n Binomial-Coefficienten, b dagegen so wie a_1, a beliebige Zahlen bedeuten sollen. Auch bleibt Δ_0 willkürlich.

Wo es erforderlich wird, die Abhängigkeit der Δ von den a und b ausdrückl vorzuheben, soll dies dadurch geschehen, dass wir statt des einfachen Zeichens Δ_i ben $\Delta_i (a_k, b)$.

§. 3. **Lehrsatz.** $\Delta_{n+1}(a_k, b) =$

$$\begin{vmatrix}
n_0 a_1 b, & -n_1 a_2 b, & -n_2 a_3 b, \ldots & (-1)^{n-2} n_{n-2} a_{n-1} b, & (-1)^{n-1} n_{n-1} a_n b, & (-1)^n n_n a_n \\
1, & (n-1)_0 a_1 b, & -(n-1)_1 a_2 b, \ldots & (-1)^{n-3} (n-1)_{n-3} a_{n-2} b, & (-1)^{n-2} (n-1)_{n-2} a_{n-1} b, & (-1)^{n-1} (n-1)_{n-1} \\
0, & 1, & (n-2)_0 a_1 b, \ldots & (-1)^{n-4} (n-2)_{n-4} a_{n-3} b, & (-1)^{n-3} (n-2)_{n-3} a_{n-2} b, & (-1)^{n-2} (n-2)_{n-2} \\
. & . & . \ldots & . & . & \\
0, & 0, & 0, \ldots & (-1)^0 2_0 a_1 b, & (-1)^1 2_1 a_2 b, & (-1)^2 2_2 a \\
0, & 0, & 0, \ldots & 1, & (-1)^0 1_0 a_1 b, & (-1)^1 1_1 a \\
0, & 0, & 0, \ldots & 0, & 1, & (-1)^0 0_0 a
\end{vmatrix}$$

ɜweis. Setzt man in der definitorischen Gleichung der Δ für n successive 0, 1, 2, .. n, man zur Bestimmung der (n+1) Grössen Δ_1, $\Delta_2 \ldots . \Delta_{n+1}$ eben (n+1) lineare Glei-n. Wenn man dieselben folgender Maassen schreibt:

$$\Delta_{n+1} - n_0 \,.\, a_1 b \,.\, \Delta_n - n_1 \,.\, a_2 b \,.\, \Delta_{n-1} \ldots . - n_{n-1} \,.\, a_n b \,.\, \Delta_1 = a_{n+1} b \,.\, \Delta_0$$
$$\Delta_n - (n-1)_0 \,.\, a_1 b \,.\, \Delta_{n-1} \ldots . - (n-1)_{n-2} \,.\, a_{n-1} b \,.\, \Delta_1 = a_n b \,.\, \Delta_0$$
$$\Delta_{n-1} \ldots . - (n-2)_{n-3} \, a_{n-2} b \,.\, \Delta_1 = a_{n-1} b \,.\, \Delta_0$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\Delta_1 = a_1 b \,.\, \Delta_0$$

ınt man, dass

$$\Delta_{n+1}(a_k, b) = \begin{vmatrix} a_{n+1} b \,.\, \Delta_0, & -n_0 \, a_1 b, & -n_1 \, a_2 b & , \ldots & - n_{n-1} \quad a_n \quad b \\ a_n \quad b \,.\, \Delta_0, & 1 & , -(n-1)_0 a_1 b, \ldots & - (n-1)_{n-2} \, a_{n-1} b \\ a_{n-1} \, b \,.\, \Delta_0, & 0 & , \quad 1 \quad , \ldots & - (n-2)_{n-3} \, a_{n-2} \, b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1 \quad b \,.\, \Delta_0, & 0 & , \quad 0 \quad , \ldots & 1 \end{vmatrix}$$

l. Macht man in dieser Determinante die erste Colonne zur letzten, was einer ation derselben mit $(-1)^{n+1}$ gleichkommt, und giebt alsdann denjenigen ihrer , bei welchen die Summe der horizontalen und verticalen Stellenzeiger eine ge-l ist, entgegengesetzte Zeichen, was nach Lemma § 1 wiederum eine Multiplica-Determinante mit $(-1)^{n+1}$ zur Folge hat; so ergiebt sich w. z. b. w.

Umgekehrt, wenn eine Determinante (n+1)ten Grades die im vorigen Lehrsatz ıe Form hat, so lässt sie sich aus den nach demselben Gesetz gebildeten De-en der niedereren Grade mittelst der Recursionsformel des § 2 ableiten.

Nehmen wir $\Delta_0 = 1$ und setzen successive n gleich 0, 1, 2, 3, 4 so haben wir die ille

$$\Delta_1 = a_1 b \qquad \Delta_2 = a_1^2 \,.\, b^2 + a_2 \qquad \Delta_3 = a_1^3 \,.\, b^3 + 3 a_1 a_2 \,.\, b^2 + a_3 \,.\, b$$
$$\Delta_4 = a_1^4 \,.\, b^4 + 6 a_1^2 a_2 \,.\, b^3 + (4 a_1 a_3 + 3 a_2^2) \,.\, b^2 + a_4 \,.\, b$$
$$\Delta_5 = a_1^5 \,.\, b^5 + 10 a_1^3 a_2 \,.\, b^4 + (10 a_1^2 a_3 + 15 a_1 a_2^2) \,.\, b^3 + (5 a_1 a_4 + 10 a_2 a_3) \,.\, b^2 + a_5 \,.\, b$$

ition. Den Coefficienten der i^{ten} Potenz von b in der Entwickelung von b) wollen wir durch $\overset{n+1}{A}_i$ bezeichnen; also dass, unter der Voraussetzung $\Delta_0 = 1$

$$\Delta_{n+1} = \overset{n+1}{A}_{n+1} . b^{n+1} + \overset{n+1}{A}_n . b^n + .. + \overset{n+1}{A}_i b^i + .. + \overset{n+1}{A}_1 . b = \sum_{i=1}^{i=n+1} \left(\overset{n+1}{A}_i \; b^i \right)$$

Corollar 1. Für jedes $i > n+1$ hat man $\overset{n+1}{A}_i = o$

Corollar 2. $\overset{n+1}{A}_1 = a_{n+1}$ **Corollar 3** $\overset{n+1}{A}_{n+1} = \overset{n+1}{a}_1$

§. 6. **Lehrsatz** $\overset{n-1}{A}_i = n_0 . a_1 \overset{n}{A}_{i-1} + n_1 . a_2 \overset{n-1}{A}_{i-1} + .. + n_{n-i+1} a_{n-i+2} \overset{i-1}{A}_{i-1}$

Der **Beweis** geht aus den Definitionen der Δ in §2 und der A in §5 hervor. Denn wen

$\Delta_{n+1} = \sum_{k=o}^{k=n} \left[n_k . a_{k+1} b . \Delta_{n-k} \right]$ für jedes Δ_{n-k} seine Entwickelung $\sum_{i=1}^{i=n-k} \left[\overset{n-k}{A}_i \; b^i \right.$

so erhält man als Coefficienten von b^i links $\overset{n+1}{A}_i$, rechts dagegen

$$\left[n_0 . a_1 \overset{n}{A}_{i-1} + n_1 . a_2 \overset{n-1}{A}_{i-1} \ldots + n_{n-i+1} a_{n-i+2} \overset{i-1}{A}_{i-1} \right] + \left[n_{n-1+2} a_{n-i+3} \overset{i-2}{A}_{i-1} + .. + n_n a_n \right.$$

Da aber nach Corollar 1 in § 5 sämmtliche A in der zweiten Parenthese Nu

so folgt w. z. b. w.

Corollar 1. $\overset{n+1}{A}_i$ ist eine homogene Function i^{ten} Grades der $a_1, a_2, \ldots a_{n-i+}$ unser Lehrsatz zeigt, dass diese Eigenschaft den $\overset{n+1}{A}_i$ zukommen wird sie den $\overset{n}{A}_{i-1}, \overset{n-1}{A}_{i-1}, \ldots \overset{i-1}{A}_{i-1}$ zukommt, da in der Gleichung desselben jed Grössen nur mit einem einzigen Factor a behaftet ist. Sie wird daher a gültig sein, wenn nur $\overset{1}{A}_1$ vom 1ten Grade ist. Nach Coroll. 2 oder Cor. ist aber $\overset{1}{A}_1 = a_1$; mithin w. z. b. w.

Corollar 2. Die Summe der Indices aller Factoren a in jedem Glie $\overset{n+1}{A}_i$ ist $(n+1)$.

Auch diese Eigenschaft besteht evidenter Maassen für $\overset{1}{A}_1$ und erhält sich folgenden A unserm Lehrsatz gemäss, weil daselbst in jedem Gliede die des Index von a_ν und des Ordnungszeigers von $\overset{n-\nu+1}{A}_{i-1}$ d. i. $\nu + (n-\nu+1)$ $(n+1)$ ist.

§. 7. Wenn wir in der Gleichung des vorigen Lehrsatzes für n successive 0, setzen, so erhalten wir

$$\overset{1}{A}_1 = a_1$$
$$\overset{2}{A}_2 = a_1^2 \quad \overset{2}{A}_1 = a_2$$
$$\overset{3}{A}_3 = a_1^3 \quad \overset{3}{A}_2 = 3a_1 a_2 \quad \overset{3}{A}_1 = a_3$$
$$\overset{4}{A}_4 = a_1^4 \quad \overset{4}{A}_3 = 6a_1^2 a_2 \quad \overset{4}{A}_2 = 4a_1 a_3 + 3a_2^2 \quad \overset{4}{A}_4 = a_4$$
$$\overset{5}{A}_5 = a_1^5 \quad \overset{5}{A}_4 = 10\,a_1^3 a_2 \quad \overset{5}{A}_3 = 10a_1^2 a_3 + 15a_1 a_2^2 \quad \overset{5}{A}_2 = 5a_1 a_4 + 10a_2 a_3 \quad \overset{5}{A}_1 = a_5$$

gemein ist $\overset{n+1}{A}_i$ eine Summe von Producten aus i Factoren, deren Index-Summe der Coroll. 2 ausgesprochenen Bedingung genügt. Jedes solcher Producte ist dabei mit numerischen Coefficienten versehen, auf dessen nähere Bestimmung es noch an-

Ein bestimmtes dieser Producte wollen wir etwa mit $a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2} \dots a_{i_\mu}^{i_\mu}$ bezeichnen, die beiden Bedingungen $i_1+i_2+..+i_\mu = i$ & $i_1 k_1 + i_2 k_2 + .. + i_\mu k_\mu = n+1$ erfüllt sein müssen. den hier entwickelt aufgeführten Specialwerthen von $\overset{n+1}{A}_i$ kommen stets sämmtliche e Producte der genannten Art vor. So z. B. hat man, wenn $n+1=5$ genommen r $i=5$ nur die einzige mögliche Zerlegung von 5, nämlich $5=1+1+1+1+1$, ur $\left\{\begin{matrix} k_1 = 1 \\ i_1 = 5 \end{matrix}\right\}$; für $i=4$ gleichfalls nur eine Zerlegung, $5=1+1+1+2$ mithin $\left\{\begin{matrix} k_2 = 2 \\ i_2 = 1 \end{matrix}\right\}$; für $i=3$ die beiden Möglichkeiten: $5=1+1+3$ und $5=1+2+2$, $\left\{\begin{matrix} k_1=1 & k_2=3 \\ i_1=2 & i_2=1 \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} k_1=1 & k_2=2 \\ i_1=1 & i_2=2 \end{matrix}\right\}$; ferner für $i=2$ auch zwei Fälle: $5=1+4$ $=2+3$ oder $\left\{\begin{matrix} k_1=1 & k_2=4 \\ i_1=1 & i_2=1 \end{matrix}\right\}$ und $\left\{\begin{matrix} k_1=2 & k_2=3 \\ i_1=1 & i_2=1 \end{matrix}\right\}$; endlich für $i=1$ die ein- egung $5=5$ oder $\left\{\begin{matrix} k_1=5 \\ i_1=1 \end{matrix}\right\}$.

Frage ob in jedem $\overset{n+1}{A}_i$ sämmtliche mögliche Producte der genannten Art vor- müssen oder nur gewisse von ihnen, wird sich gleichzeitig erledigen mit der rch dem Werthe des Coefficienten, der einem bestimmten Producte zukommt.

8 **Definition.** Den Coefficienten, welcher dem Producte $a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2} .. a_{k_\mu}^{i_\mu}$ in der klung von $\overset{n+1}{A}_i$ zukommt, wollen wir mit $\overset{n+1}{C}[i_1 k_1 + i_2 k_2 + .. + i_\mu k_\mu]$ bezeichnen. irwerden daher schreiben können

$$\overset{n+1}{A}_i = \Sigma \left\{ \overset{n+1}{C}[i_1 k_1 + i_2 k_2 + - + i_\mu k_\mu] . a_{i_1}^{k_1} a_{i_2}^{k_2} \dots a_{k_\mu}^{i_\mu} \right\}$$

wo sich das Summenzeichen auf alle die Fälle bezieht, in denen die beiden Bedingu

$$i_1 + i_2 + .. + i_\mu = \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} (i_\mu) = i$$

$$i_1 k_1 + i_2 k_2 + .. i_\mu k_\mu = \sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} (i_\mu k_\mu) = n + 1$$

erfüllt sind. Noch mehr kürzend wollen wir uns der Bezeichnung

$$A_i^{n+1} = \sum \left\{ C^{n+1} \left[\sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} (i_\mu k_\mu) \right] . \prod_{\mu=1}^{\mu=\mu} \left(a_{k_\mu}^{i_\mu} \right) \right\} \quad \text{bedienen}$$

wo also P als Producten-Symbol in dem Sinne

$$\prod_{\mu=1}^{\mu=\mu} \left(a_{i_\mu}^{k_\mu} \right) = a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2} \ldots a_{i_\mu}^{k_\mu} \quad \text{zu nehmen ist.}$$

Auch wird es gestattet sein, bei diesen $\prod_{\mu=1}^{\mu=\mu} \left(a_{i_\mu}^{k_\mu} \right)$ ebenso wie bei den Sum

$\sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} (i_\mu)$ und $\sum_{\mu=1}^{\mu=\mu} (i_\mu k_\mu)$ die Angabe der Index-Gränzen $\mu = 1$, $\mu = \mu$ zu unterlas

Ausserdem bezeichnen wir das Product $1.2.3 \ldots n$ mit Πn, so dass der B

Coefficient $n_m = \frac{\Pi n}{\Pi m \, \Pi (n-m)}$ wird.

§ 9. **Lehrsatz.** $C^{n+1} [i_1 k_1 + i_2 k_2 \ldots + i_\mu k_\mu] = \frac{\Pi(n+1)}{\Pi i_1 (\Pi k_1)^{i_1} . \Pi i_2 . (\Pi k_2)^{i_2} .. \Pi i_\mu (\Pi$

Beweis. Da der Satz sich für die ersten Werthe von n nämlich 0, 1, 2, 3, 4 bestätigt. so wird sich seine allgemeine Gültigkeit einfach durch die Schlussweise auf (n+1) erhärten lassen.

Zufolge Lehrsatz § 6 muss sich $C^{n+1} [\Sigma(i_\mu k_\mu)]$ aus allen den Coefficienten C welche in A_{i-1}^{n}, A_{i-1}^{n-1}, ... A_{i-1}^{i-1} denjenigen Producten $P(a_{k_\mu}^{i_\mu})$ zukommen, welche d Factoren a_{k_1}, a_{k_2}, .. a_{k_μ} enthalten, jedoch jedesmal mit Ausschluss eines von also aus den Coefficienten der Produkte $a_{k_1}^{i_1-1} a_{k_2}^{i_2} .. a_{k_\mu}^{i_\mu}$, $a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2-1} ... a_{k_\mu}^{i_\mu}, ..., a_{k_1}^{i_1} a_{k_2}^{i_2}$ Es ist daher

$$k_1 + i_2 k_2 + .. + i_\mu k_\mu] = \sum_{\nu=1}^{\nu=\mu} \left\{ {}_{n-1+k_\nu}^{n} C \; [i_1 k_1 + ..+(i_\nu - 1) k_\nu + .. + i_\mu k_\mu] \right\}$$

bleibt somit, da wir die Richtigkeit des Satzes für alle kleinern Zahlen als $(n+1)$ etzen, nur die Identität

$$\Pi(n+1) = \sum_{\nu=\mu}^{\nu=\mu} [\, {}_{n+1-k_\nu}^{n} \Pi(n+1-k_\nu) \,.\, i_\nu \,.\, \Pi k_\nu \,]$$

ispiel. Wenn $(n+1) = 6$, so hat man

$i = 6$ die 1 Zerlegung $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$i = 5$ „ 1 „ $6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 2$
$i = 4$ „ 2 Zerlegungen $6 = 1 + 1 + 1 + 3$ und $6 = 1 + 1 + 2 + 2$
$i = 3$ „ 3 „ $6 = 1 + 1 + 4,\ 6 = 1 + 2 + 3,\ 6 = 2 + 2 + 2$
$i = 2$ „ 3 „ $6 = 1 + 5,\ 6 = 2 + 4,\ 6 = 3 + 3$
$i = 1$ „ 1 Zerlegung $6 = 6$

st

$$b^6\left[\frac{a_1^{\,6}}{\Pi 1\,\Pi 6^1}\right] + b^5\left[\frac{a_1^{\,4}}{\Pi 4\;\Pi 1^4}\cdot\frac{a_2^{\,1}}{\Pi 1\,\Pi 2^1}\right] + b^4\left[\frac{a_1^{\,3}}{\Pi 3\,\Pi 1^3}\cdot\frac{a_3^{\,1}}{\Pi 1\;\Pi 3^1} + \frac{a_1^{\,2}}{\Pi 2\,\Pi 1^2}\cdot\frac{a_2^{\,2}}{\Pi 2\,\Pi 2^2}\right]$$

$$+ b^3\left[\frac{a_1^{\,2}}{\Pi 2\,\Pi 1^2}\cdot\frac{a_4^{\,1}}{\Pi 1\,\Pi 4^1} + \frac{a_1^{\,1}}{\Pi 1\,\Pi 1^1}\cdot\frac{a_2^{\,1}}{\Pi 1\,\Pi 2^1}\cdot\frac{a_3^{\,1}}{\Pi 1\,\Pi 3^1} + \frac{a_2^{\,3}}{\Pi 3\,\Pi 2^3}\right]$$

$$+ b^2\left[\frac{a_1^{\,1}}{\Pi 1\Pi 1^1}\cdot\frac{a_5^{\,1}}{\Pi 1\,\Pi 5^1} + \frac{a_2^{\,1}}{\Pi 1\;\Pi 2^1}\cdot\frac{a_4^{\,1}}{\Pi 1\,\Pi 4^1} + \frac{a_3^{\,2}}{\Pi 2\,\Pi 3^2}\right] + b^1\left[\frac{a_1^{\,6}}{\Pi 1\,\Pi 6^1}\right]$$

oder $\Delta_6 = b^6\,[a_1^{\,6}] + b^5 \,.\, [15\,a_1^{\,4} a_2] + b^4\,[20\,a_1^{\,3} a_3 + 45\,a_1^{\,2} a_2^{\,2}]$
$[15\,a_1^{\,2} a_4 + 60\,a_1\,a_2\,a_3 + 15\,a_2^{\,3}] + b^2\,[6\,a_1\,a_5 + 15\,a_2\,a_4 + 10\,a_3^{\,2}] + b\,.\,a_6.$

II.

iten wir nunmehr zur Behandlung des in § 0 gestellten Problems.

A. 1.

1 Wenn $w = f(x)$ und $x = \varphi(t)$, so findet man durch successive Differentiation,

dass $\frac{\partial^{n+1} w}{\partial t^{n+1}}$, welches mir durch w_{n+1} bezeichnen, eine Summe von Producten sei
in deren jedem eine der $n+1$ ersten Ableitungen von w, nach x genommen, mit e
wissen algebraischen ganzen Function der Ableitungen von x, nach t genommen,
cirt auftritt Bezeichnen wir die i^{te} solche Ableitung mit x_i und den eben erwähn
tor von $\frac{\partial^i w}{\partial x^i}$ durch v_i^{n+1}, so ist leicht zu erweisen, dass die Relation $v_i^{n+1} = v_{i-1}^{n}$
gelten werde, aus welcher sich dann auch ergiebt, dass v_i^{n+1} eine homogene Func
Grades von $x_1, x_2, \ldots x_{n+1}$ ist.

§ 12. **Lehrsatz.** Wenn $w = f(x)$ und $x = \varphi(t)$, so ist

$$w_{n+1} = \Delta_{n+1}\left(x_k, \frac{\delta w}{\partial x}\right)$$

wo mir das Zeichen δ in dem Sinne anwenden, dass nach den multiplicativen E
lungen, in denen solches δ auftritt, die Exponenten der Differentiale in Ordnung
der Differentiation verwandelt werden sollen.

Beweis. Da die v_i^{n+1} von der speciellen Natur der $f(x)$ unabhängig sind,
man letzterer eine willkührliche Form geben. Setzt man daher etwa $f(x) = e^x$
jedes $\frac{\partial^i w}{\partial x^i}$ ebenfalls $= e^x$ oder hier $= w$.

Man hat alsdann $w_1 = w\, x_1$ und findet hieraus durch successive Differentiatio

$$w_{n+1} = n_0\, w_n\, x_1 + n_1\, w_{n-1}\, x_2 + \ldots + n_{n-1}\, w_1\, x_n + n_n\, w_0\, x_{n+1}$$

Die Grössen w_k gehören daher zu denjenigen, welche wir in § 2 mit Δ be
haben und zwar ist jetzt $b = 1$, $a_k = x_k$, $\Delta_0 = w$ zu setzen. Mithin kann man
wickelung von w_{n+1} nach dem Lehrsatz des § 3 vornehmen. Und um alsdann
selben, welche ja zunächst nur für den Specialfall $w = e^x$ gilt, zu der allgemein
zu gelangen, überlege man, dass die specielle Entwickelung weder mehr noch
Glieder enthalten kaun, als die allgemeine, da bei der gewählten Form von $f(x)$
ihrer Ableitungen verschwindet, noch auch negativ wird.

nun nach § 11 feststeht, dass die v_i^{n+1} homogene Functionen der x_k von i^{ten} Grade wird man die allgemeine Entwickelung einfach dadurch erhalten, dass man jedem der speciellen, welches ein Product der x_k vom i^{ten} Grade enthält, den Factor zufügt.

n dies erreicht man aber auch dadurch, dass man in der Determinante, welcher em § 3 gemäss gleich ist, jedem Elemente mit Ausschluss derer in der letzten -Colonne und derjenigen, welche 1 oder 0 sind, den Factor $\frac{\delta w}{\partial x}$ hinzugefügt und m in der letzten Colonne w durch das ihm gleiche $\frac{\delta w}{\partial x}$ ersetzt. Alsdann hat man w.

Nach diesen Vorbereitungen liefert uns § 10 ohne Weiteres den die vorliegende edigenden Lehrsatz:

$$\frac{\partial^{n+1} w}{\partial t^{n+1}} = \Pi(n+1).\sum_{i=1}^{i=n+1}\left\{\frac{\delta^i w}{\partial x^i}\cdot\Sigma\left[P\left(\frac{x_{k\mu}^{i\mu}}{\Pi i_\mu\,(\Pi k_\mu)^{i\mu}}\right)\right]\right\}$$

wofern $\Sigma(i_\mu) = i$ und $\Sigma(i_\mu\ k_\mu) = n+1$.

A. 2.

Wenn $w = f(x, y)$ und $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, so findet man, indem man von ien δ in derselben Weise wie vorhin Gebrauch macht, successive

$$w_1 = \left[\frac{x_1}{\partial x} + \frac{y_1}{\partial y}\right]\cdot\delta w$$

$$w_2 = \left[\frac{x_1}{\partial x} + \frac{y_1}{\partial y}\right]^2\cdot\delta^2 w + \left[\frac{x_2}{\partial x} + \frac{y_2}{\partial y}\right]\cdot\delta w \text{ u.s.m.}$$

man aber noch die neue Symbolik: $\frac{x_k}{\partial x} + \frac{y_k}{\partial y} = \frac{u_k}{\partial u}$ ein, so erhält man sehr $= u_1\frac{\delta w}{\partial u}$, $w_2 = u_1{}^2\frac{\delta^2 w}{\partial u^2} + u_2\frac{\delta w}{\partial u}$ u.s.w. Vergleicht man diese Formeln mit den- lche sich bei dem unter A. 1 behandelten Falle gleich zu Anfang durch die

successiven Differentiationen von w nach t ergaben, so wird ersichtlich, dass jene übergehen, sobald man u an die Stelle von x setzt. Es werden daher auch die machten fernern Schlüsse ohne Weiteres auf diese neuen Formeln ausgedehnt dürfen, sobald nur nachgewiesen wird, dass sich hier die Coefficienten der $\frac{\delta^i w}{\partial u^i}$ n selben Gesetz aus den u_k bilden, wie dort die $\overset{n+1}{v}_i$ aus den x_k, was ohne alle Schw geschehen kann.

Demnach wird der vorliegende Fall unseres Problems erledigt durch den Leh

$$\frac{\partial^{n+1} w}{\partial t^{n+1}} = \Pi(n+1). \sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ \frac{\delta^i w}{\partial u^i} \Sigma \left[P\left(\frac{u_{k_\mu}^{i_\mu}}{\Pi i_\mu \, (\Pi k_\mu)^{i_\mu}} \right) \right] \right\}$$

wo wieder $\Sigma\,(i_\mu) = i$ und $\Sigma\,(i_\mu k_\mu) = n + 1$

A. 3

§ 15. Wenn $w = f(x)$ und $x = \varphi(t, s, ..)$, so hat man die bisherigen Resul in sofern zu verallgemeinern, als nun an die Stelle der bislang bloss unter Vorau eines einzigen Argumentes genommenen Differentiale ∂x sogenannte totale Diff treten müssen, welche wir wie gebräuchlich durch dx bezeichnen.

Da ist denn zunächst der Lehrsatz des § 12, und zwar unter Beschränkun Argumente, folgender Massen zu schreiben: $d^{n+1} w = \Delta_{n+1}\left[d x, \frac{\delta w}{\partial x} \right]$ wobei

$$d_k x = \left[\frac{\delta x}{\partial t} \cdot dt + \frac{\delta x}{\partial s} \cdot d s \right]^k.$$

Um alsdann aber weiter den hieraus hervorgehenden, dem § 13 entsprechend in deutlicher Weise kurz ausdrücken zu können, wollen wir uns gezackter Kla und zwar in Verbindung mit gewöhnlichen ungezackten in der Weise bedienen, ein Differentiale enthaltendes Polynom in 2 Parenthesen eingeschlossen vorkömm innern ungezackten und einer äussern gezackten, die Verwandlung der Expo Ordnungs-Indices der Differentiation bezüglich der letzten, äussern, Parenthese ni treten soll. Bei solcher Bezeichnungsweise ergiebt sich für den hier behandelten § 15 der Lehrsatz:

$$d^{n+1} w = \Pi(n+1). \sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ \frac{\partial^i w}{\partial x^i} \Sigma \left[P\left(\frac{\lessgtr \left(\frac{\delta x}{\partial t} dt + \frac{\delta x}{\partial s} ds \right)^{k_\mu \gtrless i_\mu}}{\Pi i_\mu \, (\Pi k_\mu)^{i_\mu}} \right) \right] \right\}$$

cond. $\Sigma\,(i_\mu) = i$ und $\Sigma\,(i_\mu k_\mu) = n + 1$.

A. 4.

§ 16. Wenn $w = f(x;y)$ und $x = \varphi(t,s)$, $y = \psi(t,s)$ ist, so erhält man nach logie von § 14 und unter Anwendung der dort gebrauchten Hülfs-Symbolik welche nun so gestaltet: $d^k u = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d^k x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot d^k y$, sofort den Lehrsatz:

$$w = \Pi(n+1). \sum_{i=1}^{i=n+1} \left\{ \frac{\delta^i w}{\partial u^i} \cdot \Sigma \left[P \left(\frac{\lessgtr \left(\frac{\delta u}{\partial x} \cdot dx + \frac{\delta u}{\partial y}\, dy \right)^{k_\mu} \gtrless^{i_\mu}}{\Pi i_\mu\, (\Pi k_\mu)^{i_\mu}} \right) \right] \right\}$$

B.

§ 17. Für den Fall dass die Functionen unentwickelte sind, wollen wir uns begnügen, e Betrachtungen sofort in derjenigen Allgemeinheit zu halten, welche dem unter A. 4 delten Falle entspricht, und demnach annehmen, es liegen die 3 Gleichungen vor:

$$F(w, x, y) = o \quad \varphi(x, y, t, s) = o \quad \psi(x, y, t, s) = o$$

nn t und s die Unabhängigen sind. Alsdann bestimmt sich nach Massgabe von § 16 hr $d^{n+1} w$ aus der Gleichung $\Delta_{n+1}\,(d^k u, \frac{\delta F}{\partial u}) = o$, wobei vorausgesetzt ist, dass esetzt habe:

$$d^k u = \frac{\partial u}{\partial w} \cdot d^k w + \frac{\partial u}{\partial x} \cdot d^k x + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot d^k y$$

Entwickelung der Determinante Δ_{n+1} kommen alle $d^k w$ vor, von $k = 1$ bis $k = n+1$ ar $d^{n+1} w$ in der ersten Potenz. Es ist also möglich letzteres Differential recursiv nmtlichen vorhergehenden von niederer Ordnung zu ermitteln; doch da die Gleichung = o eben in Bezug auf diese niederen Differentiale nicht mehr linear ist, so wird Allgemeinen $d^{n+1} w$ nicht mehr in Form einer einfachen Determinante darstellen Solches kann nur geschehen für $n = 0, 1, 2$. Wir glauben jedoch von der weitern ung dieses Gegenstandes hierorts um so eher Abstand nehmen zu sollen, als man n den allgemeinen Formeln in gegebenen Fällen kaum jemals Gebrauch machen, r es vorziehen wird, die jeweilig vorliegenden Gleichungen in ihrer concreten Form ndeln.

Berichtigungen.

Seite 3 Zeile 8 muss es heissen inductorisch statt indictorisch.

„ 4 „ 22 „ „ „ $n_2\, a_3\, b$ statt $-n_2\, a_3\, b$

„ 6 „ 4 „ „ „ A_i^{n+1} statt A_1^{n-1}.

„ 6 „ 8 „ „ „ $+\left[n_{n-i+2}\right.$ statt $+\left[n_{n-1+2}\right.$

„ 7 „ 9 „ „ „ $a_{k\mu}^{i\mu}$ statt $a_{i\mu}^{i\mu}$

„ 7 „ 22 „ „ „ $a_{k_2}^{i_1}\, a_{k_2}^{i_2}$ statt $a_{k_2}^{i_1}\, a_{k_2}^{i_1}$

„ 8 „ 7 „ „ „ $a_{k_2}^{i_2} \ldots a_{k\mu}^{i\mu}$ statt $a_{2}^{i_2} \ldots a_{i\mu}^{k\mu}$

„ 8 „ 8 „ „ „ $P\left(a_{k\mu}^{i\mu}\right)$ statt $P\left(a_{i\mu}^{k\mu}\right)$.

Estratto dalla *Rivista di Matematica* — Anno 1892, pag. 38-41.

Sull'infinitesimo attuale.[1]

Osservazioni di Rodolfo Bettazzi.

1. Son lieto che le mie « Osservazioni all'articolo del Dr Vivanti ull'*Infinitesimo attuale* » (V. *Rivista*, vol. I, pag. 174) abbiano o motivo ad un nuovo ed interessante scritto dello stesso autore ; pag. 248): e constato con piacere come regni fra noi due l'ac- lo completo sulle questioni principali — 1° Il concetto d'infinitesimo ıale non è contradditorio, in quanto esistono classi (proprie) di ndezze nelle quali per due grandezze opportune A, B si ha $nA < B$ lunque sia n intero, e quindi A è da dirsi un infinitesimo (attuale) etto a B (classi di 2ª specie) (2). 2° Nella classe dei segmenti de- ati allo studio dei fenomeni naturali è da escludersi il segmento nitesimo.

Noto peraltro che l'autore non approva i miei argomenti relativi 2ª questione, là dove io dico che il segmento attualmente infini- mo non esiste per ragione di analogia con quello che si riscontra ratica *dentro i limiti delle nostre osservazioni;* ritenendo egli r *necessario* per la natura stessa della nostra mente il fatto che io letto essere soltanto *opportuno* come rappresentazione della realtà ta su osservazioni necessariamente limitate, vale a dire la conti- à della classe degli ordinari segmenti, che esclude l'esistenza del- initesimo. Essendo la questione entrata così nel campo filosofico, e io non volevo condurla perchè affatto profano ai relativi studi, intendo aprire la discussione in quell'indirizzo. Mi limito ad os- are che la questione strettamente matematica alla quale intendevo starmi può dirsi esaurita; inquantochè definita la retta, e definiti gmenti come sue parti, ritenendo per essi i consueti concetti di

---

1) V. *Rivista*, anno I, pagg. 135, 174, 248.

2) V. per le denominazioni usate la mia *Teoria delle grandezze*, § 58.

uguale, maggiore, minore, somma e differenza è *logicamente* libe
scelta fra i due postulati « La classe dei segmenti è connessa » e
classe dei segmenti non è connessa », i quali conducono rispet
mente alla non esistenza ed all'esistenza di coppie di segmenti di
uno è infinitesimo rispetto all'altro.

2. Mi siano permesse poche parole su una delle osservazion
dettaglio che io facevo all'articolo del Dr Vivanti (V. § 3 del mio
ticolo) e che a lui non sembra fondata (V. § 7 del suo 2° articol

Io dissi *non esser provato* che il numero transfinito del Canto
la più alta espressione del numero: e il Dr Vivanti mi giudica in
rore, giacchè, come egli scrive, « Un numero transfinito non è a
« che il concetto che si ottiene da un insieme ben ordinato, face
« astrazione dalla natura speciale dei suoi elementi: per modo ch
« qualunque insieme bene ordinato corrisponde *ipso facto* un nur
« transfinito ». Ma, domando, e se una grandezza non si può defi
come un insieme bene ordinato, quale numero transfinito le corris
derà? O piuttosto tutte le grandezze sono da ritenersi quali insi
bene ordinati? Siccome quest'ultima cosa non è da affermarsi in
nerale, dato il concetto comune di grandezza, così mi pare chiar
insufficienza del numero transfinito come concetto corrispondente
grandezze, a meno che o ci si limiti a loro classi speciali, o si
giunga qualcosa di più all'idea che ordinariamente si ha di esse.

A quest'ultimo modo si attiene del resto per il caso dei segm
l'autore, il quale così prosegue: « Ora nel caso nostro abbiamo a
« appunto con un insieme bene ordinato, e cioè con una serie di
« menti infinitesimi tutti eguali, disposti l'uno di seguito all'altro so
« una linea retta ». Mi pare chiaro che qui si enuncia una ipo
nuova ed indipendente, e non un fatto necessariamente incluso
concetto di segmento infinitesimo. Le grandezze comuni sono comp
di parti che si seguono, ma quando queste sono finite, cioè della st
natura delle grandezze che esse ricompongono; nulla invece mi p
che l'osservazione o la logica c'insegnino circa il modo in cui si d
concepire una grandezza come insieme di altre che non sono della
stessa natura. E se manca questa disposizione dei segmenti infinites
che fa del segmento finito un insieme bene ordinato, manca l'appog
che per il suo assunto l'autore chiede alla dimostrazione del Ca
circa la non esistenza dell'infinitesimo.

3. Faccio un'ultima osservazione che non riguarda il merito d
questione, ma solo un'inesattezza che io ho creduto vedere in una
mostrazione del Dr Vivanti (V. suo 1° articolo, § 10; 2° art., §

» art., § 4) e che consiste nel concludere che se due segmenti uguali
o ciascuno somma di segmenti tutti uguali, gli uni e gli altri in
nero infinito e di egual potenza, devono essere i segmenti compo-
ti la 1ª somma uguali a quelli componenti la 2ª. Se l'esempio che
citato ad illustrazione di quella inesattezza (cioè che infiniti seg-
ti uguali fra loro, anche se disuguali ad altri infiniti pure uguali
loro, possono, sommati, riprodurre la stessa semiretta di questi) non
alido a confutare il ragionamento del Dr Vivanti perchè, come egli
, « la semiretta è un segmento infinito ed s (segmento) è finito »,
nulla prova che quanto può dirsi per un segmento infinito, possa
plicarsi senz'altro ad un segmento finito e viceversa » sussiste per
» ancora la mia obiezione che egli cita un teorema vero per un
ero finito di segmenti finiti, usandolo per un numero infinito di
enti infinitesimi, obiezione che può anche ricavarsi dalle stesse
parole ora citate, giacchè i vocaboli usati, infinito e finito, o finito
finitesimo, hanno un significato che è differente soltanto in modo
ivo.
di più, siccome l'autore osserva, per sostenere la sua dimostra-
, che data l'esistenza dei segmenti infinitesimi $\frac{s}{i}$ ed $\frac{s}{i_1}$ (dove s
segmento finito ed i, i_1 sono numeri transfiniti) si potrebbe con-
re dover essere s parte di sè stesso « ciò che è contrario alla
prietà caratteristica dei segmenti finiti », io dico invece che questa
addizione non c'è, altro che se si ammette già la non esistenza
nfinitesimo, contro l'ipotesi da cui si muove: giacchè la differenza
e la sua parte s_1 potrebbe consistere appunto in un segmento
tesimo, ed s, s_1 sarebbero allora da dirsi uguali — così come due
nfiniti (per es.: due semirette) sono uguali anche se differiscono
ro per una grandezza finita (segmento) da dirsi infinitesima ri-
» ad essi.

Nel terminare debbo rendere vive grazie al Chmo Dr Vivanti per
cussione che si è compiaciuto di sostenere con me su un argo-
» così interessante: del quale altro per ora non scrivo, ritenendo
detto quanto era il caso di esporre sotto la modesta forma di
ervazioni ».

Torino, 21 dicembre 1891.

Tip. Guadagnini e Candellero, via Gaudenzio Ferrari, 3 - Torino.

R. BETTAZZI

—

EORIA DEI LIMITI

PARTE VII DEL FORMULARIO

pubblicato dalla *Rivista di Matematica*.

TORINO
TIPOGRAFIA V. FODRATTI & E. LECCO
Via Gaudenzio Ferrari, 3.
1894

Sulla Parte VII del Formulario - Teoria dei limiti.

In questa parte del formulario abbiamo esposto le proprietà dei
ti delle funzioni reali di variabili reali, presi quando la variabile
pendente percorre i valori di un gruppo tendendo al limite supe-
e infinito.

Abbiamo esaminato il concetto di limite (più vasto di quello ordi-
amente considerato) di cui si hanno tracce in Cauchy, in Abel ed
ıe in autori anteriori, ma che si studia con una certa ampiezza
da poco tempo: vogliamo dire il limite definito come un valore
si avvicina la funzione, senza escludere che contemporaneamente
vicini anche ad altri. La definizione adottata è dunque la seguente:
numero y è limite della funzione $f(x)$ quando x nel gruppo u
ıde al limite superiore infinito, se, scelto h comunque piccolo,
alunque sia il numero a vi sono in u *alcuni* valori di x mag-
ori di a, pei quali $f(x)$ assume valori numericamente diversi da
meno di h (*) » ed analoghe per il caso del limite $+\infty$ o $-\infty$.
ha così come caso particolare quello, più frequentemente studiato,
i la funzione tende ad un unico limite; allora, riferendosi alla
zione precedente, « preso h comunque piccolo, *esiste un conve-
nte numero* a tale che per *tutti* i valori di x in u che sono
ggiori di a, $f(x)$ è numericamente diverso da y meno di h ».
tale caso, come il più importante, si è dato naturalmente il mag-
sviluppo.

i limiti a cui tendono le funzioni quando la variabile indipendente
vicina ad un valore finito x_0 od all'infinito negativo, non ci siamo
ati: invero le loro definizioni e le loro proprietà si deducono

---

*Cfr. Peano. *Sulla definizione del limite di una funzione* (Rivista di
matica, vol. II). — Bettazzi. *Sui punti di discontinuità delle funzioni
abile reale* (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, Tomo VI).

agevolmente da quelle citate nel formulario, colle rispettive trasfo
zioni di variabili $x = x_0 \pm \frac{1}{z}$, $x = -z$, mentre il riportarle tutt
disteso avrebbe allungato eccessivamente l'elenco delle formule s
portare un contributo di teoremi essenzialmente distinti.

Nel 1° dei quattro paragrafi di cui si compone questa VII pa
è data la definizione di limite finito ed infinito, e dei limiti si
esposte le principali proprietà. Nè in questo paragrafo nè nei seg
si vedranno registrate le notazioni storicamente importanti O ed I
italiano S ed I) del Du Bois Reymond e dello Stolz, giacchè ad
si può supplire, nella scrittura simbolica, colle espressioni max lim
min lim fx, o l'lim fx, l_1 lim fx senza introdurre simboli nuo
definirsi.

Nel § 2 si è studiato il limite di una funzione, nel caso partic
(quello che si considera ordinariamente) in cui tale limite è uni

Nel § 3 si sono date le proprietà dei limiti di più funzioni
frontati fra loro, e delle espressioni formate con più funzioni legat
loro dalle operazioni elementari dell'Aritmetica.

Nel § 4 sono riportate alcune delle formule principali che espri
equivalenze fra limiti di funzioni diverse, o valori già calcola
limiti importanti. In questo paragrafo peraltro non si troveran
numerose ed interessanti formule che, quali applicazioni dei limi
hanno dalle teorie delle serie, degli integrali definiti, ecc., dov
esse costituire altre speciali parti del formulario.

È da notarsi che certe formule non sono state prese dalle
che saranno citate via via (p. es. dall'opera del Laska) sotto le f
precise riportate nel formulario; giacchè essendosi in questo de
soltanto il limite preso quando x tende all'infinito, si sono dovute
semplici cambiamenti di variabili, trasformare alcune formule
invece in quelle opere per il caso di x tendente ad un numero fi

Di certe formule comunemente note e facili a trovarsi in quasi
i trattati di Algebra, non si è indicata la fonte a cui si sono tolte
alcune non tolte a nessun'altra opera si è tralasciata la dimostraz
perchè facilissima ed immediata.

Per brevità si è usata la notazione $x, y, z \ldots - \varepsilon a$ dove $x, y,$
sono enti della classe a, invece dell'altra $x - \varepsilon a \,.\, y - \varepsilon a \,.\, z - \varepsilon a \,.$

VII.

§ 1.

$\mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}' u = \infty \,.\, f \in \mathrm{q\,f}\, u \,.\, \supset ::$
$y \in \mathrm{q} \,.\, \supset \therefore y \in \lim_{x,\,u,\,\infty} f x \,.\, = : h \in \mathrm{Q} \,.\, a \in \mathrm{q} \,.\, \supset_{h,\,a} \,.\, f\,[u \cap (a + \mathrm{Q})] \cap (y - h)^{--}(y + h) - = \Lambda \,.$ Def.
$\infty \in \lim_{x,\,u,\,\infty} f x \,.= : m \in \mathrm{Q} \,.\, a \in \mathrm{q} \,.\, \supset_{m,\,a} \,.\, f\,[u \cap (a + \mathrm{Q})] \cap (m + \mathrm{Q}) - = \Lambda \,.$ Def.
$-\infty$ » .=: » $\cap (-m - \mathrm{Q}) - = \Lambda \,.$ Def.

$m \in \mathrm{q} \,.\, \supset \lim_{x,\,u,\,\infty} f x = \lim_{x,\,u \cap (m+\mathrm{Q}),\,\infty} f x \,.$
$v \in \mathrm{Kq} \,.\, v \supset u \,.\, \mathrm{l}' v = \infty \,.\, \supset \,.\, \lim_{x,\,v,\,\infty} f x \supset \lim_{x,\,u,\,\infty} f x.$

$\mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}' u = \infty \,.\, f \in \mathrm{q\,f}\, u \,.\, \lim = \lim_{x,\,u,\,\infty} \,.\, \supset ::$
$\lim f x - = \Lambda \,.$
$f \in \mathrm{Q\,f}\, u \,.\, \supset \,.\, \lim f x \supset \mathrm{Q}_0 \cup \iota\, \infty \,.$
$f \in (-\mathrm{Q}) \mathrm{f} u \,.\, \supset \,.$ » $-\mathrm{Q}_0 \cup \iota\,(-\infty) \,.$
$h \in \mathrm{q} \,.\, \therefore a \in \mathrm{q} \,.\, \supset_a : b \in u \cap (a + \mathrm{Q}) \,.\, \mathrm{m}\, f\, b < h \,.\, - =_b \Lambda :: \supset \,.\, \mathrm{q} \cap \lim f x - = \Lambda \,.$
$a \in \mathrm{q} \,.\, \mathrm{l}'\, \mathrm{m}\, f\,[u \cap (a + \mathrm{Q})] \in \mathrm{q} \,.\, \supset \,.\, \mathrm{q} \cap \lim f x - = \Lambda \,.$
» $\,.\, v \in \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}'\, \mathrm{m}\, v \in \mathrm{Q} \,.\, f\,[u \cap (a + \mathrm{Q})] \supset v \,.\, \supset \,.\, \lim f x \supset Cv \,.$
$\mathrm{l}' \lim f x \in \lim f x \,.$
l_1 » »
$\mathrm{l}' \lim f x = \max \lim f x \,.$
$\mathrm{l}_1 \lim f x = \min \lim f x \,.$

---

§ 1. 1. Cauchy. *Analyse Algébrique,* Paris, 1821, pag. 13. « Quelfois ... une expression converge à-la-fois vers plusieurs limites diffntes les unes des autres. »

1-5, 11-20, 31-33. Peano. *Sulla definizione del limite d'una funie* (Rivista di Matematica, t. II, a. 1892, pag. 77-79). — *Lezioni nalisi infinitesimale,* Torino, 1893, vol. I, pag. 259-265, vol. II, . 53-57.

21. $D \lim f x \circ \lim f x$.
22. $v \in \mathrm{Kq} \,.\, Dv \circ v \,.\, \circ : f \in \mathrm{q\,f\,N} \,.\, \lim fx = v \,.\, - =_f \Lambda$.

$u \in \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}'u = \infty \,.\, f \in \mathrm{q\,f}\, u \,.\, \lim = \lim_{x,\,u,\,\infty} \,.\, y \in \mathrm{q} \,.\, \circ \,.\, \therefore$
31. $y \in \lim f x \,.\, = \,.\, 0 \in \lim (f x - y)$.
32. » $\quad .= . a \in \mathrm{q} \,.\, \circ \,.\, y \in Cf[u \cap (a + \mathrm{Q})]$.
33. $y - \in \lim f x .=: h \in \mathrm{Q} . a \in \mathrm{q} . f[u \cap (a+\mathrm{Q})] \cap y - \overline{h}\ y + h = \Lambda \,.\, - =_h$,

§ 2.

$u \in \mathrm{Kq} \,.\, \mathrm{l}'u = \infty \,.\, f \in \mathrm{q\,f}\, u \,.\, \lim = \lim_{x,\,u,\,\infty} \,.\, \circ$:
1. $y \in \mathrm{q} \,.\, \circ :: y = \lim f x \,.=:\therefore h \in \mathrm{Q} \,.\, \circ_h : a \in \mathrm{q} \,.\, f(u \cap (a+\mathrm{Q})) \circ (y-$
$(y+h) \,.\, - =_a \Lambda$.
2. $\infty = \lim f x \,.=:\therefore m \in \mathrm{Q} . \circ_m : a \in \mathrm{q} \,.\, f(u \cap (a+\mathrm{Q})) \circ m + \mathrm{Q} \,.\, - =$
3. $-\infty =$ » » » $\circ -m - \mathrm{Q}$ »
4. $\lim f x \in \mathrm{q} \,.\, = :: h \in \mathrm{Q} \,.\, \circ_h \,.\, \therefore x' \in \mathrm{q} : x_1 , x_2 \in u \cap (x' + \mathrm{Q}) \,.\, \circ_{x_1,\,x_2} \,.$
$\mathrm{mod}\,(f x_1 - f x_2) < h : - =_a$
5. » $\,.= ::$ » $x' \in u : x \in u \cap (x' + \mathrm{Q}) \,.\, \circ_x \,.\, \mathrm{mod}\,(fx -$
$< h : - =_a$
6. $\lim f x \in \mathrm{q} \cup \iota\infty \cup \iota - \infty \,.=\,.\, \mathrm{l}' \lim f x = \mathrm{l}_1 \lim f x$.
7. $y \in \mathrm{q} \,.\, \circ : y = \lim f x \,.=\,.\, 0 = \lim (f x - y)$.
8. $v \in \mathrm{Kq} \,.\, v \circ u \,.\, \mathrm{l}'v = \infty \,.\, \lim_{x\,.\,u,\,\infty} f x \in \mathrm{q} \cup \iota\infty \cup \iota - \infty \,.\circ.\, \lim_{x,\,v,\,\circ}$
$= \lim_{x,\,u,\,\infty} f x$.

11. $f \in (\mathrm{q\,f}\, u)\,\mathrm{cres} \,.=: x, y \in u \,.\, x < y \,.\, \circ_{x,\,y} \,.\, fx < fy$.
12. $f \in (\mathrm{q\,f}\, u)\,\mathrm{cres}_0 \,.=:$ » $\leq$ »
13. $f \in (\mathrm{q\,f}\, u)\,\mathrm{dec} \,.=:$ » $>$ »
14. $f \in (\mathrm{q\,f}\, u)\,\mathrm{dec}_0 \,.=:$ » $\geq$ »
15. $f \in (\mathrm{q\,f}\, u)\,\mathrm{cres}_0 \,.\, \circ \,.\, \lim f x \in \mathrm{q} \cup \iota\infty \,.\, \lim f x = \mathrm{l}' f u$.
16. » $\mathrm{dec}_0 \,.\, \circ \,.$ » $\mathrm{q} \cup \iota - \infty \,.$ » $= \mathrm{l}_1 f u$.

21, 22. Bettazzi. *Sui punti di discontinuità delle funzioni di va*
bile reale (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, VI, pag. 1

§ 2. 1-5, 15, 16. Dini. *Fondamenti per la teorica delle funzion*
variabile reale, p. 21.

6. P. Du Bois-Reymond. *Allgemeine Functionentheorie*, p. 266.
Bolzano, V. Stolz. *Vorl. ü. Arith*, I, p. 166.

7, 8. Peano. *Lezioni di analisi infinitesimale*, vol. II, pag. 59,

$a \varepsilon q . \supset . \lim a = a .$

$y \varepsilon \lim_{x, N, \infty} f x . \supset : v \varepsilon K N . \lim_{x, v, \infty} f x = y . - =_v \Lambda .$

$m \varepsilon N . \text{num} \lim f x = m . \supset :: v_1, v_2, \ldots v_m \varepsilon K u . u = v_1 \cup v_2 \cup \ldots \cup v_m :$
$r \varepsilon Z_m . \supset_r . \lim_{x, v_r, \infty} f x \varepsilon \lim_{x, u, \infty} f x .\because. y \varepsilon \lim f x . \supset_y : r \varepsilon Z_m .$
$\lim_{x, v_r, \infty} f x = y . - =_r \Lambda .\because. - =_{v_1, v_2 \ldots v_m} \Lambda .$

$\text{num} \lim f x = \infty . \lim f x \sim N . \supset :: v \varepsilon (K u) f N . u = \cup ' v_N : r \varepsilon N .$
$\supset_r . \lim_{x, v_r, \infty} f x \varepsilon \lim_{x, u, \infty} f x .\because. y \varepsilon \lim f x . \supset_y : r \varepsilon N . y =$
$\lim_{x, v_r, \infty} f x . - =_r \Lambda .\because. - =_v \Lambda .$

§ 3.

$\text{(q} . 1' u = \infty . f, g \varepsilon q f u . \lim = \lim_{x, u, \infty} . \supset :$
$a \varepsilon q : x \varepsilon u \frown (a + Q) . \supset_x . f x > g x : \supset . \max \lim f x \geqq \max \lim g x .$
» » » min » min »
» » » $: \lim f x , \lim g x \varepsilon q \cup \iota (\pm \infty) : \supset .$
$\lim f x \geqq \lim g x .$

$\lim f x , \lim g x \varepsilon q \cup \iota (\pm \infty) . \lim f x > \lim g x . \supset .\because. a \varepsilon q : x \varepsilon u \frown$
$(a + Q) . \supset_x . f x > g x : - =_a \Lambda .$

$\text{im} f x \varepsilon Q . \supset : a \varepsilon q . f (u \frown (a + Q)) \supset Q . - =_a \Lambda .$

$\text{:}\varepsilon Q . \supset_k .\because. x \varepsilon u : x_1, x_2 \varepsilon u \frown (x + Q) . \supset_{x_1, x_2} . \text{m} [f x_1 - g x_2] < k :$
$- =_x \Lambda :: \supset . \lim f x , \lim g x \varepsilon q . \lim f x = \lim g x .$

$\text{Hp P6} .\because. x', x'' \varepsilon u . \supset_{x', x''} . f x' > g x'' :: \supset . \lim f x = 1_1 f u = 1' g u = \lim g x .$
» » » $.\because. a \varepsilon q : x', x'' \varepsilon u . \supset_{x', x''} . a \varepsilon g x' - f x'' ::$
$\supset . a = \lim f x = \lim g x .$

$' \varepsilon q . \lim f x = \lim g x = y : \supset :: k \varepsilon Q . \supset_k .\because. x \varepsilon u : x_1, x_2 \varepsilon u \frown (x + Q) .$
$\supset_{x_1, x_2} . \text{m} [f x_1 - g x_2] < k : - =_x \Lambda .$

$\varepsilon q . \supset . \lim_{x, q, \infty} a \begin{cases} + x \\ - x \end{cases} = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} .$

$\varepsilon \begin{cases} + Q \\ - Q \end{cases} . \supset . \lim_{x, q, \infty} a x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} .$

$\varepsilon q . \supset . \lim_{x, q, \infty} \frac{a}{x} = 0 .$

$\varepsilon 1 + Q . \supset . \lim_{x, q, \infty} a^x = + \infty .$

:. BETTAZZI, l. c.

:, 23. GIUDICE. *Sulle Successioni* (Rendiconti del Circolo di Palermo, ıg. 280).

20. $a = 1 . \supset . \lim_{x, q, \infty} a^x = 1 .$
21. $a \in Q \cap (1 - Q) . \supset . \lim_{x, q, \infty} a^x = 0 .$
22. $a \in 1 + Q . \supset . \lim_{x, Q, \infty} \operatorname{Log}_a x = + \infty .$
23. $a \in Q \cap (1 - Q) . \supset . \lim_{x, Q, \infty} \operatorname{Log}_a x = - \infty .$
24. $a \in Q . \supset . \lim_{x, Q, \infty} x^a = + \infty .$
25. $a \in - Q . \supset . \lim_{x, Q, \infty} x^a = 0 .$
26. $a \in q . \supset . \lim (a + f x) = a + \lim f x .$
27. $\lim (f x + g x) \supset \lim f x + \lim g x .$
28. $\lim f x \in q . \supset . \lim (f x + g x) = \lim f x + \lim g x .$
29. $\lim f x = + \infty . - \infty - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim (f x + g x) = + \infty .$
30. $\lim f x = - \infty . + \infty - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim (f x + g x) = - \infty .$
31. $\lim f , \lim g \in q . \supset . \lim (f x \pm g x) = \lim f x \pm \lim g x .$
32. $\lim f x = \lim g x = \begin{matrix} + \infty \\ - \infty \end{matrix} . \supset . \lim (f x + g x) = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} .$
33. $a \in q - \iota 0 . \supset . \lim a f x = a \lim f x .$
34. $a \in q . \lim f x \in q . \supset . \lim a f x \in q .$
35. $a \in Q . \lim f x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} . \supset . \lim a f x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} .$
36. $a \in - Q . \lim f x = \begin{cases} + \infty \\ - \infty \end{cases} . \supset . \lim a f x = \begin{cases} - \infty \\ + \infty \end{cases} .$
37. $\lim [f x \times g x] \supset \lim f x \times \lim g x .$
38. $\lim f x \in q . \supset . \lim [f x \times g x] = \lim f x \times \lim g x .$
39. $\lim f x = 0 . \pm \infty - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim (f x \times g x) = 0 .$
40. $\lim \operatorname{mod} f x = \infty . 0 - \varepsilon \lim g x . \supset . \lim \operatorname{mod} (f x \times g x) = \infty .$
41. $\lim f x , \lim g x \in q . \supset . \lim (f x \times g x) = \lim f x \times \lim g x .$
42. $f \in (q - \iota 0) \text{ f } \dot{u} . 0 , \pm \infty - \varepsilon \lim f x . \supset . \lim \frac{1}{f x} = \frac{1}{\lim f x} .$
43. $0 \in \lim f x . \supset . \infty \in \lim \operatorname{mod} \frac{1}{f x} .$
44. $\pm \infty \in \lim f x . \supset . 0 \in \lim \frac{1}{f x} .$
45. $\lim f x \in q \cap - \iota 0 . \supset . \lim \frac{1}{f x} = \frac{1}{\lim f x} .$
46. $\lim f x = \pm \infty . \supset . \lim \frac{1}{f x} = 0 .$
47. $\lim f x = 0 . \supset . \lim \operatorname{mod} \frac{1}{f x} = \infty .$

$$8.\ \lim f x = 0\ .\ 0 - \varepsilon \lim g x\ .\ \supset .\ \lim \frac{f x}{g x} = 0\ .$$

$$9.\quad \text{»}\quad\ \text{»}\quad\ .\ \supset .\ \lim \operatorname{mod} \frac{g x}{f x} = \infty\ .$$

$$0.\ \lim \operatorname{mod} f x = \infty\ .\ \pm\infty - \varepsilon \lim g x\ .\ \supset .\ \lim \operatorname{mod} \frac{f x}{g x} = \infty\ .$$

$$1.\quad \text{»}\quad\ \text{»}\quad\ .\ \supset .\ \lim \frac{g x}{f x} = 0\ .$$

$$2.\ 0\ ,\ \pm\infty - \varepsilon \lim f x \cap \lim g x\ .\ \supset .\ \lim \frac{f x}{g x}\ \supset\ \frac{\lim f x}{\lim g x}\ .$$

$$3.\ \lim f x \varepsilon \mathrm{q}.\ \lim g x \varepsilon \mathrm{q} \cap -\iota 0\ .\supset .\ \lim \frac{f x}{g x} = \frac{\lim f x}{\lim g x}\ .$$

$$4.\ f \varepsilon \mathrm{Q}\ \mathrm{f}\ u\ .\ a \varepsilon \mathrm{q}\ .\ \supset .\ \lim [f x]^a = [\lim f x]^a\ .$$

$$5.\ f \varepsilon \mathrm{Q}\ \mathrm{f}\ u\ .\ a \varepsilon \left\{\begin{matrix} + \mathrm{Q} \\ - \mathrm{Q} \end{matrix}\right.\ .\ \lim f x = +\infty\ .\ \supset .\ \lim [f x]^a = \left\{\begin{matrix} +\infty \\ 0 \end{matrix}\right.\ .$$

$$6.\ a \varepsilon \mathrm{Q}\ .\ \pm\infty - \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ \lim a^{f x} = a^{\lim f x}\ .$$

$$7.\ a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ .\ +\infty \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ +\infty \varepsilon \lim a^{f x}\ .$$

$$8.\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ .\ +\infty \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ 0 \varepsilon \lim a^{f x}\ .$$

$$9.\ a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ .\ -\infty \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ 0 \varepsilon \lim a^{f x}\ .$$

$$0.\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ .\ -\infty \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ +\infty \varepsilon \lim a^{f x}\ .$$

$$1.\left.\begin{matrix} a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ . \\ a = 1\ . \\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ . \end{matrix}\right\} \lim f x = +\infty\ .\ \supset .\ \lim a^{f x} = \left\{\begin{matrix} +\infty\ . \\ 1\ . \\ 0\ . \end{matrix}\right.$$

$$2.\left.\begin{matrix} a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ . \\ a = 1\ . \\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ . \end{matrix}\right\} \lim f x = -\infty\ .\ \supset .\ \lim a^{f x} = \left\{\begin{matrix} 0\ . \\ 1\ . \\ +\infty\ . \end{matrix}\right.$$

$\mathrm{Q}\ \mathrm{f}\ u\ .\ \supset :$

$$3.\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap -\iota 1\ .\ 0\ ,\ \pm\infty - \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ \lim \mathrm{Log}_a f x = \mathrm{Log}_a \lim f x\ .$$

$$4.\left.\begin{matrix} a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ . \\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ . \end{matrix}\right\} +\infty \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ \left\{\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right. \varepsilon \lim \mathrm{Log}_a f x\ .$$

$$5.\left.\begin{matrix} a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ . \\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ . \end{matrix}\right\} 0 \varepsilon \lim f x\ .\ \supset .\ \left\{\begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}\right. \varepsilon \lim \mathrm{Log}_a f x\ .$$

$$6.\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap -\iota 1\ .\ \lim f x \varepsilon \mathrm{Q}\ .\ \supset .\ \lim \mathrm{Log}_a f x = \mathrm{Log}_a \lim f x\ .$$

$$7.\left.\begin{matrix} a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ . \\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ . \end{matrix}\right\} \lim f x = +\infty\ .\ \supset .\ \lim \mathrm{Log}_a f x = \left\{\begin{matrix} +\infty \\ -\infty \end{matrix}\right.\ .$$

$$8.\left.\begin{matrix} a \varepsilon 1 + \mathrm{Q}\ . \\ a \varepsilon \mathrm{Q} \cap (1 - \mathrm{Q})\ . \end{matrix}\right\} \lim f x = 0\ .\ \supset .\ \lim \mathrm{Log}_a f x = \left\{\begin{matrix} -\infty \\ +\infty \end{matrix}\right.\ .$$

$$9.\ \lim f x \varepsilon \mathrm{Q}\ .\ \lim g x \varepsilon \mathrm{q}\ .\ \supset .\ \lim [f x^{g x}] = [\lim f x]^{\lim g x}\ .$$

76. $\lim f x \varepsilon 1+Q \,.\, \lim g x = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} .\, \circ \,.\, \lim [f x^{g x}] = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$.

77. $\lim f x \varepsilon Q \cap (1-Q) \,.\, \lim g x = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \end{cases} .\, \circ \,.\, \lim [f x^{g x}] = \begin{cases} 0 \\ +\infty \end{cases}$.

78. $\lim f x = +\infty \,.\, \lim g x \varepsilon \begin{cases} Q \\ -Q \end{cases} .\, \circ \,.\, \lim [f x^{g x}] = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}$.

§ 4.

$f, g \varepsilon q\, f N \,.\, \lim = \lim_{x, N, \infty} .\, \circ$:

1. $\lim[f(x+1)-fx] \varepsilon q \cup \iota(+\infty) \cup \iota(-\infty) .\circ. \lim(fx)|x = \lim[f(x+1)-f$.

2. $\lim f(x+1)|fx \varepsilon q \cup \iota\infty \,.\, \circ \,.\, \lim (fx)^{\frac{1}{x}} = \lim \dfrac{f(x+1)}{fx}$.

3. $\lim fx$, $\lim g x = 0 : g \varepsilon \text{dec} \,.\, \lim [f(x+1)-fx] | [g(x+1)-gx] \varepsilon q$ ..
$\lim fx|gx = \lim [f(x+1) - fx]|[g(x+1) - gx]$.

4. $\lim g x = \infty \,.\, g \varepsilon \text{cres}$. » »

5. $g \varepsilon Q\, f N \,.\, \Sigma_1^\infty gx = \infty \,.\, \lim \dfrac{fx}{gx} \varepsilon q \,.\, \circ \,.\, \lim \dfrac{f1+f2+\ldots+fx}{g1+g2+\ldots+gx} = \lim \dfrac{fx}{gx}$

6. $\lim fx \varepsilon q \cup \iota\infty .\circ. \lim \dfrac{f1+f2+\ldots+fx}{x} = \lim \sqrt[x]{f1 \,.\, f2 \,.\, \ldots \,.\, fx} = \lim$ /.

7. $\lim f x$, $\lim g x \varepsilon q \,.\circ. \lim \dfrac{f1 \,.\, g x + f2 \,.\, g(x-1) + \ldots + fx \,.\, g1}{x}$

$\lim f x \times \lim g x$.

8. $g \varepsilon \text{dec}.\lim gx = 0 . \lim (g1+g2+\ldots+gx) = +\infty \,.\, \lim \dfrac{f1+f2+\ldots+}{x}$

$\varepsilon q .\circ. \lim \dfrac{f1.g1+f2.g2+\ldots+fx.gx}{g1+g2+\ldots+gx} = \lim \dfrac{f1+f2+\ldots+fx}{x}$.

9. $n \varepsilon N \,.\, a_1, a_2, \ldots a_n \varepsilon q \,.\, \circ \,.\, \lim \sqrt[n]{(x+a_1)(x+a_2)\ldots(x+a_n)} - x$
$= (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : n$.

10. $\lim \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x \varepsilon q$.

---

§ 4. 1, 2. Cauchy. *Analyse Algébrique*, a. 1821, pag. 48, 53.

3, 4. Stolz. *Ueber die Grenzwerthe von Quotienten* (Math. Ann Bd. XIV).

6-8. Cesàro. l. c., pag. 99-105.

9. Schlömilch. *Uebungsbuch z. Stud. d. höh: Analysis*, 1r Th., p.

10, 11. Eulero. *Introductio*, I, § 115.

$$\lim\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\,.$$ Def.

$$\log=\mathrm{Log}_{\mathrm{e}}\,.$$ Def.

$$\lim f x\,\varepsilon\,\mathrm{q}\,.\,\mathrm{o}\,.\,\lim\left[1+f x\,|x\right]^{x}=\mathrm{e}^{\lim f x}\,.$$

$$\quad\,.\,\mathrm{o}\,.\,\lim x\left[\sqrt[x]{f x}-1\right]=\log\lim f x\,.$$

$$\quad\,.\,\mathrm{o}\,.\,\lim\left[\mathrm{e}^{f1}+\mathrm{e}^{\frac{1}{2}f2}+\ldots+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}f x}\right]=\lim f x\,.$$

$$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\,\mathrm{o}\,.\,\lim\left(\frac{\sqrt[x]{a}+\sqrt[x]{b}}{2}\right)^{x}=\sqrt{a\,b}\,.$$

$$a\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\,\mathrm{o}\,.\,\lim\frac{a^{x}}{x\,!}=0\,.$$

$$\lim\frac{x}{\sqrt[x]{x\,!}}=\mathrm{e}\,.$$

$$\lim\frac{1}{x}\sqrt[x]{(x+1)\,(x+2)\ldots 2\,x}=\frac{4}{\mathrm{e}}\,.$$

$$\begin{cases}p\,\varepsilon-1+\mathrm{Q}\\ p\,\varepsilon-1-\mathrm{Q}_{0}\end{cases}\,.\mathrm{o}\,.\,\lim\frac{1+2^{p}+3^{p}+\ldots+x^{p}}{x^{p+1}}=\begin{cases}\dfrac{1}{p+1}\,.\\ \infty\end{cases}$$

$$p\,\varepsilon-1+\mathrm{Q}\,.\,\mathrm{o}\,.\,\lim\frac{1+2^{p}+3^{p}+\ldots+x^{p}}{x^{p}}-\frac{x}{p+1}=\frac{1}{2}\,.$$

$$a\,\varepsilon\,\mathrm{q}\,.\,r\,\varepsilon\begin{cases}\mathrm{Q}\cap(1-\mathrm{Q})\,.\\ 1+\mathrm{Q}_{0}\,.\end{cases}\mathrm{o}\,.\,\lim\left(a+a\,r+a\,r^{2}+\ldots+a\,r^{x}\right)=\begin{cases}\dfrac{a}{1-r}\,.\\ \pm\infty\,.\end{cases}$$

$$a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{q}-(-\mathrm{N}_{0})\,.\begin{cases}a>b\,.\\ a=b\,.\,\mathrm{o}\,.\,\lim\dfrac{b\,(b+1)\ldots(b+x+1)}{a\,(a+1)\ldots(a+x+1)}=\\ a<b\,.\end{cases}\begin{cases}0\,.\\ 1\,.\\ \pm\infty\,.\end{cases}$$

$$\mathrm{f}\,\mathrm{Q}\,.\,n\,\varepsilon\,\mathrm{Q}\,.\,\lim=\lim_{x\,,\,\mathrm{q}\,,\,\infty}:\mathrm{o}\,.$$

$$\lim\frac{f(x+1)-f x}{x^{n}}\,\varepsilon\,\mathrm{q}:a\,,b\,\varepsilon\,\mathrm{q}\,.\,\mathrm{o}_{a\,,\,b}\,.\,\mathrm{l'\,mod}\,f(a-b)\,\varepsilon\,\mathrm{Q}:\mathrm{o}\,.\,\lim\frac{f x}{x^{n+1}}$$

$$=\lim\frac{f(x+1)-f x}{x^{n}}\,.$$

-21. Cesàro. l. c., pag. 112-116.

. Novi. *Analisi Algebrica*, 1863, pag. 47.

-34. Genocchi-Peano. *Calcolo differenziale*, pag. 25.

32. $\lim \mathrm{mod} \frac{f(x+1)-fx}{x^n} = \infty : \quad » \quad » \quad : \supset . \lim \mathrm{mod} \frac{fx}{x^{n+1}} =$

33. $\lim \frac{f(x+1)}{fx} \varepsilon q : a,b \varepsilon q . \supset_{a,b} . 1', 1_1 f(a \frown b) \varepsilon Q : \supset . \lim (fx)^{\frac{1}{x}} = \lim \frac{f(x-}{f}$

34. $\lim \frac{f(x+1)}{fx} = \infty : \quad » \quad » \quad : \supset . \lim (fx)^{\frac{1}{x}} = \infty .$

35. $\lim \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{x}{2}} = e .$

36. $\lim x^{\frac{1}{x}} = 1 .$

37. $a \varepsilon 1+Q . \supset . \lim \frac{a^x}{x^n} = \infty .$

38. $» \quad \lim \frac{\mathrm{Log}_a x}{x^n} = 0 .$

39. $» \quad \lim (\mathrm{Log}_a x)^{\frac{1}{x}} = 1 .$

40. $\lim \left\{ \frac{1}{\log \left(1+\frac{1}{x}\right)} - x \right\} = \frac{1}{2} .$

41. $a \varepsilon Q . \supset . \lim x (a^{\frac{1}{x}} - 1) = \log a .$

42. $a \varepsilon q . \supset . \lim x \log \left(1+\frac{a}{x}\right) = a .$

43. $a, b \varepsilon Q . \supset . \lim x \left(a^{\frac{1}{x}} - b^{\frac{1}{x}}\right) = \log \frac{a}{b} .$

44. $a \varepsilon q . \supset . \lim \frac{(1+ax)^n - a^n x^n}{x^{n-1}} = n a^{n-1} .$

45. $m, n \varepsilon N . a_0, a_1, \ldots, a_n, a_0', a_1', \ldots, a_n' \varepsilon q . a_0, a_0' - = 0 .$

$$\begin{cases} m = n \\ m < n \\ m > n \end{cases} . \supset . \lim \frac{a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots + a_m}{a_0' x^n + a_1' x^{n-1} + \ldots + a_n'} = \begin{cases} \frac{a_0}{a_0'} \\ 0 \\ \infty \end{cases} .$$

R. Bettazzi.

35-45. Laska. *Sammlung von Formeln.* Braunschweig, 1888, vo[illegible] pag. 5.

Tip. V. Fodratti & E. Lecca, via Gaudenzio Ferrari, 3 - Torino.

n O.

r Theorie der Doppelintegrale expliciter irrationaler Functionen

von

Otto Biermann in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Jänner 1889.)

den Sitzungsberichten d. kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. XCVIII. Abth. II. a. Februar 1889.

WIEN, 1889.

AUS DER K. K. HOF- UND STAATSDRUCKEREI.

IN COMMISSION BEI F. TEMPSKY,
HHÄNDLER DER KAISERLICHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN.

Druckschriften

der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in W

(Mathematisch-naturwissenschaftliche Classe).

Selbständiges Werk.

Die internationale Polarforschung 1882—1883. Die österreichische
station **Jan Mayen.**

Band I enthält den Vorbericht der Expedition, ferner die astronomisc
geographischen, meteorologischen und oceanographis
Resultate der Expedition.

Band II umfasst die Polarlicht- und Spectralbeobachtungen auf
Mayen.

Band III Naturhistorischer Theil. 1. Zoologie. 2. Botanik. 3. Mineralogie.
Das ganze Werk, drei Quartbände. (Mit 4 Karten, 65 Tafeln und 10
schnitten.) . . . . . .

Vorbericht der Expedition. Separatausgabe aus dem I. Bande dieses W
Derselbe bildet den beschreibenden Theil der Expedition. (Mit 1
und 3 Tafeln.) . . . . . 2 fl.

Periodische Publicationen.

[Mathematik und Astronomie.]

Aus den Denkschriften für 1885.

Gegenbauer, L., zur Theorie der Determinanten höheren Ranges . . . . . — fl.
— zur Theorie der aus den vierten Einheitswurzeln gebildeten complexen Z
— fl.

Oppolzer, Th. v., über die Auflösung des Kepler'schen Problems. . . . . 1 fl.

Aus den Sitzungsberichten für 1885.

Bidschof, F., Bestimmung der Bahn des Planeten (236) „Honoria". . . . . — fl.

Biermann, O., zur Theorie der Fuchs'schen Functionen. . . . . — fl.
Bobek, K., über gewisse eindeutige involutorische Transformationen der Ebene. — fl.
Gegenbauer, L., über die ganzen complexen Zahlen von der Form $a + bi$. . . — fl.
— arithmetische Notiz. . . . . — fl.
— über das Legendre-Jacobi'sche Symbol. . . . . — fl.
— über den grössten gemeinschaftlichen Divisor. . . . . — fl.
— über die Divisoren der ganzen Zahlen. . . . . — fl.
— einige asymptotische Gesetze der Zahlentheorie. . . . . — fl.
— über die mittlere Anzahl der Classen quadratischer Formen von negativer
minante. . . . . — fl.
— über das Additionstheorem der Functionen $Y^m(x)$. . . . . — fl.
— über die Darstellung der ganzen Zahlen durch binäre quadratische Form
negativer Discriminante. . . . . — fl.
— über das Symbol $\left(\frac{m}{n}\right)$ . . . . . — fl.
— über ein Theorem des Herrn Charles Hermite. . . . . — fl.
— arithmetische Sätze. . . . . — fl.
Glaser, E., die Sternkunde der südarabischen Kabylen. . . . . — fl.

Herz, N., Entwicklung der störenden Kräfte nach Vielfachen der mittleren Anoma
independenter Form. . . . . — fl.

— Bahnbestimmung des Planeten (242) „Kriemhild". . . . . — fl.

— Entwickelung der Differentialquotienten der geocentrischen Coordinaten nac
geocentrischen Distanzen in einer elliptischen Bahn. . . . . — fl.

— Bahnbestimmung des Planeten (243) „Ida". . . . . — fl.

Igel, B., über einige Anwendungen des Principes der Apolarität. . . . . — fl.
Le Paige, C., über die Hesse'sche Fläche einer Fläche dritter Ordnung. . . . — fl.
Mahler, E., astronomische Untersuchung über die in der Bibel erwähnte egy
Finsterniss. (Mit 1 Karte.) . . . . . — fl.
— astronomische Untersuchungen über in hebräischen Schriften erwähnte
nisse. I. Theil. Die biblischen Finsternisse. . . . . — fl.
— II. Theil. Die prophetischen Finsternisse. . . . . — fl.
Mertens, F., die Gleichung des Strahlencomplexes, welcher aus allen die Kan
gemeinschaftlichen Polltetraeders zweier Flächen zweiter Ordnung schne
Geraden besteht. . . . . — f
— über eine Formel der Determinantentheorie . . . . . — f
— zur Theorie der elliptischen Functionen. . . . . — f
— eine einfache Bestimmung des Potentials eines homogenen Ellipsoids. . — f

n den Sitzungsberichten d. kais. Akademie d. Wissenschaften in Wien.
Mathem.-naturw. Classe; Bd. XCVIII. Abth. II. a. Februar 1889.

r Theorie der Doppelintegrale expliciter irrationaler Functionen

von

Otto Biermann in Prag.

(Vorgelegt in der Sitzung am 17. Jänner 1889.)

Herr Nöther hat schon im II. Bande der Mathematischen alen die allgemeine Form der verschiedenen „Gattungen" facher Integrale algebraischer Functionen mehrerer Verrlicher besprochen. Trotzdem vollführe ich in Folgendem die tellung der Doppelintegrale erster Gattung $\int\int f(x_1, x_2, y)\, dx_1 dx_2$, durch die Gleichung $y^2 - R(x_1, x_2) = 0$ an die unabhängigen ubeln geknüpft ist. Ich gewinne die Form nach einer ausführn analytischen Darstellung der algebraischen Function y r Umgebung irgend einer Stelle des durch die Gleichung enen Gebildes und halte mich hiebei darum lange auf, weil ine ähnliche analytische Discussion einer algebraischen ion von höherer als der ersten Stufe nicht bekannt ist.

Die erste Frage für die Doppelintegrale erster Gattung ist ach ihren Perioden. Ich beschreibe im zweiten Paragraphen organg, auf Grund dessen man die Perioden ableiten kann, hliesslich die Zahl derselben namhaft zu machen und halte dabei an die Arbeit von Herrn Fuchs über die einfachen ale $\int \frac{f(x, y)\, dy}{\sqrt{R(x, y)}}$ mit einem veränderlichen Parameter x.

§. 1.

s sei das irreductible algebraische Gebilde zweiter Stufe biete dreier Grössen zur Behandlung vorgelegt, welches die Gleichung bestimmt ist:

$$g_0(\xi_1, \xi_2)\eta^2 + 2g_1(\xi_1, \xi_2)\eta + g_2(\xi_1, \xi_2) = 0,$$

wo die ganzen rationalen Functionen g_0, g_1, g_2 keinen gemei samen Theiler besitzen.

Wir vollführen zunächst eine eindeutig umkehrbare Tra formation des Gebildes in ein der Form nach einfacheres Gebil Setzt man

$$x_1 = \frac{A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3}{C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3}, \quad x_2 = \frac{B_1\xi_1 + B_2\xi_2 + B_3}{C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3}$$

und unterwirft die Substitutionscoëfficienten der Bedingung, da

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} = \delta$$

von Null verschieden sei, so entspricht nicht allein jedem Wertl paare (ξ_1, ξ_2) ein Werthsystem (x_1, x_2), sondern auch umgeke jedem Werthepaare (x_1, x_2) ein bestimmtes Werthsystem $(\xi_1,$

$$\xi_1 = \frac{1}{\Delta}\left((C_3B_2 - C_2B_3)x_1 - (C_3B_1 - B_3C_1)x_2 + (A_2B_3 - A_3B_2)\right.$$

$$\xi_2 = \frac{-1}{\Delta}\left((C_3B_1 - C_1B_3)x_1 - (C_3A_1 - C_1A_3)x_2 + (A_1B_3 - A_3B_1)\right.$$

wo mit Δ der Ausdruck:

$$(B_1C_2 - B_2C_1)x_1 - (A_1C_2 - A_2C_1)x_2 + (A_1B_2 - A_2B_1)$$

bezeichnet ist, der durch ξ_1 und ξ_2 dargestellt, gleich

$$\delta(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3)^{-1}$$

zu setzen ist.

Substituirt man die Ausdrücke für ξ_1 und ξ_2 in der Discri nante der vorgelegten Gleichung:

$$g_1^2(\xi_1, \xi_2) - g_2(\xi_1, \xi_2)\, g_0(\xi_1, \xi_2) = \Theta(\xi_1, \xi_2)$$

oder, wenn diese einen quadratischen Theiler $k^2(\xi_1, \xi_2)$ hat, dem Factor von Θ ohne einen solchen Theiler — er heisse $D(\xi_1,$ — so entsteht ein Ausdruck der Form

$$\frac{P(x_1, x_2)}{\Delta^{n}_{(x_1, x_2)}},$$

wo n die Ordnung von $D(\xi_1, \xi_2)$ anzeigt.

Ist n gerade, und zwar gleich $2m$, so setze man

$$y^2 = P(x_1, x_2),$$

nn wird

$$y = \frac{\delta^m \sqrt{D(x_1 x_2)}}{(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3)^m} = \frac{\delta^m}{(C_1\xi_1 + C_2\xi_2 + C_3)^m} \frac{g_0\eta + g_1}{k(\xi_1, \xi_2)},$$

o eine rationale Function von ξ_1, ξ_2, η, und umgekehrt η eine ionale Function von x_1, x_2, y:

$$\eta = \left(\frac{k \cdot y}{\Delta^m} - g_1\right) \frac{1}{g_0}.$$

Ist $n = 2m+1$, so setze man

$$y^2 = P(x_1, x_2) \cdot \Delta(x_1, x_2)$$

l man ersieht auch hier die Formeln, durch welche das ursprüng- ıe Gebilde in das durch die einfachere Gleichung

$$y^2 = R(x_1, x_2)$$

nirte transformirt wird, wo $R(x_1, x_2)$ eine ganze Function ader Ordnung ohne quadratischen Theiler $k^2(x_1 x_2)$ ist.

Die Untersuchung des Gebildes $y'^2 = R^{(2m+1)}(x_1', x_2')$ kann ı mit Hilfe einer Substitution

$$x_1' = \frac{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3}, \quad x_2' = \frac{\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3}{\gamma_1 x_1 + \gamma_2 x_2 + \gamma_3}$$

die eines Gebildes $y^2 = R^{(2m+2)}(x_1, x_2)$ zurückführen, aber ekehrt kann man durch eine bloss lineare Substitution für $_2$ von dem Gebilde $y'^2 = R^{(2m+2)}(x_1', x_2')$ zu einem Gebilde $= R^{(2m+1)}(x_1, x_2)$ nur dann übergehen, wenn $m \leqq 2$ ist, weil ernfalls die acht willkürlichen Constanten der Substitution t hinreichen, alle Glieder $(2m+2)^{\text{ter}}$ Dimension des Zählers transformirten Ausdruckes $R^{(2m+2)}(x_1', x_2')$ zum Verschwinden ringen.

In gewissen einfachen Fällen eines Gebildes $y^2 = R(x_1, x_2)$ n man durch eine rationale Transformation

$$x_1 = R_1(\xi_1, \xi_2), \quad x_2 = R_2(\xi_1, \xi_2)$$

rationale Function von x_1, x_2, y in eine rationale Function ξ_1, ξ_2 umwandeln.

Ist zunächst

$$R(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2,$$

so genügt zu diesem Zwecke eine Substitution

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 &= \xi_1^2, \\ b_{10}x_1 + b_{01}x_2 &= \xi_2, \end{aligned}$$

wo die Coëfficienten b_{10}, b_{01} einzig und allein der Beding unterworfen sind, dass

$$a_{10}b_{01} - b_{10}a_{01}$$

nicht Null ist.

Ist andrerseits

$$R(x_1, x_2) = (a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2)(a'_{00} + a'_{10}x_1 + a'_{01}x_2)$$

und hierin $a_{10}a'_{01} - a_{01}a'_{10}$ von Null verschieden, so setze man einen Factor gleich ξ_1^2, den andern ξ_2^2. Verschwindet aber genannte Ausdruck, so erreicht man durch die Substitution

$$\begin{aligned} a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 &= \xi_1^2, \\ b_{10}x_1 + b_{01}x_2 &= \xi_2, \end{aligned}$$

wo $|a_{10}b_{01} - a_{01}b_{10}| > 0$ ist, dass die rationale Function $x_1, x_2; y$ in eine solche von ξ_1, ξ_2 und

$$\left[\left(a'_{00} - a_{00}\frac{a'_{01}}{a_{01}}\right) + \frac{a'_{01}}{a_{01}}\xi_1^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

übergeht. Setzt man jetzt noch

$$\xi_1 = 2\sqrt{a'_{00} - a_{00}\frac{a'_{01}}{a_{01}}}\,\frac{\xi'_1}{1 - \xi'^2_1},$$

so erhält man eine rationale Function von ξ'_1 und ξ_2.

Ist aber

$$R(x_1, x_2) = a_{00} + a_{10}x_1 + a_{01}x_2 + a_{20}x_1^2 + a_{11}x_1x_2 + a_{02}x_2^2$$

und die Determinante

$$\begin{vmatrix} 2a_{20} & a_{11} & a_{10} \\ a_{11} & 2a_{02} & a_{01} \\ a_{10} & a_{01} & 2a_{00} \end{vmatrix}$$

ht Null, so könnte man versuchen, durch die Substitutionen

$$\sqrt{R(x_1, x_2)} = \sqrt{a_{00}} + \alpha_{11} x_1 \xi_1 + \alpha_{21} x_2 \xi_1 + \alpha_{12} x_1 \xi_2 + \\ + \alpha_{22} x_2 \xi_2 + \alpha_{10} x_1 + \alpha_{20} x_2,$$

$$\beta_{10} x_1 + \beta_{20} x_2 = \beta_{00} + \beta_{01} \xi_1 + \beta_{02} \xi_2$$

em Werthepaar (ξ_1, ξ_2) nur ein Paar von Werthen x_1, x_2 ent- echen zu lassen; doch hiezu reicht die Anzahl der willkürlichen nstanten nicht aus, und das geht umsoweniger an, wenn die ebraische Beziehung zwischen x_1, x_2, y, ξ_1 und ξ_2 durch eine ere ersetzt wird, in der x_1, x_2 und ξ_1, ξ_2 in höheren Potenzen reten.

Wir schliessen daher in Folgendem bei Untersuchung des ch eine Gleichung

$$F(y, x_1, x_2) = y^2 - R(x_1, x_2) = 0$$

immten Gebildes zweiter Stufe nur den Fall aus, wo die ze rationale Function $R(x_1, x_2)$ von der ersten Ordnung oder as Product zweier linearer Factoren zerlegbar ist. Ausserdem $R(x_1, x_2)$ keinen rationalen Theiler $k^2(x_1, x_2)$. Im Übrigen $R(x_1, x_2)$ von beliebiger Ordnung und nur irreductibel sein, im Falle einer reductiblen Function $R(x_1, x_2)$ kann man die rsuchung des Gebildes in mehrere Theile sondern.

Nun soll das Gebilde in der Umgebung jeder seiner Stellen h Potenzreihen in zwei Hilfsgrössen dargestellt werden. Ist $a_1, \quad x_2 = a_2, \quad y = b = \sqrt{R(a_1, a_2)}$ eine einfache Stelle, bildet man:

$$-b)^2 + 2b(y-b) = (x_1 - a_1)\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right) + (x_2 - a_2)\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right) + \dots \\ + \frac{1}{n!}(x_1 - a_1)^n \left(\frac{\partial^n R}{\partial x_1^n}\right) + \dots + \frac{(x_2 - a_2)^n}{n!}\left(\frac{\partial^n R}{\partial x_2^n}\right)$$

$$= \left\{1 + \frac{1}{R(a_1, a_2)}\left(\frac{x_1 - a_1}{1}\left(\frac{\partial R}{\partial x_1}\right) + \frac{(x_2 - a_2)}{1}\left(\frac{\partial R}{\partial x_2}\right) + \dots\right)\right\}^{\frac{1}{2}},$$

ann man y in eine Reihe nach positiven Potenzen von $-t_1 = t_1, \; x_2 - a_2 = t_2$ entwickeln. Versteht man unter $\mathfrak{p}(t_1, t_2)$

eine nach positiven ganzen Potenzen von t_1 und t_2 fortschreite Reihe ohne constantes Glied, aber im Allgemeinen mit Glied erster Dimension, so ist die Form der Entwicklung durch

$$y = b(1 + \mathfrak{p}(t_1, t_2))$$

gegeben.

Führt man statt t_1 und t_2 convergente Potenzreihen in ne Variablen τ_1 und τ_2 ein:

$$t_1 = \mathfrak{p}_1(\tau_1, \tau_2), \qquad t_2 = \mathfrak{p}_2(\tau_1, \tau_2),$$

so wird auch $y - b$ durch eine für $\tau_1 = \tau_2 = 0$ verschwinde Potenzreihe in τ_1 und τ_2 dargestellt.

Jeder Stelle (τ_1, τ_2) aus dem Convergenzbereich be Reihen $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{p}_2$ gehört nicht allein eine Stelle (t_1, t_2) zu, son es gilt auch die Umkehrung, sofern nur

$$\frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial \tau_1}\frac{\partial \mathfrak{p}_2}{\partial \tau_2} - \frac{\partial \mathfrak{p}_1}{\partial \tau_2}\frac{\partial \mathfrak{p}_2}{\partial \tau_1} = \frac{\partial(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(\tau_1, \tau_2)}$$

für $\tau_1 = \tau_2 = 0$ von Null verschieden ist; unter dieser Bedin kann man die Reihen umkehren.

Ist (a_1, a_2) eine Nullstelle von $R(x_1, x_2)$, so kann man Weierstrass'schen Satz von der Zerlegung einer in der E einer gewöhnlichen Potenzreihe dargestellten Function $F(u$ die mit den Variabeln u, v verschwindet, in das Product zw Reihen $\mathfrak{p}(u, v)$ und $\mathfrak{P}(u, v)$ benützen.[1]

Beginnt die Entwicklung von $F(u, 0)$ mit dem Gliede

$$\frac{1}{m!}\left(\frac{\partial^m F}{\partial u^m_{(0,0)}}\right) u^m = Cu^m,$$

so ist $\mathfrak{P}(0, 0) = 1$ und $\mathfrak{p}(u, v)$ hat die Gestalt

$$C(u^m + u^{m-1}\cdot\mathfrak{p}_1(v) + \ldots + \mathfrak{p}_m(v)).$$

Hiebei ist

$$\mathfrak{p}_\mu(v) = -\frac{1}{\mu}(s_\mu + s_{\mu-1}\mathfrak{p}_1(v) + \ldots + s_1\mathfrak{p}_{\mu-1}(v))$$
$$(\mu = 1, 2 \ldots, m)$$

---

[1] Mit $\mathfrak{P}(u, v)$ ist im Gegensatze zu $\mathfrak{p}(u, v)$ eine Reihe bezeichne ein constantes Glied besitzt.

s_l aus den Coëfficienten der Entwicklungen:

$$\left(\frac{F(u,o)-F(u,v)}{F(u,o)}\right)^{\lambda}=\sum_{\varkappa=0}^{\infty}G_{\varkappa}^{(\lambda)}(v)\frac{u^{k}}{u^{m\lambda}}\quad(\lambda=1,2\ldots)$$

folgender Weise zusammengesetzt ist:

$$s_l=l\sum_{\lambda=1}^{\infty}G_{m\lambda-l}^{(\lambda)}(v).$$

$G_{m\lambda-l}^{(\lambda)}(v)$ ist eine für $v=o$ verschwindende Potenzreihe, che das Glied niedrigster Dimension v^{ν} enthält, sofern

$$F(u,o)-F(u,v)=v^{\nu}\mathfrak{P}_o(u,v)$$

setzen ist und $\mathfrak{P}_o(u,o)$ nicht verschwindet.

Die Anwendung dieses Satzes wird wegen der Umständlich- bei der Rechnung mit Schwierigkeiten verbunden sein, so s wir zum Zwecke der analytischen Darstellung des Gebildes andere Entwicklungsform für $R(x_1\,x_2)$ herstellen, aus der leicht weitere Schlüsse ziehen kann.

Bezeichnet man $x_1-a_1=\xi_1$, $x_2-a_2=\xi_2$ und lässt $R(x_1,x_2)$ er Umgebung seiner Nullstelle (a_1,a_2) die Schreibweise zu:

$$\sum_{\mu_1,\mu_2}a_{\mu_1,\mu_2}\xi_1^{\mu_1}\xi_2^{\mu_2},$$

die Summe über alle aus den Werthereihen $\mu_1,\mu_2=0,1,\ldots n$ ildenden Combinationen μ_1,μ_2 auszudehnen ist, in denen $\mu_2\geqq\mu$ und $\leqq n$ ist, und denkt man durch eine homogene ure Substitution solche Variabeln ξ_1,ξ_2 eingeführt, dass eine Grössen

$$a_{\mu,o}\quad\text{oder}\quad a_{o,\mu}$$

beide von Null verschieden sind, so kann man $R(x_1\,x_2)$ die Form geben:

$$a_{\mu,o}\left(\xi_1^{\mu}+\xi_1^{\mu-1}\frac{P_1}{P_0}+\ldots+\frac{P_{\mu}}{P_o}\right)\frac{P_o}{a_{\mu,o}}$$

$$a_{o\mu}\left(\xi_2^{\mu}+\xi_2^{\mu-1}\frac{Q_1}{Q_0}+\ldots+\frac{Q_{\mu}}{Q_o}\right)\frac{Q_o}{a_{o,\mu}}$$

wo

$$P_o = a_{\mu o} + a_{\mu+1,0}\,\xi_1 + \ldots + a_{n,o}\,\xi_1^{n-\mu} + \xi_2(a_{\mu,1} + \ldots + a_{n-1,1}\,\xi_1^{n-\mu-1}) \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot + \xi_2^{n-\mu}(a_{\mu,n-\mu}),$$

$$P_\lambda = \xi_2^\lambda(a_{\mu-\lambda,\lambda} + \ldots + a_{\mu-\lambda,n-\mu+\lambda}\,\xi_2^{n-\mu}) = \xi_2^\lambda\, g_\lambda(\xi_2)$$

und demnach

$$y^2 = a_{\mu o}\,\xi_1^\mu\left(1 + \frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{g_1(\xi_2)}{P_o} + \ldots + \left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^\mu \frac{g_\mu(\xi_2)}{P_o}\right)\frac{P_o}{a_{\mu,o}}$$

ist. Q_o, Q_λ findet man aus P_o und P_λ durch Vertauschung vo
und ξ_2, $a_{\alpha\beta}$ und $a_{\beta\alpha}$.

Bringt man P_o^{-1} auf die Form

$$\frac{1}{a_{\mu o}}(1 + \mathfrak{p}_o(\xi_1, \xi_2))$$

und setzt zunächst $\mu = 1$, so kann man y in eine gewöhnl
Potenzreihe zweier Hilfsvariabeln t_1 und t_2 entwickeln, wenn

$$a_{\mu o}\,\xi_1 = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2),\quad \xi_2 = \bar{\mathfrak{p}}_2(t_1, t_2)$$

setzt und hier $\bar{\mathfrak{p}}_2$ durch $\mathfrak{p}_1^2$ theilbar ist, d. h. der Quotient $\frac{\bar{\mathfrak{p}}_2}{\mathfrak{p}_1^2}$ se
durch eine Potenzreihe darstellbar ist.

Es sei also

$$\xi_2 = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2)\,\mathfrak{P}_2(t_1, t_2),$$

dann erhält man für y die Darstellungsform:

$$y = C\mathfrak{p}_1(t_1, t_2)(1 + \mathfrak{p}(t_1, t_2)),$$

wo $C = 1$ ist, wenn $\mathfrak{P}_2(t_1, t_2)$ kein constantes Glied hat.

Der Ausdruck $\frac{dx_1\,dx_2}{y}$ hat in der Umgebung der Stelle $(a_{1,}$
die Gestalt:

$$\frac{2\,\mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2).\frac{\partial(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{P}_2)}{\partial(t_1, t_2)}\,dt_1 dt_2}{a_{\mu o}\,C(1 + \mathfrak{p}(t_1, t_2))}.$$

Die Functionaldeterminante von $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{P}_2$ darf an der Stelle $t_2) = (0, 0)$ nicht verschwinden, sonst würden einer Stelle $x_2)$ aus der Umgebung von (a_1, a_2) mehr als zwei Werthe (t_1, t_2) und dann mehr als zwei Werthe y zugehören, was nicht möglich ist.

Ist (a_1, a_2) ein Doppelpunkt des zu der Gleichung $R(x_1, x_2) = 0$ gehörenden Gebildes, und nennt man die zwei von einander verschiedenen Wurzeln der Gleichung:

$$a_{20}\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 + \frac{a_{11}}{a_{20}}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) + \frac{a_{02}}{a_{20}}\right) = 0$$

$= 1, 2)$, bestimmt dann zwei Grössen α_i und β_i derart, dass

$$\alpha_i - z_i \beta_i = 1$$

so erhält man durch die Substitutionen:

$$\xi_1 = (-z_i + \alpha_i \xi_2^{(i)})\xi_1^{(i)}, \quad \xi_2 = (-1 + \beta_i \xi_2^{(i)})\xi_1^{(i)},$$

$$y^2 = \xi_1^{(1)2}\{\xi_1^{(1)} c_1 + \xi_2^{(1)} a_{20}(z_2 - z_1) + (\xi_1^{(1)}, \xi_2^{(2)})_2 + \ldots\}$$

$$y^2 = \xi_1^{(2)2}\{\xi_1^{(2)} c_2 + \xi_2^{(2)} a_{20}(z_1 - z_2) + (\xi_1^{(2)}, \xi_2^{(2)})_2 + \ldots\},$$

$(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)})_\nu$ das Aggregat von Gliedern νter Dimension bezeichnet c_1, c_2 Constante sind.

Ist $z_1 = z_2 = -\frac{a_{11}}{2\,a_{20}} = z$ und wählt man α und β derart, dass

$$\alpha - z\beta = 1$$

so führt die Substitution:

$$\xi_1 = (-z + \alpha \xi_2^{(0)})\xi_1^{(0)}, \quad \xi_2 = (-1 + \beta \xi_2^{(0)})\xi_1^{(0)}$$

$$y^2 = \xi_1^{(0)2}\{\xi_1^{(0)} c_0 + (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)})_2 + \ldots\}$$

in der Klammer ist das einzige Glied, welches keine Potenz von $\xi_1^{(0)}$ als Factor enthält $a_{20} \cdot \xi_2^{(0)2}$.

Nach diesen Umbildungen erscheint die ursprüngliche Gleichung in einer Form, wo die Anwendung der früheren Lehren zum Zwecke der Entwicklung wieder möglich ist.

Man setze im Falle des einfachen Doppelpunktes der C
$R(x_1, x_2) = 0$

$$\xi_1^{(i)} c_i = \mathfrak{p}_1^{2(i)}(t_1, t_2), \quad \xi_2^{(i)} = \mathfrak{p}_1^{2(i)}(t_1, t_2)\,\mathfrak{P}_2^{(i)}(t_1, t_2)$$

und erhält

$$y = \frac{C\mathfrak{p}_1^{(i)3}(t_1, t_2)}{c}(1 + \mathfrak{p}^{(i)}(t_1, t_2))$$

$$\frac{dx_1\,dx_2}{y} = \frac{c_i \frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}\,dt_1\,dt_2}{C\mathfrak{p}_1^{(i)3}(t_1, t_2)(1 + \mathfrak{p}^{(i)}(t_1, t_2))}$$

wo $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}$ den Factor $\mathfrak{p}_1^{(i)4}(t_1, t_2)$ hat. Ist aber (a_1, a_2) ein R
kehrpunkt, so führe man ein

$$\xi_1^{(0)} c_0 = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2), \quad \xi_2^{(0)} = \mathfrak{p}_1(t_1, t_2) \cdot \mathfrak{P}_2(t_1, t_2),$$

dann ergibt sich für y die Darstellungsform:

$$y = \frac{C}{c}\,\mathfrak{p}_1^3(t_1, t_2)(1 + \mathfrak{p}(t_1, t_2))$$

und $\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)}$ hat den Factor $\mathfrak{p}_1^3(t_1, t_2)$.

In gleicher Weise wird man das gegebene Gebild
besprechen haben, wenn die Stelle (a_1, a_2) eine mehr als z
elementige des irreductiblen Gebildes $R = 0$ ist. Falls z. B. $(a$
eine dreielementige Stelle ist und die Gleichung

$$a_{30}\left(\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^3 + \frac{a_{21}}{a_{30}}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right)^2 + \frac{a_{12}}{a_{30}}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}\right) + \frac{a_{03}}{a_{30}}\right) = 0$$

die dreifache Wurzel $\frac{\xi_1}{\xi_2} = z$ besitzt, führt eine Substitution
früher zu der erwünschten Form von y. $\left(\frac{dx_1\,dx_2}{y}\right)$ wird an der S
$(t_1, t_2) = (0, 0)$ nicht mehr endlich bleiben.

Wenn bei einer Transformation der beschriebenen Art
zu einer k-fachen Wurzel z_μ der Gleichung

$$a_{\mu,0}\left(\frac{\xi_1}{\xi_2}, 1\right)_\mu = 0$$

örtt, in

$$R(x_1, x_2) = (\xi_1^{(\mu)})^{\mu} R^{(\mu)}(\xi_1^{(\mu)}, \xi_2^{(\mu)})$$

Glied $c(\xi_1^{(\mu)})^{\mu+1}$ nicht vorkommt, so hat man für $\xi_1^{(\mu)}, \xi_2^{(\mu)}$ neue iabeln in der früheren Weise einzuführen und wegen der ductibilität von $R(x_1, x_2)$, die sich auf $R^{(\mu)}(\xi_1^{(\mu)}, \xi_2^{(\mu)})$ übert, wird man nach einer endlichen Anzahl von Transformationen inem Ausdrucke:

$$R(x_1, x_2) = (\xi_1^{(\mu)})^{\mu} (\xi_1^{(\mu_1)})^{\mu_1}, \ \ldots \ (\xi_1^{(\mu_\varkappa)})^{\mu_\varkappa} R^{(\mu_\varkappa)}(\xi_1^{(\mu_\varkappa)}, \xi_2^{(\mu_\varkappa)})$$

ngen, wo $R^{(\mu_\varkappa)}$ ein Glied $c_\varkappa \xi_1^{(\mu_\varkappa)}$ enthält.

Beschränken wir uns auf den Fall derjenigen Curven $R = 0$, im Endlichen keine mehr als zweielementigen Stellen haben, t die Discussion beendet, bei der unter Anderem auch hervor-, dass $\frac{dx_1\, dx_2}{y}$ höchstens an mehr als zweielementigen Stellen $R(x_1, x_2)$ unendlich werden kann.

Nun ist das zweistufige Gebilde auch in der Umgebung der en $(a_1, a_2) = (a_1, \infty), (\infty, a_2), (\infty, \infty)$ zu untersuchen.

Steht zunächst die Beschaffenheit des Gebildes in der ;ebung der Stelle (∞, ∞) in Frage, so schreiben wir die e Function n^{ter} Ordnung $R(x_1, x_2)$, die auch x_1^n enthalte, ss x_2 nur in der m^{ten} Potenz vorkomme, in der Form

$$x_1^n x_2^m R_0\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right) = x_1^n x_2^m R_0(\xi_1, \xi_2).$$

Dann ist $(\xi_1, \xi_2) = (0, 0)$ eine m-fache Nullstelle von R_0, wenn

$$\begin{aligned}(, x_2) = A_{00} &+ (A_{10} x_1 + A_{01} x_2) + \ldots + (A_{m,0} x_1^m + \ldots + A_{0,m} x_2^m) \\ &+ x_1 (A_{m+1,0} x_1^m + \ldots + A_{1,m} x_2^m) + \ldots \\ &+ x_1^{n-m} (A_{n,0} x_1^m + \ldots + a_{n-m,m} x_2^m)\end{aligned}$$

, wird

$$\begin{aligned}(_1, \xi_2) = (A_{n0} \xi_2^m + \ldots + A_{n-m,m} \xi_1^m) + \ldots \\ + \xi_1^{m-1} \xi_2^{n-1} (A_{01} \xi_1 + A_{10} \xi_2) + A_{00} \xi_1^m \xi_2^n.\end{aligned}$$

Setzen wir voraus, dass die Gleichung

$$A_{n,0}\left(\left(\frac{\xi_2}{\xi_1}\right)^m + \ldots + \frac{A_{n-m,m}}{A_{n,0}}\right) = 0$$

m gleiche Wurzeln z besitze und vollführen wir die Substitu

$$\xi_1 = (-z+\alpha\xi_1')\xi_2', \quad \xi_2 = (-1+\beta\xi_1')\xi_2',$$

wo

$$\alpha - \beta z = 1$$

ist, so wird

$$R_0(\xi_1, \xi_2) = \xi_2'^m R_0'(\xi_1', \xi_2'),$$

wo R_0' das einzige von ξ_2' freie Glied $A_{n,0}\xi_1'^m$ enthält und ein G $c\xi_2'$ vorkommen möge.

Man hat dann die Beziehungen

$$\xi_1' = \frac{z\xi_2 - \xi_1}{\alpha\xi_2 - \beta\xi_1}, \quad \xi_2' = \beta\xi_1 - \alpha\xi_2.$$

$$y^2 = \frac{R_0'(\xi_1', \xi_2')}{\xi_2'^n(-1+\beta\xi_1')^m(-z+\alpha\xi_1')^n}$$

und $R_0'(\xi_1', \xi_2')$ besitzt die Form:

$$\xi_2' Q_0' + \xi_1'^m A_{n0}.$$

Setzt man nun

$$c^{\frac{1}{n-1}}\xi_2' = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2), \quad \xi_1' = \mathfrak{P}_1(t_1, t_2)\mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2),$$

so erhält y die Gestalt

$$\frac{Cc(1+\mathfrak{p}(t_1, t_2))}{\mathfrak{p}_2^{n-1}(t_1, t_2)}$$

und weil

$$\frac{\partial(x_1, x_2)}{\partial(t_1, t_2)} = \frac{-2\frac{\partial(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(t_1, t_2)}}{\mathfrak{p}_2^3(t_1, t_2)(-z+\alpha\mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_2^2)^2(-1+\beta\mathfrak{P}_1\mathfrak{p}_2^2)^2}$$

ist, nimmt $\frac{dx_1\,dx_2}{y}$ in der Umgebung der Stelle (∞, ∞) Form an:

$$\frac{\mathfrak{p}_2^{n-4}(t_1, t_2)\frac{\partial(\mathfrak{P}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(t_1, t_2)}\,dt_1\,dt_2}{C'(1+\mathfrak{p}(t_1, t_2))}.$$

Diese Formel leitete ich zum Zwecke der Vergleichung der bnisse mit denjenigen von H. Nöther in den Mathematischen alen, Band II, ab.

Ich will in Folgendem über die Beschaffenheit des Gebildes $(x_1, \overset{m}{x_2}) = 0$ die Annahme machen, dass sowohl $x_1 = \infty$ als $x_2 = \infty$ m, beziehungsweise n endliche und verschiedene ler x_1 Werthe entsprechen. Dann darf in $R(x_1, x_2)$ das Glied x_2^m nicht fehlen und bei der Anordnung

$$R(x_1, x_2) = x_2^m f_0(x_1) + \ldots + f_m(x_1)$$
$$= x_1^n g_0(x_2) + \ldots + g_n(x_2)$$

en $f_0(\overset{n}{x_1})$, $g_0(\overset{m}{x_2})$ verschiedene Nullstellen haben.

Kommt $R(x_1, x_2)$ die verlangte Beschaffenheit nicht zu, so man unter (a_1, a_2) eine Stelle verstehend, an welcher x_2) nicht verschwindet,

$$x_1 = a_1 + \frac{\alpha_1}{\xi_1}, \quad x_2 = a_2 + \frac{\alpha_2}{\xi_2}$$

an erhält

$$y^2 = \frac{R'(\xi_1, \xi_2)}{\xi_1^n \xi_2^m}.$$

Sind hier n und m gerade, so betrachte man statt des les $y^2 = R(x_1, x_2)$ das durch die Gleichung

$$\eta^2 = R'(\xi_1, \xi_2)$$

mte und beachte die Beziehung

$$y = \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n}{2}} \xi_2^{\frac{m}{2}}}.$$

alls aber m oder n oder beide Exponenten ungerade sind, nan

$$\eta^2 = \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2),\ \xi_1 R'(\xi_1, \xi_2),\ \xi_1 \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2)$$

nn ist

$$y = \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n}{2}} \xi_2^{\frac{m+1}{2}}},\ \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n+1}{2}} \xi_2^{\frac{m}{2}}},\ \frac{\eta}{\xi_1^{\frac{n+1}{2}} \xi_2^{\frac{m+1}{2}}}.$$

Denkt man jedesmal über die willkürlichen Coëfficien $a_1, a_2, \alpha_1, \alpha_2$ so verfügt, dass in

$$R'(\xi_1, \xi_2) = \xi_2^m f_0'(\xi_1) + \ldots + f_m'(\xi_1)$$
$$= \xi_1^n g_0'(\xi_2) + \ldots + g_0'(\xi_2)$$

$f_0'(\xi_1)$ und $g_0'(\xi_2)$ von einander verschiedene Nullstellen besi und unter diesen $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 0$ nicht vorkommt, so gelten die nunmehr zu betrachtenden zweistufigen Gebilde betreffs unendlich fernen Stelle die obigen Voraussetzungen.

Man kann bei der beschriebenen Transformation die kürlichen Constanten stets auch so wählen, dass bei Untersuch der singulären Stellen der jetzt reductiblen Gebilde

$$\xi_1 R'(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2) = 0, \quad \xi_1, \xi_2 R'(\xi_1, \xi_2) = 0$$

die Reductibilität nicht den Fall mit sich bringt, wo das einstu Gebilde in der Umgebung der singulären Stellen nicht so tr formirt werden kann, dass eine erste Potenz einer der eingeführ Variabeln auftritt.

Wir sind also stets in der Lage, die genannte Voraussetz über das Gebilde $y^2 = R(x_1, x_2)$ ohne Einschränkung der Al meinheit einzuführen, wollen aber in der Folge wieder festset dass $R(x_1, x_2)$ irreductibel sei.

Sind $(a_1^{(1)}, a_2^{(1)}), \ldots (a_1^{(k)}, a_2^{(k)})$ die singulären Stellen Gebildes $R(x_1, x_2) = 0$ derart, dass das Gebilde in der Umgeb von $(a_1^{(\nu)}, a_2^{(\nu)})$ durch Reihen

$$x_1 - a_1^{(\nu)} = t^{\mu_\nu}, \qquad x_2 - a_2^{(\nu)} = t\mathfrak{P}(t)$$

dargestellt wird — wo $\mathfrak{P}(0)$ auch Null sein kann — so ist Geschlecht von $R(x_1, x_2) = 0$ durch den Ausdruck

$$p = \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{k} (\mu_\nu - 1) - (m-1)$$

gegeben. Falls aber alle Verzweigungsstellen einfache sind das Gebilde d Doppel- und r Rückkehrpunkte als mehrelemen Stellen besitzt, ist

$$k = m(m-1) - 2d - 2r$$

jedes $\mu_\nu = 2$, also

$$\rho = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - (d+r).$$

Setzen wir der Einfachheit halber voraus, dass der Curve $= 0$ nur Doppel- und Rückkehrpunkte zugehören, so können jetzt für das endlich bleibende Doppelintegral

$$\iint \frac{f(x_1, x_2)}{y}\, dx_1\, dx_2$$

immte Angaben machen.

Betreffs der eben genannten Punkte hat man $f(x_1, x_2)$ keiner ngung zu unterwerfen.

Bezeichnet man die Wurzeln von

$$f_0(x_1) = 0 \quad \text{mit} \quad x_1 = a_1^{(1)}, \ldots a_1^{(m)}$$
$$g_0(x_2) = 0 \quad \text{„} \quad x_2 = a_2^{(1)}, \ldots a_2^{(n)},$$

t in der Umgebung von (∞, a_2) oder (a_1, ∞)

$R(x_1, x_2) =$

$$x_1^m R_1\left(\frac{1}{x_1}, x_2\right) = x_1^m \left\{ \left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right) \frac{1}{x_1} + \left(\frac{\partial R_1}{\partial x_2}\right)(x_2 - a_2) + \ldots \right\},$$

$$x_2^m R_2\left(x_1, \frac{1}{x_2}\right) = x_2^m \left\{ \left(\frac{\partial R_2}{\partial x_1}\right)(x_1 - a_1) + \left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right) \frac{1}{x_2} + \ldots \right\}.$$

Setzt man dann

$$\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)^{\frac{1}{n-1}} \frac{1}{x_1} = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2), \quad x_2 - a_2^{(\mu)} = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2)\mathfrak{P}_2(t_1, t_2)$$

$$\left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)^{\frac{1}{m-1}} \frac{1}{x_2} = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2), \quad x_1 - a_1^{(\nu)} = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2)\mathfrak{P}_1(t, t_2),$$

so folgt

$$y = \frac{(C_1(1+\mathfrak{p}'(t_1,t_2))}{\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_1}\right)}\right)\mathfrak{p}_1^{n-1}(t_1,t_2)} \quad \text{oder} \quad \frac{C_2(1+\mathfrak{p}''(t_1,t_2))}{\left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)\mathfrak{p}_2^{m-1}(t_1,t_2)}$$

und

$$\frac{dx_1 dx_2}{y} = \frac{-2\cdot\mathfrak{p}_1^{n-2}(t_1,t_2)\frac{\partial(\mathfrak{p}_1,\mathfrak{P}_2)}{\partial(t_1,t_2)}dt_1 dt_2}{C_1\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{x_1}\right)}\right)^{\frac{n-2}{n-1}}(1+\mathfrak{p}'(t_1,t_2))}$$

oder

$$= \frac{-2\,\mathfrak{p}_2^{m-2}(t_1,t_2)\frac{\partial(\mathfrak{p}_2,\mathfrak{P}_1)}{\partial(t_1,t_2)}dt_1 dt_2}{C_2\left(\frac{\partial R_2}{\partial\left(\frac{1}{x_2}\right)}\right)^{\frac{m-2}{m-1}}(1+\mathfrak{p}''(t_1,t_2))}.$$

An den übrigen Stellen des Typus (∞, a_2) oder (a_1, ∞), die $\left(R_1\left(\frac{1}{x_1}, x_2\right)\right)$, $R_2\left(x_1, \frac{1}{x_2}\right)$ nicht verschwindet, setze n

bei ungeradem $n = 2\nu+1$

$$R_1(0,a_2)x_1 = \frac{1}{t_1^2}, \quad x_2 - a_2 = t_2,$$

bei geradem $n = 2\nu$

$$R_1(0,a_2)x_1 = \frac{1}{t_2}, \quad x_2 - a_2 = t_2,$$

bei ungeradem $m = 2\mu+1$

$$x_1 - a_1 = t, \quad R_2(a_1,0)x_2 = \frac{1}{t_2^2}$$

und bei geradem $m = 2\mu$

$$x_1 - a_1 = t_1, \quad R_2(a_1,0)x_2 = \frac{1}{t_2}.$$

Dann geht für y der Reihe nach die Form hervor:

$$\frac{1+\mathfrak{p}(t_1^2, t_2)}{R_1^{\nu}(0, a_2)\, t_1^{2\nu+1}}, \quad \frac{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}{\overline{R_1^{\,2}}^{\,2\nu-1}(0, a_2).\, t_1^{\nu}},$$

$$\frac{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2^2)}{R_1^{\mu}(a_1, 0)\, t_2^{2\mu+1}}, \quad \frac{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}{\overline{R_2^{\,2}}^{\,2\mu-1}(a_1, 0).\, t_2^{\mu}}$$

$\frac{dx_1 dx_2}{y}$ wird von der Gestalt:

$$\frac{-2R_1^{\nu-1}(0, a_2)\, t_1^{2\nu-2}\, dt_1 dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1^2, t_2)}, \quad \frac{-\overline{R_1^{\,2}}^{\,2\nu-3}(0, a_2)\, t_1^{\nu-2}\, dt_1 dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}$$

$$\frac{-2R_2^{\mu-1}(a_1, 0)\, t_2^{2\mu-2}\, dt_1 dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2^2)}, \quad \frac{-\overline{R_2^{\,2}}^{\,2\mu-3}(a_1, 0)\, t_2^{\mu-2}\, dt_1 dt_2}{1+\mathfrak{p}(t_1, t_2)}$$

Zufolge der vorausgesetzten Beschaffenheit von $R(x_1, x_2)$ ilten wir in der Umgebung der Stelle $(x_1, x_2) = (\infty, \infty)$ die leibweise

$$y^2 = x_1^n x_2^m R_0\left(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}\right)$$

hier ist $R_0(0, 0) = A_{n,m}$ von Null verschieden.
Wenn n und m ungerade sind, führe man ein

$$\frac{A_{nm}}{x_1} = \mathfrak{p}_1^2(t_1, t_2), \quad \frac{1}{x_2} = \mathfrak{p}_2^2(t_1, t_2).\, \mathfrak{P}(t_1, t_2)$$

setze fest, dass $\mathfrak{p}_1$ durch $\mathfrak{p}_2$, oder $\mathfrak{p}_2$ durch $\mathfrak{p}_1$ theilbar ist, wird

$$y = \frac{A_{n,m}^{\nu+1}(1+\mathfrak{p}(t_1, t_2))}{\mathfrak{p}_1^{2\nu+1}(t_1, t_2)\, \mathfrak{p}_2^{2\mu+1}(t_1, t_2)}.$$

$$\frac{dx_1 dx_2}{y} = \frac{4\mathfrak{p}_1^{2\nu-2}(t_1, t_2)\, \mathfrak{p}_2^{2\mu-2}(t_1, t_2)\, \frac{\partial(\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)}{\partial(t_1, t_2)}\, dt_1 dt_2}{A_{nm}^{\nu}(1+\mathfrak{p}'(t_1, t_2))}.$$

hnlich gehe man in den übrigen Fällen vor.
ehen wir nun nach, wann ein Doppelintegral

$$\iint F(x_1, x_2, y)\, dx_1 dx_2,$$

wo F eine rationale Function bezeichne, überall endlich s
kann, so geht hervor, dass F der Quotient einer ganzen Funct
$f(x_1, x_2)$ und y sein muss, und zwar darf, wenn $n = 2\nu$
$m = 2\mu+1$ ist, in $f(x_1, x_2)$ x_1 in nicht höherer als der $(\nu-1)$
x_2 in nicht höherer als der $(\mu-1)^{\text{ten}}$ Potenz vorkommen,
die Ordnung kann bis

$$\mu+\nu-2 = \frac{m+n-4}{2}$$

ansteigen.

Nun enthält

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \varphi_0(x_2)x_1^{\nu-1} + \ldots + \varphi_{\nu-1}(x_2) \\ &= \psi_0(x_1)x_2^{\mu-1} + \ldots + \psi_{\mu-1}(x_1) \end{aligned}$$

noch $\mu\nu$ Constante und an diese braucht man keine weite
Forderungen zu knüpfen, denn unser nunmehriges Doppelinte

$$\iint \frac{f(\overset{\nu-1}{x_1}, \overset{\mu-1}{x_2})\, dx_1 dx_2}{\sqrt{R(\overset{n}{x_1}, \overset{m}{x_2})}}$$

wird offenbar auch an den Nullstellen der Typen $(\infty, a_2^{(\mu)})$
$(a_1^{(\nu)}, \infty)$ endlich bleiben.

In den übrigen Fällen wird es ebenso leicht sein, die F
der endlich bleibenden Doppelintegrale festzustellen. Auch d
böten sich keine erheblichen Schwierigkeiten, wenn die zu
Gebilde höherer Art:

$$y^p = R(x_1, x_2)$$

gehörenden Doppelintegrale „erster Gattung“ zu suchen wä

§. 2.

Stellen wir nun die Aufgabe, Perioden unserer Doppelinteg
zu finden, so gedenken wir einerseits des Vorganges, den
Poincaré[1] zur Bestimmung der Perioden von Doppelintegr
rationaler gebrochener Functionen einführte und bemerken,
uns derselbe hier ganz aussichtslos erscheint, denn er bestel
folgender zusammengesetzten Aufgabe:

---

[1] Acta mathematica, Bd. 9.

Ist

$$x_1 = \xi_1 + i\eta_1, \quad x_2 = \xi_2 + i\eta_2,$$

erhält man eine besondere singuläre Fläche in der vierfach gedehnten unendlichen Mannigfaltigkeit $(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)$ durch Nullsetzen des imaginären und reellen Theiles eines algebraischen Ausdruckes $P(x_1, x_2)$, so führe man für $\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2$ Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ neuer reeller Variabeln λ, μ, ν ein und integrire ausserhalb des Raumes (λ, μ, ν) über eine Fläche, welche die der singulären Fläche innerhalb (λ, μ, ν) entsprechende singuläre Fläche umschliesst.

Hier bei den endlich bleibenden Doppelintegralen expliciter Irrationaler Functionen fehlen zunächst die singulären Flächen, da es ist nicht zu ersehen, über welche Flächen die Integration zu erstrecken ist, damit man Perioden erhält.

Wir wenden uns zu einem anderen Mittel, das in der Bestimmung der Perioden eines einfachen Integrales $\int \frac{f(x,y)\,dy}{\sqrt{R(x,y)}}$ in einem Parameter x liegt. Sehen wir diese Perioden ω als Functionen des Parameters x an, und suchen die Cyclen der vielwerthigen Function $\omega(x)$, so wird das Integral

$$\int \omega(x)\,dx$$

eines solchen Cyclus eine Periode des Doppelintegrales

$$\iint \frac{f(x,y)\,dx\,dy}{\sqrt{R(x,y)}}$$

(man vergl. die Notiz von M. Picard in den Comptes rendus 25. Februar 1886, S. 410).

Wir haben vor Allem ω als Function des Parameters zu untersuchen.[1]

Wir führen folgende Bezeichnungen ein: Das Gebilde $f(x,y) = 0$ sei von der Ordnung $2m+2n+2$ und besitze das Glied $x^{2m+1}y^{2n+1}$; die

$$2n(2n+1) - 2(d+r) = N = 2p$$

[1] Siehe Fuchs, Crelle's Journal, Bd. 71.

Verzweigungsstellen seien

$$x = a_1, a_2, \ldots a_N,$$

die d Doppelpunkte

$$x = \alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_d$$

und

$$x = \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_{2m+1}$$

die Werthe, die $y = \infty$ zugehören, endlich

$$y = b_1, b_2, \ldots b_{2n+1}$$

die y-Werthe, welche $x = \infty$ entsprechen.

Geben wir x jetzt einen von den genannten Werthen verschiedenen Werth $x^{(0)}$, so gehen aus der Gleichung

$$R(x^{(0)}, y^{2n+1}) = 0$$

$2n+1$ verschiedene y-Werthe

$$b_0^{(0)}, b_1^{(0)}, \ldots b_{2n}^{(0)}$$

hervor, die nebst $y = \infty$ Verzweigungspunkte des überall endlichen Integrales

$$\int \frac{f(x^{(0)}, y^{m-1}, y^{n-1})\, dy}{z^{(0)}}$$

sind, wenn nunmehr $R(x, y) = z^2$ gesetzt wird und $z^{(0)}$ den Werth von $\sqrt{R(x^{(0)}, y)}$ anzeigt.

Verzeichnet man in der Riemann'schen Fläche $Y^{(0)}$ Querschnitte, so ergeben sich zugehörig $2n$ Perioden $\omega_\nu(x^{(0)})$.

Führt man x von $x^{(0)}$ zu einem anderen Werthe $x^{(1)}$, ohne dabei durch eine der früher ausgeschlossenen Stellen zu gehen, so erhält man aus den Werthen $b^{(0)}$ — stetig längs bestimmter Wege $B^{(0)}$ fortschreitend — Werthe $b^{(1)}$, und jeder nicht auf einer Curve $B^{(0)}$ liegenden Stelle y gehört ein z Werth zu, der wieder in einen bestimmten anderen übergeht.

Dem Werthe $x^{(1)}$ entsprechend, bilde man wieder eine Riemann'sche Fläche $Y^{(1)}$. In stetig einander folgenden y-Punkten derselben folgen die z-Werthe stetig, ausser dann, wenn die Punkte durch Verzweigungsschnitte oder eine Curve $B^{(0)}$ getrennt werden. Bei dem Überschreiten derselben gehen die z-Werthe in die

engesetzten über; daher bestehen nun die Verzweigungs-
nitte innerhalb $Y^{(1)}$ aus denen von $Y^{(0)}$ und den Curven $B^{(0)}$.

Die Querschnitte gehen in andere continuirlich über und die
ehörigen Perioden seien $\omega_\nu(x^{(1)})$. Jede der $2n$ Perioden gibt
Vereine mit allen auf so entsprechenden Querschnitten in den
schiedenen Flächen zu bestimmenden Perioden eine Function
x. Jede Periode ist in der Umgebung jeder endlichen, oben
t ausgeschlossenen Stelle regulären Verhaltens. Lässt man x
von $x^{(0)}$ aus einen Umlauf um eine Verzweigungsstelle $x = a$
eine Stelle α vollführen, so werden die Werthe $b_0^{(0)}, \ldots b_{2n}^{(0)}$
penweise cyclisch in einander übergehen. Die Perioden in
aus $Y^{(0)}$ entstehenden Fläche werden darnach als ganze ganz-
ige lineare Functionen derer in $Y^{(0)}$ erscheinen, d. h. die
oden haben als Functionen von x die Eigenschaft, nach einem
aufe von x um eine Stelle a in homogene lineare ganzzahlige
tionen der ursprünglichen Werthe überzugehen.

Zum Zwecke der näheren Beurtheilung des Verhaltens der
oden betrachten wir mit H. Fuchs das Product der Diffe-
en der Wurzeln $y = b_0^{(0)}, \ldots b_{2n}^{(0)}$ der Gleichung $R(x^{(0)}, y) = 0$

$$\Pi(b_\lambda^{(0)} - b_\mu^{(0)}) = \Pi(b_\lambda^{(0)} - y - (b_\mu^{(0)} - y))$$
$$= \Sigma c_{\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_{2n}} (b_0^{(0)} - y)^{\varkappa_0} (b_1^{(0)} - y)^{\varkappa_0} \ldots (b_{2n}^{(0)} - y)^{\varkappa_{2n}},$$

ie Coëfficienten c positive oder negative ganze Zahlen sind
$\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_{2n}$ Zahlen der Reihe $0, 1, 2, \ldots 2n$ sind, deren
nen in jedem Glied $n(2n+1)$ ist, und bilden:

$$\omega(x^{(0)}) = -\Sigma c_{\varkappa_0, \varkappa_1, \ldots \varkappa_{2n}} \int \frac{(b_0^{(0)} - y)^{\varkappa_0} \ldots (b_{2n}^{(0)} - y)^{\varkappa_{2n}}}{\left(f_0(x^{(0)}) \prod_{\nu=1}^{2n+1} (y - b_\nu^{(0)})\right)^{\frac{1}{2}}} f(x^{(0)}, y)\, dy$$

ie Integrale über einen Querschnitt innerhalb $Y^{(0)}$ zu
cken sind.

Da die Integrale im Endlichen durchaus endlich bleiben,
wenn mehrere der Grössen b zusammenfallen, so wird $\omega(x)$
an den singulären Stellen a und α solchen Verhaltens, dass
en Umgebung $P.\omega(x)$ nicht unendlich wird.

$= \Pi(b_\lambda - y - (b_\mu - y))$ ist, als Function von x betrachtet,
regulären Stellen x selbst regulär; an den Stellen a, wo

zwei y-Werthe gleich werden und sich verzweigen, verschwinde
und lässt sich als Function von x in der Form

$$(x-a)^{\frac{1}{2}}\mathfrak{P}(x|a)$$

entwickeln, folglich ist an diesen Stellen

$$\lim_{x=a}\left((x-a)^{\frac{1}{2}}\omega(x)\right)$$

eine endliche von Null verschiedene Grösse.

In der Umgebung der Stellen von α gilt diese Eigensch
bereits von

$$\lim_{x=\alpha}(x-a)\omega(x).$$

Lassen wir x in eine Stelle $\mathfrak{a}$ rücken, so entspricht die
Werthe ein $y=\infty$ und in der Umgebung von $(x=\mathfrak{a}, y=\infty)$ w

$$R(x,y)=y^{2n+1}R_1\left(x,\frac{1}{y}\right)=y^{2n+1}\left\{\left(\frac{\partial R_1}{\partial x}\right)(x-\mathfrak{a})+\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}\right)\frac{1}{y}+\right.$$

und desshalb:

$$(R(x,y))_{x=\mathfrak{a},\,y=\infty}=\left\{y^{2n+1}\left[\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}\right)\frac{1}{y}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial^{2n+1}R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)^{2n+1}}\right)\frac{1}{y^{2n+}}\right.\right.$$

Nennt man die $x=\mathfrak{a}$ entsprechenden y-Werthe ausser $y=$

$$\beta_1,\beta_2,\ldots\beta_{2n}$$

und bildet:

$$\overline{P}=\Sigma\bar{c}_{\varkappa_0,\varkappa_1\ldots\varkappa_{2n}}(\beta_1-y)^{\varkappa_1}\ldots(\beta_{2n}-y)^{\varkappa_{2n}}\left(\frac{1}{y}\right)^{\varkappa_0}$$

$$=\Sigma\bar{c}_{\varkappa_0,\varkappa_1\ldots\varkappa_{2n}}y^{n(2n+1)-2\varkappa_0}\left(\frac{\beta_1}{y}-1\right)^{\varkappa_1}\ldots\left(\frac{\beta_{2n}}{y}-1\right)^{\varkappa_{2n}}$$

so wird

$$\overline{P}.\omega=-\Sigma\bar{c}_{\varkappa_0,\varkappa_1\ldots\varkappa_{2n}}\int\frac{y^{n(2n+1)-2\varkappa_0-1}\prod_{\nu=1}^{2n}\left(\frac{\beta_\nu}{y}-1\right)^{\varkappa_\nu}.f\left(\mathfrak{a},\frac{1}{y}\right)d}{\sqrt{\left(\frac{\partial R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)}\right)+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}\left(\frac{\partial^{2n+1}R_1}{\partial\left(\frac{1}{y}\right)^{2n+1}}\right.}}$$

Weil $\varkappa_0$ von 0 bis $2n$ wachsen kann, wird die rechte Seite ndlich werden können für $y = \infty$, wie $y^{n(2n+1)}$. Indem aber $= (x-\mathfrak{a})\mathfrak{P}(x|\mathfrak{a})$ zu setzen ist, wird

$$\overline{P}.\omega.(x-\mathfrak{a})^{n(2n+1)}$$

ler Stelle $x = \mathfrak{a}$ endlich bleiben und zufolge der Beschaffenheit $\overline{P}$ als Function von x, $\omega(x)$ an der Stelle $\mathfrak{a}$ regulären Verens sein.

Wir haben endlich noch $x = \infty$ zu setzen, wobei y die $+1)$ endlichen und verschiedenen Werthe $b_0, \ldots b_{2n+1}$ annt.

Wir schreiben

$$R(x,y) = x^{2m+1} R_2\left(\frac{1}{x}, y\right), \quad f(x,y) = x^{m-1} f\left(\frac{1}{x}, y\right)$$

sehen, dass

$$x^{\frac{1}{2}}\omega.\Pi\,(b_\mu - y - (b_\nu - y))$$

er Umgebung von $y = b$ regulär ist, und darum wird $x^{\frac{1}{2}}\omega(x)$ er Umgebung von $x = \infty$ regulären Verhaltens, $\omega(x)$ also der Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}} \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right).$$

Aus den hier entwickelten Eigenschaften der $2n$ Perioden esst man, dass dieselben einer linearen Differentialgleichung Ordnung genügen, deren Coëfficienten rationale Funcn sind:

$$\frac{d^{2n}\omega}{dx^{2n}} + \frac{P_{2n-1}}{P_{2n}}\frac{d^{2n-1}\omega}{dx^{2n-1}} + \ldots + \frac{P_0}{P_{2n}}\omega = 0,$$

wobei ist

$$\frac{P_{2n-i}}{P_{2n}} = \frac{F_{(p-1)i}(x)}{\psi^i_{(x)}},$$

$$\psi(x) = (x-a_1)\ldots(x-a_N)(x-\alpha_1)\ldots(x-\alpha_d)$$

$$N+d = p$$

ist und $F_{(p-1)i}(x)$ eine ganze rationale Function bedeutet, de Grad höchstens der $(p-1)^{i\text{te}}$ ist.

Die sämmtlichen Wurzeln der zu den singulären Stelle und α gehörenden determinirenden Fundamentalgleichung s rationale Zahlen.

Wenn man im besonderen Falle die zu den singulären Stel gehörenden Fundamentalsysteme von Integralen des Nähe bestimmt, kann man dann auch die Cyclen für das allgeme Integral $\omega(x)$ finden und längs den Wegen $\int \omega(x)dx$ bestimm um die Perioden des endlich bleibenden Doppelintegrales ermitteln.

Die Zahl der von einander unabhängigen Cyclen betr für die einzelne Periode $\omega_\nu(x)$ N, folglich gibt es $(2\rho)^2$ Perio für das Doppelintegral.

Aus der k. k. Hof- und Staatsdruckerei in Wien.

With the author's compliments

CERTAIN CASES IN WHICH THE VANISHING OF THE WRONSKIAN IS A SUFFICIENT CONDITION FOR LINEAR DEPENDENCE

BY

MAXIME BÔCHER

Reprinted from the
TRANSACTIONS OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Vol. 2, No. 2, pp. 139–149
April, 1901

PRESS OF
THE NEW ERA PRINTING COMPANY
LANCASTER, PA.

CERTAIN CASES IN WHICH THE VANISHING OF THE WRONSKIAN IS A SUFFICIENT CONDITION FOR LINEAR DEPENDENCE*

BY

MAXIME BÔCHER

PEANO in Mathesis, vol. 9 (1889), p. 75 and p. 110 seems to have been the irst to point out that the identical vanishing of the Wronskian of n functions of single variable is not in all cases a sufficient condition for the linear dependence f these functions.† At the same time he indicated a case in which it *is* a sufcient condition,‡ and suggested the importance of finding other cases of the ame sort. Without at first knowing of PEANO'S work, I was recently led to his same question, and found a case not included in PEANO'S in which the identical vanishing of the Wronskian is a sufficient condition.§ It is my purpose n the present paper to consider these cases and others of a similar nature.

By far the most important case in which the identical vanishing of the Wronskian is a sufficient condition for linear dependence is that in which the unctions in question are at every point of a certain region analytic functions, hether of a real or complex variable is, of course, immaterial. This case requires no further treatment here.

We shall therefore be concerned exclusively with the case in which the indeendent variable x is real. This variable we will suppose to be confined to an terval I which may be finite or infinite, and if limited in one or both directons may or may not contain the end points. In some of the proofs we shall se a subinterval $a \leqq x \leqq b$ of I;‖ this subinterval we call I'.

Whether the functions are real or complex is immaterial.

We use the symbol $\equiv$ to denote an identity, i. e., an equality which holds at ery point of the interval we are considering.

---

* Presented to the Society December 28, 1900. Received for publication December 28, 1900.

† It is of course a necessary condition provided the functions have finite derivatives of the st $n-1$ orders at every point of the region in question.

‡ See § 4 of the present paper.

§ See Bulletin of the American Mathematical Society, December, 1900, p. 120, nd Annals of Mathematics, second series, vol. 2, p. 93.

‖ We suppose here that a and b are finite quantities.

§ 1. *The Fundamental Theorem.*

We consider first the special case of two functions.

THEOREM I. *Let $u_1(x)$ and $u_2(x)$ be functions of x which at every point o I have finite first derivatives, while u_1 does not vanish in I; then if*

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' \equiv 0, \tag{1}$$

u_1 and u_2 are linearly dependent throughout I, and in particular

$$u_2 \equiv c u_1. \tag{2}$$

For dividing (1) by u_1^2 we have:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u_2}{u_1}\right) \equiv 0.$$

Therefore:

$$\frac{u_2}{u_1} \equiv c.$$

We pass now to the general case which includes the case just considered.

THEOREM II. *Let $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_n(x)$ be functions of x which at eve point of I have finite derivatives of the first $n-1$ orders, while the Wronski of $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ does not vanish in I; then if the Wronskian W of $u_1, u_2, \cdots, u_n$ vanishes identically $u_1, u_2, \cdots, u_n$ are linearly dependent throughout and in particular:*

$$u_n \equiv c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_{n-1} u_{n-1}.$$

In the Wronskian:

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{vmatrix},$$

we denote by $W_1, W_2, \cdots, W_n$ the minors corresponding to the elements f the last row. We have then:

$$W_1 u_1^{(i)} + W_2 u_2^{(i)} + \cdots + W_n u_n^{(i)} \equiv 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n-$$

Differentiating each of the first $n-1$ of these identities and subtracting fr it the one next following we get:

$$W_1' u_1^{(i)} + W_2' u_2^{(i)} + \cdots + W_n' u_n^{(i)} \equiv 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n-$$

Let us add these identities together after having multiplied the i-th of th

$i = 1, 2, \cdots, n-1$) by the first minor of W_n corresponding to $u_1^{(i-1)}$. This ives:

$$W_1' W_n - W_n' W_1 \equiv 0 .$$

Now since by hypothesis W_n does not vanish in I we have by theorem I:

$$W_1 \equiv - c_1 W_n .$$

n the same way:

$$W_2 \equiv - c_2 W_n ,$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$W_{n-1} \equiv - c_{n-1} W_n .$$

Therefore the identity

$$W_1 u_1 + W_2 u_2 + \cdots + W_n u_n \equiv 0 ,$$

an be written:

$$W_n(- c_1 u_1 - c_2 u_2 \cdots c_{n-1} u_{n-1} + u_n) \equiv 0 ,$$

nd, since W_n does not vanish, our theorem follows at once.*

§ 2. *A Generalization for the Case of Two Functions.*

THEOREM III.† *Let u_1 and u_2 be functions of x which at every point of I ave finite derivatives of the first k orders ($k \geqq 1$), while u_1, u_1', u_1'', $\cdots$, $u_1^{(k)}$ o not all vanish at any one point of I; then if*

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' \equiv 0 ,$$

$_1$ and u_2 are linearly dependent, and in particular:

$$u_2 \equiv c u_1 .$$

This theorem will evidently be established if we can prove it for every finite nd perfect subinterval I' of I. We will therefore in our proof consider only ıe interval I'.

There cannot be more than a finite number of points in I' where $u_1 = 0$. or if there were these points would have at least one limiting point x_0 in I', ıd since u_1 is continuous it would vanish at x_0. By ROLLE'S theorem there ould also be an infinite number of points where $u_1' = 0$ and these points would ıve x_0 as limiting point, and owing to the continuity of u_1' we should have $(x_0) = 0$. Proceeding in the same way we see that u_1'', u_1''', $\cdots$, $u_1^{(k-1)}$ would l vanish at x_0. That $u_1^{(k)}$ would also vanish at x_0 must be shown in a slightly

* This proof is merely a slight modification of the one given by FROBENIUS, Crelle, vol. 76 873), p. 238. Cf. also HEFFTER, *Lineare Differentialgleichungen*, p. 233.

† The special case $k = 1$ of this theorem was given by PEANO, l. c. Cf. also Annals of athematics, second series, vol. 2, p. 92.

different manner since we do not know that $u_1^{(k)}$ is continuous. This follows at once, however, from the fact that $u_1^{(k-1)}$ would vanish in every neighborhood of x_0. We thus see that if u_1 vanished at an infinite number of points in I' there would be a point x_0 where $u_1, u_1', \cdots, u_1^{(k)}$ all vanish, and this is contrary to hypothesis.

The points at which $u_1 = 0$ therefore divide the interval I' into a finite number of pieces throughout each of which theorem I tells that u_2 is a constant multiple of u_1, and owing to the continuity of u_1 and u_2 this relation must also hold at the extremities of the piece in question. It remains to show that this constant is the same for all the pieces. It will evidently be sufficient to consider two adjacent pieces separated by the point p. Suppose that in the piece to the left of p we have

$$u_2 = c_1 u_1,$$

and in the piece to the right,

$$u_2 = c_2 u_1.$$

Since the derivatives of u_1 and u_2 at p may be found either by differentiating to the right or to the left we have:

$$u_2^{(i)}(p) = c_1 u_1^{(i)}(p), \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

$$u_2^{(i)}(p) = c_2 u_1^{(i)}(p),$$

Therefore

$$(c_1 - c_2) u_1^{(i)}(p) = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, k).$$

Now, since $u_1(p) = 0$, there must be at least one of the derivatives $u_1', u_1'', \cdots$ $u_1^{(k)}$ which does not vanish at p. Therefore

$$c_1 = c_2,$$

and our theorem is proved.

§ 3. *Two Extensions to the case of n Functions.*

THEOREM IV.* *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of I have finite derivatives of the first $n - 2 + k$ orders ($k \geqq 1$), while the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ and its first k derivatives do not all vanish at any one point of I; then if the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_n$ is identically zero $u_1, u_2, \cdots, u_n$ are linearly dependent, and in particular:*

$$u_n \equiv c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_{n-1} u_{n-1}.$$

The proof of this theorem is, in the main, the same as that of theorem II. We will therefore only point out the two points of difference.

1. We must use theorem III instead of theorem I to establish the relation:

* The special case $k = 1$ of this theorem was given by the writer, l. c.

$$W_1 \equiv - c_1 W_n .$$

2. From the identity:

$$W_n(- c_1u_1 - c_2u_2 \cdots c_{n-1}u_{n-1} + u_n) \equiv 0 ,$$

we can now infer only that *at the points where* $W_n \neq 0$,

$$u_n = c_1u_1 + \cdots + c_{n-1}u_{n-1} .$$

In order to prove that this equation also holds at the points where $W_n = 0$, we notice first that these points in any finite and perfect subinterval I' of I are finite in number as otherwise there would be (cf. the proof of theorem III) a point of I' where W_n, W_n', $\cdots$, $W_n^{(k)}$ all vanish. All the points where W_n vanishes are therefore isolated, and since the equation

$$u_n = c_1u_1 + \cdots + c_{n-1}u_{n-1}$$

holds everywhere except at these points it must on account of the continuity of the u's hold at these points also. Thus our theorem is proved.

A little reflection on the results so far obtained will suggest the question whether the theorem of the last section might not be extended to the case of n functions by requiring, not as we have just done, that W_n, W_n', $\cdots$, $W_n^{(k)}$, do not all vanish at any point of I, but that u_1 and a certain number of its derivatives shall not all vanish at any point of I. The following example shows, however, not only that the theorem thus suggested is not true, but that even when *no one of the u's vanishes at any point of* I the identical vanishing of the Wronskian is not necessarily a sufficient condition for linear dependence when we have more than two functions.

EXAMPLE. Consider the three functions:

$$u_1 = \begin{cases} 1 + e^{-\frac{1}{x^2}} & (x \neq 0), \\ 1 & (x = 0), \end{cases} \qquad u_2 = \begin{cases} 1 + e^{-\frac{1}{x^2}} & (x > 0), \\ 1 & (x = 0), \\ 1 - e^{-\frac{1}{x^2}} & (x < 0), \end{cases} \qquad u_3 = 1 .$$

These three functions are obviously linearly independent in any interval including both positive and negative values of x. Moreover no one of them vanishes for any real value of x. Yet the Wronskian of u_1, u_2, u_3 is identically zero.

The following theorems V and VI, which run somewhat along the lines just indicated, are, however, true:

THEOREM V. *Let* u_1, u_2, $\cdots$, u_n *be functions of* x *which at every point of* I *have finite derivatives of the first* $n - 1$ *orders, while no function (other than zero) of the form:*

$$g_1u_1 + g_2u_2 + \cdots + g_nu_n$$

(the g's being constants) vanishes together with its first $n-1$ derivatives at any point of I; then if the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_n$ vanishes at any point p of I these functions are linearly dependent.

From the fact that the Wronskian vanishes at p follows the existence of n constants $c_1, c_2 \cdots, c_n$ not all zero and such that

$$c_1 u_1^{(i)}(p) + c_2 u_2^{(i)}(p) + \cdots + c_n u_n^{(i)}(p) = 0 \quad (i = 0, 1, \cdots, n-1),$$

i. e., the function $c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$ vanishes together with its first $n-1$ derivatives at the point p, and must therefore be identically zero. Thus our theorem is proved.

THEOREM VI. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of I have finite derivatives of the first k orders $(k > n-1)$, while no function (other than zero) of the form*

$$g_1 u_1 + g_2 u_2 + \cdots + g_n u_n,$$

(the g's being constants) vanishes together with its first k derivatives at any point of I; then if the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_n$ vanishes identically these functions are linearly dependent.

We prove this theorem first on the supposition that the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ does not vanish identically.* In this case there exists a point p of I where the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ does not vanish. Since this last named Wronskian is continuous it is different from zero throughout the neighborhood of p. We see then by applying II that there exist n constants $c_1, c_2, \cdots, c_n$ not all zero and such that the function

$$c_1 u_1 + c_2 u_2 + \cdots + c_n u_n$$

is zero throughout the neighborhood of p. Accordingly this fuction vanishes together with its first k derivatives at p, and therefore vanishes identically. Thus our theorem is proved in this special case.

In order to prove the theorem in general we first notice that if $u_1 \equiv 0$ the u' are surely linearly dependent. If u_1 is not identically zero, consider in succession the Wronskians of u_1, u_2, of u_1, u_2, u_3, of u_1, u_2, u_3, u_4, etc. Suppose the first of these which vanishes identically is the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_m$ $(m \leqq n-1)$. Then since the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_{m-1}$ does not vanish identically, the special case of our theorem which we have already proved shows that $u_1, u_2, \cdots, u_m$ are linearly dependent. Accordingly $u_1, u_2, \cdots, u_n$ are linearly dependent, and our theorem is proved.

Theorems V and VI admit of immediate application to the theory of linear differential equations, as the following theorem shows.

* The proof of this part of the theorem has been modified since the paper was presented to the Society by making it depend on II instead of on the lemmas of § 5.

THEOREM VII. *Let $p_1, p_2, \cdots, p_n$ be functions of x which at every point of I are continuous, and let $y_1, y_2, \cdots, y_k (k \leqq n)$ be functions of x which at every point of I satisfy the differential equation:*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \cdots + p_n y = 0;$$

then the identical vanishing of the Wronskian of $y_1, y_2, \cdots, y_k$ (or in the case $k = n$ the vanishing of this Wronskian at a single point of I) is a sufficient condition for the linear dependence of $y_1, y_2, \cdots, y_k$.

This theorem follows at once from theorems V and VI when we recall the fact that a solution of the above written differential equation which vanishes together with its first $n - 1$ derivatives at a point of I is necessarily identically zero.

§ 4. *Discussion of Peano's Theorems.* *

One of PEANO'S results, as has already been stated, is the special case $k = 1$ of theorem III. Apart from this PEANO'S results cover no case which is not also covered by the fundamental theorem of § 1. I propose to show this in the present section.

For this purpose we first establish the following:

LEMMA. *Let u_1 and u_2 be functions of x which at every point of I have finite first derivatives, while*

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' \equiv 0;$$

if a point p exists in I at which $u_2 = 0$, while in every neighborhood of p lie points where $u_2 \neq 0$, then $u_1(p) = 0$.

For if $u_1(p) \neq 0$ we could, on account of the continuity of u_1, mark off a neighborhood of p throughout which u_1 does not vanish, and throughout which therefore by theorem I

$$u_2 = c u_1.$$

Since at p $u_1 \neq 0$ and $u_2 = 0$ we must have $c = 0$, but this would make u_2 vanish throughout the neighborhood of p, and this is contrary to hypothesis.

PEANO deduces the following theorem in the case of two functions. This theorem includes as a special case the theorem to which theorem III reduces when $k = 1$, and appears at first sight to go beyond it.

PEANO'S FIRST THEOREM. *Let u_1 and u_2 be functions of x which at every point of I have finite first derivatives, while u_1, u_2, u_1', u_2' do not all vanish at any point of I; then if*

$$u_1 u_2' - u_2 u_1' \equiv 0,$$

u_1 and u_2 are linearly dependent.

* See, besides the notes in Mathesis referred to at the beginning of this article, a paper by PEANO: Rendiconti della Accademia dei Lincei, ser. , vol. 6, 1° sem. (1897), p. 413.

The truth of this theorem will be established, and at the same time it will be proved that it covers no case which is not also covered by the special case $k=1$ of theorem III, if we can show that either there is no point of I where u_1 and u_1' both vanish, or there is no point of I where u_2 and u_2' both vanish. Assume then that there is a point where u_2 and u_2' both vanish. Here we distinguish between two cases:

(*a*) $u_2 \equiv 0$. Here $u_2 = u_2' = 0$ at every point of I, and therefore there can be no point in I where $u_1 = u_1' = 0$.

(*b*) u_2 is not identically zero. Then there exists a point p in I at which $u_2 = u_2' = 0$, but in whose every neighborhood lie points where $u_2 \neq 0$. Therefore by the above lemma $u_1(p) = 0$. We must therefore have $u_1'(p) \neq 0$. Accordingly there exists an ϵ such that throughout the interval $p < x < p + \epsilon$, and also throughout the interval $p > x > p - \epsilon$, u_1 does not vanish. Let us choose that one of these intervals in which lie points where $u_2 \neq 0$. By theorem I we have at every point of this interval, and therefore on account of the continuity of u_1 and u_2 also at p,

$$u_2 = cu_1,$$

where $c \neq 0$ as otherwise u_2 would vanish at every point of this interval. From this last equation we infer that

$$u_2'(p) = cu_1'(p).$$

Therefore since $u_2'(p) = 0$ and $c \neq 0$ we get $u_1'(p) = 0$. We are thus led to a contradiction, and therefore the case (*b*) cannot occur.

PEANO'S SECOND THEOREM. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_n$ be functions of x which at every point of I have finite derivatives of the first $n-1$ orders, while the Wronskians of these functions taken $n-1$ at a time do not all vanish at any point of I; then if the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_n$ vanishes identically $u_1, u_2, \cdots, u_n$ are linearly dependent.*

We will establish this theorem, and at the same time show that it covers no case which is not also covered by the fundamental theorem II, by proving that there must be one of the Wronskians $W_1, W_2, \cdots, W_n$ (to use the notation employed in the proof of theorem II) which does not vanish at any point of the interval I. Suppose each of these W's vanished in I. They cannot all vanish identically. Suppose that W_n is one of those which does not vanish identically. Then there exists a point p at which $W_n = 0$ but in whose every neighborhood lie points where $W_n \neq 0$.

Now by the reasoning used in the proof of theorem II we see that:

$$W_i' W_n - W_i W_n' \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n-1)$$

Therefore, by our lemma, W_i vanishes at p $(i = 1, 2, \cdots, n-1)$ and this is contrary to hypothesis since W_n also vanishes at p.

§ 5. *A Theorem concerning Wronskians.*

I have now completed what I have to say on the subject of linear dependence. 'here remains however a theorem concerning Wronskians which I have found seful in the course of my work, although in the form which I have finally given) this paper no use has been made of it.

Before stating this theorem we will first establish two lemmas which we shall se in its proof.

Consider a matrix M of $n+m$ rows and n columns. Denote by D_i the n-)wed determinant obtained from M by striking out all of its $m+1$ last rows :cept the $(n-1+i)$-th row. Denote by M' the matrix obtained from M by riking out its last $m+1$ rows. Denote by Δ_i the $(n-1)$-rowed determinant)tained from M' by striking out its i-th column.

LEMMA I. *If* $D_1 = D_2 = \cdots = D_{m+1} = 0$, *and if* $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ *are not l zero, then all the n-rowed determinants of* M *are zero.*

For denoting the element of M which stands in the i-th row and j-th column a_{ij}, we have:

$$a_{i1}\Delta_1 - a_{i2}\Delta_2 + \cdots + (-1)^{n-1}a_{in}\Delta_n = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n+m),$$

d these form a set of $n+m$ homogeneous linear equations satisfied by the Δ's which by hypothesis are not all zero.

LEMMA II. *Let* $u_1, u_2, \cdots, u_n$ *be functions of* x *which at every point of* I *ve finite derivatives of the first* k *orders* $(k \geqq n)$, *while their Wronskian nishes identically; then, except at points where the Wronskian of* $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ *is zero, all the n-rowed determinants of the matrix:*

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(k)} & u_2^{(k)} & \cdots & u_n^{(k)} \end{vmatrix}$$

? zero.

We first prove this lemma in the case $k = n$. Here the determinant ob-tned from the above matrix by striking out the next to the last row is simply t: derivative of the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_n$, and therefore also vanishes i: ntically. The truth of our lemma thus follows at once from lemma I.

In order to prove the lemma in the general case we use the method of mathe-tical induction, and assume that the lemma has been proved when $k = k_1 - 1$. We wish to prove that the lemma also holds when $k = k_1$. Let us denote by I the above matrix when k has the value k_1, and by N the matrix obtained f m M by striking out its last row; and let p be any point of I where the

Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_{n-1}$ does not vanish. If then we can prove that th determinant:

$$D = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n-2)} & u_2^{(n-2)} & \cdots & u_n^{(n-2)} \\ u_1^{(k_1)} & u_2^{(k_1)} & \cdots & u_n^{(k_1)} \end{vmatrix},$$

vanishes at p, it will follow at once from lemma I that all the n-rowed dete minants of M vanish at p, since this is true of all the n-rowed determinants N. In order to prove that D vanishes at p let us consider the $(k_1 - n + 1)$-t derivative of the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_n$. This derivative will of cours vanish identically. If we compute its value we find that it consists of the su of a number of n-rowed determinants of which D is one while the others are a determinants of the matrix N, and therefore vanish at p. Thus we see that vanishes at p, and our lemma is proved.

THEOREM VIII. *Let $u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}$ be functions of x which at every poi of I have continuous derivatives of the first n orders; then if the Wronskia of $u_1, u_2, \cdots, u_n$ vanishes identically the Wronskian of $u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}$ wi vanish identically.*

Denote by M the matrix obtained from the Wronskian

$$W = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{n+1} \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_{n+1}' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ u_1^{(n)} & u_2^{(n)} & \cdots & u_{n+1}^{(n)} \end{vmatrix}$$

by striking out the last column. Then lemma II tells us that all the rowed determinants of M vanish except at the points where the Wronskia $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ of the functions $u_1, u_2, \cdots, u_n$ taken $n-1$ at a time all vanis Accordingly $W = 0$ except at these points. Let p be any such point of Our theorem will be proved if we can show that W vanishes at p.

We must distinguish two cases:

(*a*) $\Delta_1, \Delta_2, \cdots, \Delta_n$ do not all vanish identically throughout the neighborho of p. There are therefore points in every neighborhood of p where the Δ's a not all zero, and where therefore $W = 0$; accordingly W must also vanish t p since it is a continuous function of x.*

(*b*) The Δ's all vanish identically throughout the neighborhood of p. Befo

* This is the only point in the proof where use is made of the assumption that the nth deri tives of the u's are continuous. Would not the theorem still be true without this assumptio

proving in general that $W = 0$ for points of class (b) we will prove it in the simple case $n = 2$. Here we have two Δ's: $\Delta_1 = u_2$, $\Delta_2 = u_1$. Since these vanish identically in the neighborhood of p all the elements of the first two columns of W vanish at p, and therefore W vanishes at p.

We will now complete our proof by the method of mathematical induction by assuming that the theorem has been proved when we have less than $n + 1$ functions. Since each of the Δ's is the Wronskian of $n - 1$ of the functions $u_1, u_2, \cdots, u_n$ it follows that throughout the neighborhood of p the Wronskian of any n of the $n + 1$ functions $u_1, u_2, \cdots, u_{n+1}$ must vanish. Accordingly W also vanishes at p, as we see by expanding it according to the elements of its last row.

RAPALLO, ITALY, *December* 9, 1900.

DIFFERENTIALQUOTIENT ZU BELIEBIGEM INDEX.

UEBERSICHT

UEBER DIE

IGE ENTWICKELUNG DIESER THEORIE UND AUSFUEHRLICHE DARSTELLUNG
DER REELLEN DIFFERENTIATION ZU BELIEBIGEM REELLEM INDEX.

INAUGURAL-DISSERTATION

ZUR

RLANGUNG DER PHILOSOPHISCHEN DOCTORWUERDE

VERFASST UND

MIT GENEHMIGUNG DER PHILOSOPHISCHEN FACULTAET

DER

VEREINIGTEN FRIEDRICHS-UNIVERSITAET HALLE-WITTENBERG

SAMMT DEN THESEN OEFFENTLICH ZU VERTHEIDIGEN

AM XXII. JULI MDCCCLXXXV MITTAGS XII UHR

VON

KARL BOCHOW

AUS LUCKAU

GEGEN

E. HELD, CAND. MATH.

M. FRIEDLAND, CAND. THEOL.

HALLE A. S.,

PLOETZ'SCHE BUCHDRUCKEREI (R. NIETSCHMANN)

MDCCCLXXXV.

Das Problem, mit welchem die folgenden Blätter sich beschäftigen — die Frage nach der Bedeutung Differentialquotienten zum Index ξ einer Function $f(x)$ nach ihrem Argumente „x“, wenn ξ nicht mehr sitiv ganze, sondern eine beliebige Zahl ist, — ist ein sehr altes. Liouville sagt darüber, dass Leibnitz, nach ihm Euler, Lacroix, Fourier über diese Frage Andeutungen gemacht haben. Der welcher eine wohldurchdachte und sehr ausgebreitete wie auch praktisch angewendete Theorie brachte, ouville. Nach ihm hat sich Riemann mit dem Gegenstande beschäftigt, ferner L. Sohncke, or Grünwald, Dr. Most, Oberlehrer von Schäwen, und noch in jüngster Zeit ist ein Aufsatz von Dr. f erschienen, dieselbe Frage behandelnd.

Ohne von dieser reichen Literatur über den Gegenstand Kenntniss zu besitzen, hatte ich selbstständig Frage untersucht. Ausgehend von einer einfachen Anschauung, konnte ich bereits die Potenz und onentialgrösse und andere von diesen abhängige Functionen zu beliebigem Index differenziren, als mein ehrter Lehrer, Herr Professor Wangerin, mich zunächst auf Liouville, später auf Grünwald aufmerksam Namentlich des Ersteren Theorie, vor Allem bei der Differentiation der Potenz, gab vollkommen Resultate, als ich erhalten; da aber ein Fehler in meinen Rechnungen nicht zu entdecken war, wollte zdem an meinem Principe festhalten. Erst nach und nach kam ich zu der Erkenntniss, dass in der ide Theorieen in gleicher Weise gültig wären, dass der Begriff vieldeutig ist.

Das Resultat einer langen auf dieser Erkenntniss basirenden Arbeit sind die Untersuchungen, von ch im Folgenden einen kleinen Theil veröffentliche.

Jeder der genannten Mathematiker hat seine eigene Definition des Begriffes „Differentialquotient zu em Index“ aufgestellt; wenn ich die Zahl dieser Definitionen um eine neue vermehre, so bemerke ich, selbe mit denen von Riemann, Grünwald, Most, von Schäwen, Schimpf intime Berührung hat, mir aber ner erscheint; durch eingehende Specialisirung jedoch gelingt es mir, einer jeden der übrigen nen, die ich kenne, innerhalb der meinigen einen bestimmten Platz anzuweisen, so dass sie als re Fälle meines Begriffes erscheinen. Wenn schon diese Zusammenfassung der bisherigen Bestrebungen ortschritt auf dem vorliegenden Gebiete bezeichnen dürfte, so glaube ich auch in Einzelheiten Neues n, namentlich die Differentiation der Potenz zum ersten Male erschöpfend behandelt und die hierin errschende Unklarheit beseitigt zu haben.

Erster Theil.

Die Facultäten zur Differenz (-1).

Behufs späterer Anwendung sehe ich mich veranlasst, zunächst Einiges über den Begriff der „Fac vorauszuschicken.

1. Es ist bekanntlich

$$\left(\frac{d^\xi x^\mu}{dx^\xi}\right)_{x=1} = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\xi+1),$$

also dieser Differentialquotient für den Specialfall $x=1$ ist ein Product von ξ Factoren, deren jeder links nach rechts gelesen um 1 kleiner, von rechts nach links um 1 grösser als der vorhergehende. I Unterschied zwischen je zwei Gliedern die Grösse ϱ, so hat Crelle die Bezeichnung

$$\mu(\mu+\varrho)(\mu+2\varrho)\ldots\ldots(\mu+\overline{\xi-1}\,\varrho) = (\mu,\varrho)^\xi$$

welches Symbol zu lesen ist wie die Potenz, die ja für $\varrho=0$ daraus hervorgeht. μ ist die „Basis", „Exponent", ϱ die „Differenz" dieser „Facultät".

Nach der Definition des Begriffes können μ und ϱ beliebige Zahlen sein, ξ muss vorerst positiv sein. Um auch beliebige Exponenten zulassen zu können, sind von verschiedenen Mathematikern verschi Untersuchungen[1]) angestellt worden, die ihren Abschluss fanden durch die bekannte Abhandlun Weierstrass (Crelles Journal 51), in der er nachweist, dass die Facultät zu gebrochenem Index doppe ist. Auf diese stütze ich mich, wenn ich im folgenden eine anschauliche Herleitung der beiden Art Facultät zur Differenz (-1) geben will. Ich werde mich begnügen, sie auf bekanntes, die Gammafunc zurückgeführt zu haben. Beiläufig sei mir die Bemerkung gestattet, dass ich schon vor Bekanntscha der Weierstrass'schen Abhandlung die Doppelsinnigkeit der Facultät vollständig erkannt hatte; ja, diese Erkenntniss war für mich der Ausgangspunkt zu einer neuen Auffassung des Differentialquotien beliebigem Index, die sich von meiner früheren wesentlich unterscheidet.

Als Definition der Gammafunction gilt bekanntlich das bestimmte Integral

$$\Gamma(\mu) = \int_0^\infty e^{-v}\, v^{\mu-1}\, dv,$$

jedoch nur für positive μ, und für diese, so lange μ endlich, positive und von Null verschiedene e Werte ergebend. Für positiv ganze μ wird

$$\Gamma(\mu) = 1.\ 2.\ 3.\ldots(\mu-1) = (\mu-1)!,\ \Gamma(1) = 1.$$

Um den Begriff auch auf negative μ auszudehnen, hat man zwei Wege: entweder man bewei dem Integrale die Beziehung $\Gamma(\mu+1) = \mu\Gamma(\mu)$, aus der folgt

$$\Gamma(\mu) = \Gamma(\mu+q) : [\mu(\mu+1)(\mu+2)\ldots(\mu+q-1)];$$

setzt man nun μ negativ, $(\mu+q)$ positiv voraus, so hat die Gammafunction der rechten Seite nach Sinn, und die Gleichung IV sieht man als Definition der links stehenden Gammafunction mit neg Argumente an. Andererseits leitet man aus dem Integrale das unendliche Product

[1]) Bemerkenswert wegen des angewendeten Prinzipes ist Crelle's „Theorie der Potestäten und analytischen Fac Berlin 1823.

$$= \lim_{n=\infty} \left\{ \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots\ldots n}{\mu(\mu+1)(\mu+2) \ldots\ldots (\mu+n-1)} n^{\mu-1} \right\} = \lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\mu+k-1} n^{\mu-1} \right\} \quad \text{(V)}$$

nd hier kann rechter Seits μ beliebige Zahl sein, so dass auch Nr. V als Definition von $\Gamma(\mu)$ für ge μ gelten kann. Beide Methoden ergeben natürlich dasselbe Resultat und liefern: Die Gammafunction ellem Argumente ist stets von Null verschieden und endlich, wenn das Argument positiv oder gebrochen ist. Sie nimmt sehr grosse Werte an, wenn die Null oder eine negative ganze Zahl Argument ist, ar für 0, -2, -4 etc. positive, wenn man sich diesen Werten aus grösseren, negative, wenn man nen aus kleineren Werten nähert; für die ungeraden negativ ganzen Zahlen, -1, -3, -4 etc. ist erhältniss gerade umgekehrt. Ausser an diesen Stellen ist die Function stetig.

2. In Betreff der Facultät beschränken wir uns zweckmässig auf die Differenz (-1). Nach cher Schreibweise ist

$$(\mu,-1)^{\xi} = \mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots\ldots (\mu-\xi+1). \quad \text{(VI)}$$

A) Wir gestalten die rechte Seite um, indem wir sie, zunächst nach rechts, durch identische ügung von Factoren und Divisoren fortsetzen:

$$\mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots (\mu-\xi+1) \cdot \frac{(\mu-\xi)(\mu-\xi-1)(\mu-\xi-2) \ldots\ldots (\mu-\xi-k+1)}{(\mu-\xi)(\mu-\xi-1)(\mu-\xi-2) \ldots\ldots (\mu-\xi-k+1)}$$

$$\frac{-1)(\mu-2) \ldots (\mu-\xi+1) \cdot (\mu-\xi) \ldots\ldots (\mu-k+1)}{-\xi)(\mu-\xi-1)(\mu-\xi-2) \ldots\ldots\ldots (\mu-\xi-k+1)} \cdot (\mu-k)(\mu-k-1) \ldots (\mu-k-\xi+1).$$

Vorausgesetzt, dass wir $k=n$ Factoren hinzugefügt haben, schreiben wir dies in Productform, so ist er, auch für $n=\infty$, ein Ausdruck für $(\mu,-1)^{\xi}$, wenn ξ positiv ganz, mithin

$$(\mu,-1)^{\xi} = \lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{\mu-k+1}{\mu-\xi-k+1} \cdot (\mu-n)(\mu-n-1) \ldots\ldots (\mu-n-\xi+1) \right\},$$

$$(\mu,-1)^{\xi} = \lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{\mu-k+1}{\mu-\xi-k+1} \cdot (-n)^{\xi} \right\} \quad \text{(VII}\alpha\text{)}$$

Hier kommt nun ξ nur in Verbindungen vor, die für beliebige reelle ξ Wert haben; da Nr. VIIα urch eine einfache Umformung aus der ursprünglichen Definition hervorgegangen war, so sehen wir leichung auch für beliebige ξ als Definition des links stehenden Symboles an. Wir können sie noch ermaassen umgestalten:

$$(\mu,-1)^{\xi} = (-1)^{\xi} \lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{-\mu+\xi+k-1} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{-\mu+k-1}{k} \cdot n^{-\mu+\xi-1} \cdot n^{\mu+1} \right\}$$

$$= (-1)^{\xi} \left[\lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{-\mu+\xi+k-1} n^{-\mu+\xi-1} \right\} : \lim_{n=\infty} \left\{ \prod_{k=1}^{n} \frac{k}{\mu+k-1} \cdot n^{-\mu-1} \right\} \right],$$

ch Nr. V

$$(\mu,-1)^{\xi} = (-1)^{\xi} [\Gamma(-\mu+\xi) : \Gamma(-\mu)]. \quad \text{(VIII}\alpha\text{)}$$

B) Das ursprüngliche Product $(\mu,-1)^{\xi} = \mu(\mu-1) \ldots\ldots (\mu-\xi+1)$ setzen wir jetzt nach links dentische Hinzufügung fort:

$$\frac{(\mu+k)(\mu+k-1) \ldots\ldots (\mu+1)}{(\mu+k)(\mu+k-1) \ldots\ldots (\mu+1)} \mu(\mu-1)(\mu-2) \ldots\ldots (\mu-\xi+1)$$

$$\frac{-\xi+1)(\mu-\xi+2) \ldots \mu(\mu+1) \ldots (\mu-\xi+k)}{+1)(\mu+2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\mu+k)} (\mu-\xi+k+1)(\mu-\xi+k+2) \ldots (\mu-\xi+k+\xi),$$

also wenn wir $k = n$ Factoren hinzugefügt haben, für Lim $n = \infty$:

$$(\mu,-1)^{\xi} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{\mu-\xi+k}{\mu+k}\,(+n)^{\xi}\right\} \qquad (V$$

oder durch Gammafunctionen ausgedrückt:

$$(\mu,-1^{\xi} = (+1)^{\xi}\,[\Gamma(\mu+1) : \Gamma(\mu-\xi+1). \qquad (V$$

Diese Gleichung sehen wir als eine zweite Definition des links stehenden Symboles für belieb an. $(+1)^{\xi}$ nehmen wir allgemein als vieldeutig an.

C) Die eben ausgeführten einfachen Umformungen des ursprünglichen endlichen Productes f auf zwei verschiedene, jedoch völlig gleichberechtigte Definitionen des Begriffes „Facultät der Basis Differenz (-1) und zum beliebigen Exponenten ξ". Dass dieselben für ganze ξ, auch negative, zusam fallen, ist leicht zu zeigen, für gebrochene dagegen sind sie nicht identisch, wie schon aus der Verschiede der Factoren oder „Vorzeichen", $(-1)^{\xi}$ in α, $(+1)^{\xi}$ in β, hervorgeht, die verschieden complex sind. der beiden „Arten" der Facultät ist noch vieldeutig. Sie decken sich mit den Weierstrass'schen Darstellu doch will ich eine andere, bequemere Bezeichnung benutzen. Die „erste Art", α, will ich durch eck die „zweite Art", β, durch runde Klammern auszeichnen. Demnach die Definition: Ich verstehe der „Facultät der Basis μ zum Exponenten ξ und zur Differenz (-1)"

A) unter derjenigen erster Art den Grenzwert des unendlichen Productes oder den Quoti der Gammafunctionen:

$$[\mu,-1]^{\xi} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{\mu-k+1}{\mu-\xi-k+1}\,(-n)^{\xi}\right\} = (-1)^{\xi}\,\frac{\Gamma(-\mu+\xi)}{\Gamma(-\mu)} \qquad ($$

B) unter derjenigen zweiter Art

$$(\mu,-1)^{\xi} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\prod_{k=1}^{n}\frac{\mu-\xi+k}{\mu+k}(+n)^{\xi}\right\} = (+1)^{\xi}\,\frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\xi+1)}. \qquad ($$

Da die Gammafunktion für das ganze reelle Argumentgebiet bekannt ist, so sind es hiernach die Facultäten. Was ihren allgemeinen Verlauf anbetrifft, so lassen sich zunächst die Null- und Unendlich stellen leicht angeben, am einfachsten in folgender Fassung:

A) Die Facultät erster Art $[\mu,-1]^{\xi}$ wird 1. zu Null, wenn $(\mu+1)$ positiv ganz, $(\mu-\xi$ nicht; 2. sie nimmt sehr grosse Werte an, wenn $(\mu-\xi+1)$ gositiv ganz, $(\mu+1)$ nicht.

B) Die Facultät zweiter Art $(\mu,-1)^{\xi}$ wird 1. zu Null, wenn $(\mu-\xi)$ negativ ganz, μ 2. sie nimmt sehr grosse Werte an, wenn μ negativ ganz, $(\mu-\xi)$ nicht.

Ausserdem sind beide Arten endlich und von Null verschieden, und stetig ausser an den Unendlich stellen. Beide sind noch vieldeutig, die erste Art ist wesentlich imaginär, die zweite hat immer weni einen reellen Wert.

3. Als Gesetze des Begriffes ergeben sich leicht die folgenden, bei denen stets gleiche Klam zusammengehören:

$$[(\mu,-1)]^{\xi+\eta} = [(\mu,-1)]^{\xi}\,.\,[(\mu-\xi,-1)]^{\eta} = [(\mu,-1)]^{\eta}\,.\,[(\mu-\eta,-1)]^{\xi}$$
$$[(\mu,-1)]^{1} = \mu,\ [(\mu,-1)]^{0} = 1$$
$$[(\mu,-1)]^{-\xi} = 1 : [(\mu+\xi,-1)]^{+\xi} \qquad ($$

Bezeichnen wir mit lateinischen Buchstaben positiv ganze Zahlen, so ist

$$[(\mu,-1)]^{+r} = \mu\,(\mu-1)\,(\mu-2)\ldots(\mu-r+1),\ [(\mu,-1)]^{-r} = 1 : [(\mu+1)\,(\mu+2)\ldots(\mu+r)] \ ($$

woraus folgt:

$$\frac{d^r x^\mu}{dx^r} = [\mu,-1]^r x^{\mu-r} = (\mu,-1)^r x^{\mu-r}; \quad {}^r\int x^\mu dx^r = [\mu,-1]^{-r} x^{\mu+r} = (\mu,-1)^{-r} x^{\mu+r} \qquad \text{(XIV)}$$

letzten Gleichung vorausgesetzt, dass die rechte Seite endlich ist. Beide Arten hängen auf verschiedene zusammen. So ist

$$[(\mu,-1)]^\xi = (-1)^\xi ([-\mu+\xi-1,-1])^\xi, \qquad \text{(XV)}$$

die äusseren und inneren Klammern zusammengehören. und ferner

$$[\mu,-1]^\xi : (\mu,-1)^\xi = (-1)^\xi [\sin(\mu\pi) : \sin(\mu-\xi\,\pi)] \qquad \text{(XVI)}$$

Der Differentialquotient der Facultät nach ihrer Basis lässt sich als unendliche Reihe darstellen. Xα folgt:

$$\log[\mu,-1]^\xi = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\log(\mu-k+1) - \sum_{k=1}^{n}\log(\mu-\xi-k+1) - \xi\log(-n)\right\},$$

$$\frac{d}{d\mu}\log[\mu,-1]^\xi = \frac{d[\mu,-1]^\xi}{d\mu} : [\mu,-1]^\xi = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu-k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mu-\xi-k+1}\right\}$$

$$\frac{\cdot 1]^\xi}{} = [\mu,-1]^\xi\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu-k+1} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu-\xi-k+1}\right\} = [\mu,-1]^\xi(-\xi)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu-k+1)(\mu-\xi-k+1)} \qquad \text{(XVII)}$$

Die Reihe convergirt, wenn weder $(\mu-k+1)$ noch $(\mu-\xi-k+1)$ für ein k zu Null wird. d. h. wenn ultät die Null- und Unendlichkeits-Stellen vermeidet. Ebenso wird für die zweite Art

$$\frac{d\,(\mu,-1)^\xi}{d\mu} = (\mu,-1)^\xi\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu-\xi+k} - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu+k}\right\} = (\mu,-1)^\xi\,\xi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(\mu-\xi+k)(\mu+k)}, \qquad \text{(XVIII)}$$

r gilt in Betreff der Convergenz dasselbe. Für $\mu = 0$ wird aus Nr. XVIII:

$$\left(\frac{d}{d\mu}(\mu,-1)^\xi\right)_{\mu=0} = (0,-1)^\xi\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi}{k(-\xi+k)},$$

s ξ positiv oder negativ ganz, $\xi = \pm r$, folgt:

$$\left(-1)^{+r}\right)_{\mu=0} = (-1)^{r-1}(r-1)!; \quad \left(\frac{d}{d\mu}(\mu,-1)^{-r}\right)_{\mu=0} = -\frac{1}{r!}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+..+\frac{1}{r}\right) \qquad \text{(XVIII}\alpha\text{)}$$

4. Aus der Theorie der Gammafunctionen abzuleitende Formeln, die im folgenden benutzt werden, ser bekannten bestimmten Integralen noch die folgenden: Mittelst Nr. V folgt leicht

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{(-1)^n\binom{\xi}{n}n^{\xi+1}\right\} = 1 : \Gamma(-\xi). \qquad \text{(XIX)}$$

Bezeichne ich ferner mit $\varphi_n(m,\xi)$ die, zunächst endliche. Summe $\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1}\binom{\xi}{k-1}(k-1)^m\right]$, für $m = 0$, indem ich die Reihenglieder, von vorn beginnend, auf gleiche Nenner bringe und addire

$$\varphi_n(0,\xi) = \prod_{k=1}^{n-1}\frac{k-\xi}{k},$$

nach Nr. V

$$\operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\varphi_n(0,\xi)\,n^\xi\right\} = \operatorname*{Lim}_{n=\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1}\right]n^\xi\right\} = 1 : \Gamma(-\xi+1) \qquad \text{(XX)}$$

Ferner ist leicht, zunächst für $m = 1$, für beliebige positiv ganze m durch Schluss von m auf $(m+1)$, r die Gleichung

$$\varphi_n(m, \xi) = (-\xi)(-\xi+1)(-\xi+2)\ldots(-\xi+m-1)\,\varphi_{n-m}(0, \xi-m) + A_1\,\varphi_{n-m+1}(0, \xi-m$$
$$+ A_2\,\varphi_{n-m+2}(0, \xi-m+2) + \ldots + A_{m-1}\,\varphi_n(0, \xi-1),$$

in welcher die A gewisse Coefficienten, auf deren Zusammensetzung es nicht weiter ankommt, die aber e sind, bedeuten. Multipliciren wir beiderseits mit $n^{\xi-m}$ und lassen n unendlich gross werden, so verschw alle Glieder ausser dem ersten und es wird

$$\operatorname{Lim}_{n=\infty}\left\{\varphi_n(m, \xi)\, n^{\xi-m}\right\} = \operatorname{Lim}_{n=\infty}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1}(k-1)^m\right] n^{\xi-m}\right\} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)(-\xi+m)}\cdot$$

Zweiter Theil.

Die bisherigen Definitionen der Differentialquotienten zu beliebigem In

Um dem „Differentialquotienten zum Index ξ einer Function $f(x)$ nach ihrem Argumente x dem Begriffe eines positiv ganzen ξ ausgehend, für beliebige reelle ξ einen Sinn zu geben, könnte in der Weise zu verfahren suchen, wie es die elementare Mathematik thut, wenn sie zu den negative gebrochenen Potenzen gelangen will, nämlich von der Gleichung

$$D_x^{\xi+\eta} f(x) = D_x^{\xi}\left\{D_x^{\eta} f(x)\right\} = D_x^{\eta}\left\{D_x^{\xi} f(x)\right\}$$

ausgehen, ihr als Grundgleichung allgemeine Gültigkeit zusprechen. Setzt man dann $\eta = 0$, so folgt

$$D_x^{\xi} f(x) = D_x^{\xi}\left\{D_x^{0} f(x)\right\} = D_x^{0}\left\{D_x^{\xi} f(x)\right\},$$

eine Differentiation zum Index 0 bringt keine Veränderung hervor, mithin

$$D_x^0 f(x) = f(x).$$

Setzen wir $\xi + \eta = 0$, also $\eta = -\xi$, so folgt aus A und B

$$D_x^0 f(x) = f(x) = D_x^{\xi}\left\{D_x^{-\xi} f(x)\right\} = D_x^{-\xi}\left\{D_x^{+\xi} f(x)\right\},$$

also Differentiationen zum Index $+\xi$ und $(-\xi)$ heben sich auf, woraus folgt

$$D_x^{-\xi} f(x) = {}^{\xi}\!\int f(x)\, dx^{\xi}.$$

Will man nun aber auch gebrochene Indices definiren, so versagt diese Methode vollkommen muss sich also nach einer anderen umsehen. Angeregt durch das oben citirte Crelle'sche Werk, ver Verfasser zunächst den Begriff dadurch zu fixiren, dass er ihn erklärte als diejenige Function, welche ge Gesetzen genügt; und zwar denjenigen Gesetzen, welche für positive ganze Indices ihn eindeutig besti sollte er auch für beliebige genügen. Aber wenn sich auch einige ganz harmonische Resultate ergabe genügende Festlegung des Grundgedankens stiess auf unüberwindliche Schwierigkeiten.

Im Ganzen werden zwei prinzipiell verschiedene Wege der Untersuchung offen stehen: U Differentialquotienten zu beliebigem Index zu definiren, kann man entweder so verfahren, dass man e positiv ganze Indices bewiesene bestimmte Formel, die jedoch den Index nur in solchen Verbindungen e welche, an und für sich betrachtet, für beliebige Werte desselben Sinn haben, ohne Weiteres als all gültig ansieht; oder aber, man geht zurück auf die allgemeine Definition des Begriffes für beli Functionen, seine Definition durch seine Gesetze; oder als Coefficient der Taylor'schen Reihe; o Grenzwert eines Ausdruckes von unbestimmter Form; oder als geschlossenes Integral. Alle diese verschi Wege sind von verschiedenen Mathematikern eingeschlagen worden, wie ich kurz schildern will.

1. Euler sagt etwa so: Für die Potenz x^μ besteht die Formel

$$D_x^\xi x^\mu = \mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\xi+1)\,x^{\mu-\xi},$$

positiv ganz. Nun ist die Factorenfolge gleich $\mu! : (\mu-\xi)!$. Diese beiden Facultäten drückt er jede ein bestimmtes Integral aus, welche nach einiger Umformung beide in „erste Euler'sche" übergehen ls Gammafunctionen geschrieben, ergeben:

$$D_x^\xi x^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\xi+1)}\,x^{\mu-\xi}.$$

Hier kann ξ nun beliebige Zahl sein, er sieht diese Gleichung also als Definition des Differential- ten zum Index ξ von x^μ nach x an. Um dann beliebige Functionen zu beliebigem Index differenziren nen, hat er nur nötig, dieselben in eine Potenz-Reihe zu entwickeln, auf die einzelnen Glieder diese ıng anzuwenden und die neue Reihe wieder als Function von x zu fassen — wobei allerdings die weigende Voraussetzung gemacht wird, dass die Gleichung

$$D_x^\xi [f(x)+\varphi(x)] = D_x^\xi f(x) + D_x^\xi \varphi(x)$$

iebige ξ ebenfalls bestehe. Der Gedankengang dieser Verallgemeinerung ist ein ausserordentlich er, im Grunde genommen ist sie nichts anderes, als eine Ausdehnung des Begriffes der Facultät auf e Exponenten. In der That ist ja $\Gamma(\mu+1) : \Gamma(\mu-\xi+1)$ bis auf das fehlende Vorzeichen $(+1)^\xi$ nach β des ersten Theiles eine Facultät der Basis μ zum Exponenten ξ, so dass wir schreiben können

$$D_x^\xi x^\mu = (\mu,-1)^\xi\, x^{\mu-\xi},$$

ultät zweiter Art tritt auf, also nur eine von den beiden Arten, die wir constatiren mussten. ler'sche Verallgemeinerung ist daher nach unseren Begriffen keine vollständige. Denn die Facultät bigem Index wird durch zwei verschiedene, aber vollkommen gleich berechtigte Ausdrücke repräsentirt, sollten wir also nur die eine Art als Differentiationsfactor der Potenz gelten lassen, die andere, in doch der specielle Fall eines positiv ganzen Index eben so richtig enthalten ist, nicht auch?

2. Diese Unvollständigkeit ist vermieden worden von L. Sohncke[1]). Er hat die höheren Differential- en und vielfachen Integrale der Potenz als hypergeometrische Reihen dargestellt, und da diese Reihen ex in Verbindungen aufweisen, die auch für beliebige Werte derselben Sinn behalten: so sieht er sie Definition für beliebige Indices an. Am Schlusse seiner Abhandlung jedoch giebt er eine einfachere ng. Es ist für positiv ganze ξ einmal

$$D_x^\xi x^\mu = \mu(\mu-1)\ldots(\mu-\xi+1)\,x^{\mu-\xi} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\xi+1)}\,x^{\mu-\xi},$$

eits aber auch

$$D_x^\xi x^\mu = (-1)^\xi(-\mu)(-\mu+1)\ldots(-\mu+\xi-1)\,x^{\mu-\xi} = (-1)^\xi\,\frac{\Gamma(-\mu+\xi)}{\Gamma(-\mu)}\,x^{\mu-\xi},$$

s soll für beliebige ξ als Definition gelten. Schreiben wir also Facultäten, so ist darnach sowohl

$$D_x^\xi x^\mu = (\mu,-1)^\xi\, x^{\mu-\xi}, \quad \text{als auch} \quad D_x^\xi x^\mu = [\mu,-1]^\xi\, x^{\mu-\xi}$$

druck für den Differentialquotienten der Potenz x^μ nach x zum beliebigen Index ξ. Der Grund- ist dem Euler'schen ähnlich, nur ist die Möglichkeit einer doppelten Umformung der Factorenfolge chtigt, wodurch sogleich beide Arten der Facultät erscheinen.

---

[1]) „Ueber den Zusammenhang hypergeometrischer Reihen mit höheren Differentialquotienten und vielfachen Integralen". Friedrich-Collegiums zu Königsberg i. Pr. 1867.

3. Fourier hat folgenden Gedanken: er sieht die Formel

$$D_x^\xi \cos x = \cos\left(x + \xi \frac{\pi}{2}\right),$$

die für positiv ganze ξ bewiesen und auch für negativ ganze richtig ist, als allgemein gültig an.

4. Liouville[1]) geht zurück auf die Differentiation der Exponentialgrösse

$$D_x^\xi a^x = a^x (\log a)^\xi \quad \text{oder} \quad D_x^\xi e^{mx} = e^{mx} m^\xi,$$

diese Formel soll allgemein gelten. Um beliebige Functionen zu differenziren, muss er sie in Expon Reihen entwickeln, wozu er verschiedene Methoden angiebt. Für die Potenz gewinnt er die Exponentia so: durch Substitution von $\alpha x = u$ wird

$$\left.\begin{matrix}\mu > 0\\ x > 0\end{matrix}\right\}, \int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\mu-1} d\alpha = \frac{1}{x^\mu}\int_0^\infty e^{-u} u^{\mu-1} du = \frac{\Gamma(\mu)}{x^\mu}, \quad \text{also}$$

$$D_x^\xi x^{-\mu} = D_x^\xi \left\{\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\mu-1} d\alpha\right\} = \frac{(-1)^\xi}{\Gamma(\mu)}\int_0^\infty e^{-\alpha x} \alpha^{\xi+\mu-1} d\alpha,$$

oder mittelst derselben Substitution und wenn wir μ statt $(-\mu)$ schreiben,

$$\left.\begin{matrix}\mu < 0\\ x > 0\end{matrix}\right\}, D_x^\xi x^\mu = (-1)^\xi \frac{\Gamma(-\mu+\xi)}{\Gamma(-\mu)} x^{\mu-\xi} = [\mu,-1]^\xi x^{\mu-\xi}.$$

Für negative x gewinnt er dieselbe Formel aus einem anderen ähnlichen Integral, und auc positive μ dehnt er sie später aus. Es tritt also die Facultät erster Art auf und nur diese; Lio Differentiation der Potenz bietet also zur Eulerschen das Gegenstück, beide zusammen würden sich z Sohnckeschen ergänzen, jede für sich müssen wir von unserem Standpunkte aus für unvollständig erk

Von seinen übrigen Formeln interessirt uns hier nur zweierlei. Ist die Exponentialreihe, we darstellt, $f(x) = \Sigma(A e^{mx})$, so ist nach der Definition $D_x^\xi f(x) = \Sigma(A e^{mx} m^\xi)$. m stellt er n unbestimmte Form dar, indem er es je einem der folgenden vier Ausdrücke gleich setzt:

$$m = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{e^{mh}-1}{h}, \quad = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{1-e^{-mh}}{h}, \quad = -\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{1-e^{mh}}{h}, \quad = -\operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{e^{-mh}-1}{h}.$$

Diese substituirt er in die obige Summe, und zwar je nachdem $m \gtrless 0$, diejenigen, welch Entwickelung von m^ξ nach dem binomischen Satze gestatten. Diese Entwickelung führt er aus, die auftre Exponentialreihen werden wieder als Functionen f bezeichnet, und so bekommt er schliesslich di Grenzausdrücke:

1. $D_x^\xi f(x) = \operatorname*{Lim}_{h=0}\left\{h^{-\xi}\sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1} f(x+\xi h-\overline{k-1}h)]\right\}$

2. $D_x^\xi f(x) = \operatorname*{Lim}_{h=0}\left\{h^{-\xi}\sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1} f(x-\overline{k-1}h)]\right\}$

3. $D_x^\xi f(x) = (-1)^\xi \operatorname*{Lim}_{h=0}\left\{h^{-\xi}\sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1} f(x+\overline{k-1}h)]\right\}$

4. $D_x^\xi f(x) = (-1)^\xi \operatorname*{Lim}_{h=0}\left\{h^{-\xi}\sum_{k=1}^{\infty}[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1} f(x-\xi h+\overline{k-1}h)]\right\}$

die der Form wie der Herleitung nach in zwei Gruppen zerfallen: die beiden ersten gehören zusamm sind wesentlich identisch, ebenso die beiden letzten; jene beiden besitzen kein Vorzeichen und sind, f es ist, reell, die letzten beiden haben das Vorzeichen $(-1)^\xi$, sind also wesentlich imaginär; die

[1]) Journal de l'école polytechnique Cah. 21, 24, 25 Crelle's Jounal, Band XI, XII, XIII.

in mit der Gliederzahl fallendes Argument, die letzten steigendes. Jene sollen gelten, sobald die tialreihe für f nur positive, diese, wenn sie nur negative m enthält. Der positive ganze Differential- geht aus allen in gleicher Weise richtig hervor, aus den ersten beiden in der Gestalt des „rückwärts enen", aus den letzten beiden in der des „vorwärts genommenen". In so fern stellen sie, ohne it auf ihre augenblickliche Herleitung, bereits eine richtige Verallgemeinerung des Begriffes dar. Nun beschränkt sich Liouville fast überall ausdrücklich auf Functionen, in deren Expontial-Reihe m st; ebenso tritt der Factor $(-1)^{\xi}$ regelmässig auf. Wir werden also schliessen, dass er nur die eine s Begriffes, sich gründend auf Reihe 3 und 4, behandelt, die andere vernachlässigt hat — welchen unsere eigenen Untersuchungen bestätigen werden. Klar tritt diese Einseitigkeit hervor bei der ng einer Integraldarstellung. Zuerst hat er dieselbe aus Exponential-Reihen hergeleitet, in einem Mémoire giebt er eine Herleitung aus den Grenzwert-Darstellungen, und zwar aus der dritten, einer der zweiten Gruppe: eine der ersten benutzt er nicht, was doch eben so richtig, ja, notwendig wäre. Das Integral aber lautet:

$$\xi \leqq -1,\ D_x^{\xi} f(x) = \frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_0^{\infty} f(x+z)\, z^{-\xi-1}\, dz .$$

n hier der Factor $(-1)^{\xi}$ und steigendes Argument.

5. Riemann[1]) geht zurück auf die Eigenschaft des Differentialquotienten, Coefficient in der ien Reihe zu sein. Ist p eine ganze, negative oder positive, Zahl, α ein echter Bruch, so sollen rentialquotienten $D_x^{p+\alpha} f(x)$ einer Function, deren Index zu demselben Nenner gebrochen ist, der g

$$f(x+k) = \sum_{p=-\infty}^{p=+\infty} \left[k^{p+\alpha} \cdot D_x^{p+\alpha} f(x)\, P_{p+\alpha} \right]$$

also als Coefficienten einer doppelt unendlichen Reihe auftreten. Der Factor P wird so bestimmt, Gesetz $D^{\xi}\left\{D^{\eta} f(x)\right\} = D^{\xi+\eta} f(x)$ besteht und findet sich als $P_{p+\alpha} = 1^{p+\alpha} : \Gamma(p+\alpha+1)$. Die Potenz von 1 setzt Riemann gleich 1, schliesst also die complexen Werte aus, wozu kein Grund n ist; wir fügen diesen Factor wieder hinzu. Die Integraldarstellung, welche er weiterhin giebt, m

$$\xi \leqq -1, \quad D_x^{\xi} f(x) = \frac{(+1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_k^{x} f(t)\,(x-t)^{-\xi-1}\, dt = \frac{(+1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_0^{x-k} f(x-z)\, z^{-\xi-1}\, dz,$$

as Liouvillesche Integral hervorgeht, wenn man $z = -v$ substituirt und $k = \infty$ setzt. Der Haupt- d ist also, dass hier die obere Grenze variabel ist. Die Specialisirung $f(x) = x^{u}$, $k = 0$ ergiebt

$$\left.\begin{array}{l} x > 0,\ \mu > -1, \\ \xi \leqq -1,\ k = 0 \end{array}\right\} \quad D_x^{\xi} x^{u} = (+1)^{\xi} \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\xi+1)} x^{u-\xi} = (\mu,-1)^{\xi}\, x^{u-\xi},$$

Facultät zweiter Art, wie Euler.

Die zweite gebräuchliche Definition des Differentialquotienten zu positiv ganzem Index, als eines Ausdruckes von unbestimmter Form, macht Grünwald[2]) zum Ausgangspunkt. Die Reihe

$$\operatorname*{Lim}_{h=0} \left\{ h^{-\xi} \left[f(x) - \binom{\xi}{1} f(x-h) + \binom{\xi}{2} f(x-2h) - \ldots\ldots + (-1)^{n} \binom{\xi}{n} f(x-nh) \right] \right\},$$

und h beliebig complexe Grössen, ξ eine complexe, n eine positive ganze Zahl ist, enthält für den reellen positiv ganzen ξ den gewöhnlichen Differentialquotienten in sich; ist ξ eine andere Zahl, die Reihe nicht mehr bei einem bestimmten Gliede ab, man muss sie in's Unendliche gehen lassen,

---

[1]) Gesammelte Werke, Aufsatz vom Jahre 1847.

[2]) „Zeitschrift für Mathematik und Physik", 12. Jahrg. — „Sitzungsberichte der Gesellschaft der Wissenschaften zu — „Abhandlungen" derselben, Band XI der 6. Folge.

Lim $n = \infty$ setzen. Doch wird $(x-nh)$ dann nicht als eine beliebige, unbestimmte oder unendliche anzusehen sein, vielmehr kann man das Produkt (nh) für $n = \infty$, $h = 0$ sich einem bestimmten Werte lassen, so dass auch Lim $(x-nh)$ eine bestimmte, im Allgemeinen endliche, Grösse ist, etwa u. Dan Grünwald obigen Grenzwert, falls derselbe eine bestimmte endliche Function der in ihm vorkon Grössen ist, den „Differentialquotienten zum Index ξ der Function $f(x)$ nach x, über das ge Argumentgebiet von u bis x erstreckt" und bezeichnet denselben mit $\frac{d^\xi f(x)}{dx^\xi}\Big|_{x=u}^{x=x}$. Zunächst wird für dass der reelle Teil von $\xi \leqq -1$ ist, nachgewiesen, dass der so definirte Begriff eine bestimmte Function von ξ, x, u, f ist, falls f im endlichen Intervalle von u bis x endlich und stetig verläu Indices, deren reeller Teil grösser ist, scheint dieser Nachweis auf dem benutzten Wege unmöglich, dient zur Begründung des Begriffes für solche ξ die formal richtige Gleichung

$$\frac{d^r}{dx^r}\left\{\frac{d^\xi f(x)}{dx^\xi}\Big|_{x=u}^{x=x}\right\} = \frac{d^{\xi+r} f(x)}{dx^{\xi+r}}\Big|_{x=u}^{x=x}.$$

Das Auftreten der „Grenzen" x und u ist das wichtige neue Moment, welches Grünwald in Frage bringt. Die benutzte Grenzwert-Darstellung liefert formal für positiv ganze Indices den „ri genommenen" Differentialquotienten, und von den Liouvilleschen vier Grenzwert-Formeln ist formal zweite, eine aus der ersten Gruppe, mit ihr identisch, welche Liouville, wie gezeigt, vernachlässig Nun ist hier aber h beliebig complex, kann also auch negativ reell werden; so dass auch die drit enthalten ist. Daraus folgt, dass die Liouvillesche Theorie, welche sich auf diese dritte Definition g als Specialfall in der Grünwaldschen enthalten sein muss; welcher Nachweis indessen von Grünwa nicht geführt worden ist. Die Integraldarstellung Grünwalds lautet

$$\xi \leqq -1, \quad \frac{d^\xi f(x)}{dx^\xi}\Big|_{x=u}^{x=x} = \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\int_u^x f(t)(x-t)^{-\xi-1}\,dt = \frac{1}{\Gamma(-\xi)}\int_0^{x-u} f(x-z)\,z^{-\xi-1}\,dz,$$

also genau wie die Eulersche, wenn wir das k derselben durch die „Grenze" u ersetzen. Die Integr geradlinig zu nehmen. Das Liouvillesche Integral erscheint, wenn man $z = -v$ substituirt und u setzt. Demnach ist der Differentialquotient Liouvilles nichts anderes, als ein Grünwaldscher von x b erstreckter. Die Specialisirung $f(x) = (u-x)^u$ liefert

$$\left.\begin{array}{l}\mu > -1\\ \text{real } \xi \leqq -1\end{array}\right\} \quad \frac{d^\xi (x-u)^\mu}{dx^\xi}\Big|_{x=u}^{x=x} = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu-\xi+1)}(x-u)^{\mu-\xi} = (\mu.-1)^\xi\,(x-u)^{\mu-\xi},$$

also die Facultät zweiter Art, wie Euler und Riemann.

7. Most[1]) geht bei seiner Definition nicht auf die höheren Differentialquotienten, sond mehrfachen Integrale zurück. Als Formel für das m-fache Integral benutzt er diese:

$$\int_u^{m\,x} f(x)\,dx^m = \operatorname{Lim}\left\{h^m (x-u)^m \left[f(x) - \binom{-m}{1} f(x-h(x-u)) + \binom{-m}{2} f(x-2h(x-u)) \right.\right.$$
$$\left.\left. \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\binom{-m}{n-1} f(x-\overline{n-1}h(x-u))\right]\right\}.$$
$$\operatorname{Lim} h = 0,\ n = \infty,\ nh = 1$$

dasselbe „zwischen den Grenzen u und x genommen" ansehend als Resultat einer m-mal je zwischen d Grenzen ausgeführten einfachen Integration, letztere definirt durch die Gleichung, die aus der ob $m = 1$ hervorgeht. Setzt man $-m = \xi$, $h(x-u) = h_1$, so erhält man genau die Grünwaldsche D von welcher diese also nur eine andere Wendung ist; und diese Modification ist gewählt worden, Integraldarstellungen einen grösseren Geltungsbereich zu verschaffen. Abgesehen nämlich von einem co Factor decken sich der Form des Differentiales wie den Grenzen nach die Mostschen Integrale sc mit dem Grünwaldschen, sind jedoch nicht längs einer Geraden zu erstrecken, sondern längs ein vorhandenen Ausnahmepunkt umkreisenden Curve. Diese Erweiterung soll bewirken, dass sie nicht

[1]) Zeitschrift für Mathematik und Physik, 16. Jahrgang.

$\xi \leqq -1$, sondern auch für grössere, namentlich positive, gelten. Die Beurteilung dieser Modification so aufs engste zusammen mit der Frage nach dem Geltungsbereiche der Integraldarstellungen, welcher ter eine ausführliche Betrachtung widmen wollen. Im übrigen weist er nach, dass sowohl das dsche wie das Liouvillesche Integral als Specialfälle in dem seinigen enthalten sind, und führt iationen von Potenz-Ausdrücken und Exponentialgrössen aus.

Die Definition des „Integrales zu beliebigem Index zwischen bestimmten Grenzen" von Schimpf[1]) uf demselben Principe. Die erste Definitionsformel ist zwar allgemeiner als die Mostsche, deren irung jedoch, die, wenn nicht ausdrücklich anders bestimmt wird, allein benutzt werden soll (Seite 3), ch genau mit der Reihe, die Most an die Spitze stellt.

Ich bemerke, dass ich diese beiden Abhandlungen erst kennen lernte, als die Auffassung des Begriffes im Folgenden vertrete, bereits in mir zur vollen Klarheit gekommen und ihre Darstellung im hen fixirt war.

8. Von Schäwen[2]) geht aus von der Darstellung des positiv ganzen Differentialquotienten als enes Integral,

$$\frac{d^n f(x)}{dx^n} = \frac{n!}{2\pi i} \int f(t)\,(t-x)^{-n-1}\,dt,$$

Integral zu erstrecken ist auf einem beliebig geschlossenen imaginären Wege um den Punkt x, der nstetigkeitspunkt der Function $f(x)$ umschliesst". Also ein geschlossenes Integral, wenn n positiv , wenn man $n!$ durch $\Gamma(n+1)$ ersetzt, n rechter Seits nur in Verbindungen auftritt, in denen es Zahl sein kann, so gilt die Gleichung als Definition für solche n, allerdings nur unter einer gewissen bung des Begriffes. Nämlich: „Es lässt sich leicht finden, dass unter der Voraussetzung eines n das Integral um den Rand des Integrationsgebietes übergeht in

$$(1-e^{-2i\pi n}) \int_{z_1}^{x} f(t)\,(t-x)^{-n-1}\,dt,$$

ntegration von einem beliebigen Punkte z_1 des Randes auf einer Linie bis zum Punkte x verläuft, n eben das Integral um den Rand des Integrationsgebietes auf einem unendlich kleinen Kreise det". Also falls der Index negativ ist, ist das Integral nicht mehr geschlossen, sondern ein ntegral — eine Abweichung von dem ursprünglichen Gedanken, welche ihn der Grünwaldschen sehr nahe bringt. Durch eine einfache Umformung entsteht die Gleichung

$$\xi < 0, \quad \frac{d^\xi f(x)}{dx^\xi} = -\frac{e^{-i\pi\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{z_1}^{x} f(t)\,(t-x)^{-\xi-1}\,dt.$$

Beachtet man, das $e^{-i\pi\xi} = (-1)^\xi$ ist und schreibt $(x-t)^{-\xi-1}$ für $-(-1)^\xi\,(t-x)^{-\xi-1}$, so hat Grünwaldsche Integral, wenn man noch z_1 durch u ersetzt. Die Grösse z_1, den beliebigen Punkt es, von dem aus die Integration geht, darstellend, ist die Grünwaldsche „untere Grenze", also auch wensche Begriff von dieser abhängig.

. Halten wir, nachdem wir die Entwickelung unserer Frage in den Hauptmomenten geschildert eselben nochmals zusammen: so versuchen Fourier, Euler, L. Sohncke, Liouville eine Definition des in der Weise, dass sie Formeln, die für positiv ganze Indices und für eine bestimmte Function sind, allgemein gelten lassen.

Man wird nicht leugnen, dass diesem Verfahren eine gewisse Willkür innewohnt, da man von jeder eben so gut wie von jeder anderen ausgehen kann; wie denn Liouville bemerkt, dass er ebensogut nveränderte Formel zur Differentiation der Exponentialgrösse auch die für die Potenz (wie er sie zur Grundlage seiner Untersuchungen hätte machen können. Aber abgesehen auch von dieser

[1]) Programm des Gymnasiums zu Bochum, 1885.
[2]) Programm des Gymnasiums zu Strasburg, Westpr. Ostern 1881 und 82.

Unbestimmtheit, die möglicherweise eine ganze Reihe verschiedener, jedoch durchaus gleich bere Theorieen hervorbringen könnte, muss man einen Vorwurf dem ganzen Principe machen: liegt de wirklich, wenn wir eine bestimmte Function zu Grunde legen, eine Notwendigkeit vor, die Verallgeme gerade in der Weise, wie es geschieht, zu treffen? Rücksichtlich der Potenz haben wir bereits hingewiesen, dass, weil die Facultät zu gebrochenem Exponenten doppelsinnig ist, sowohl die Eulers die Liouvillesche Formel unvollständige Verallgemeinerungen ergeben, erst die Sohnckesche Definition das Prinzip im Uebrigen anerkannt, erschöpfend sein. Selbst gegen Fourier lässt sich dasselbe a Denn eine andere als die von ihm benutzte, für ganze Indices aber eben so richtige Formel zur Differe des Cosinus lautet

$$D_x^{\xi} \cos x = (-1)^{\xi} \cos\left(x - \xi \frac{\pi}{2}\right).$$

Ginge man von dieser aus, so würde man ganz andere Resultate erhalten: wäre es aber weniger Wie das Wesen dieser einzelnen Methoden dasselbe ist, so ist auch ihr principieller Wert dersel Liouville's Urteil über Euler's Gedanken, „que ses raisonnements ont quelque chose de vague et inc dürfte doch wohl nicht zu rechtfertigen sein: verfährt er doch mit derselben Willkür, um einer Einseitigkeit zu verfallen.

Jedenfalls möchte ich den anderen Methoden einen höheren principiellen Wert beilegen; d gehen von beliebigen Functionen aus und haben dadurch schon eine viel breitere Grundlage. benutzen Definitionen des zu verallgemeinernden Begriffes und treffen dadurch mehr das Wesen de

Die folgende Darstellung ist eine Modification der Grünwald'schen Definition und vorerst eine lisirung, indem sie sich wesentlich auf reelle Grössen beschränkt. Die schon von anderen gegebene meinen Formeln sind durchgängig mit neuen Beweisen belegt.

Dritter Theil.

Die reelle Differentiation zu beliebig reellem Index. Definition und Ge

1. Definition. Den einfachen Differentialquotienten einer Function $f(x)$ nach ihrem Argu erklärt man als den Grenzwert:

$$\frac{df(x)}{dx} = \operatorname*{Lim}_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Es sei x rein reell und bleibe so. Dann ist h auch eine reelle Grösse, die gegen die Null convergi kann in doppelter Weise geschehen, einmal aus positiven, dann aus negativen Werten. Im erste haben wir den „vorwärts", im zweiten den „rückwärts gerichteten" Differentialquotienten. In der Schr wollen wir beide kennzeichnen, indem wir die, symbolisch zu verstehende, Ungleichung $h > 0$ resp. hinzufügen. Nehmen wir noch zweckmässig $f(x)$ voran, so erhalten wir:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{vorwärts gerichtet} & \dfrac{df(x)}{dx} = -\operatorname{Lim} \dfrac{f(x) - f(x+h)}{h} \\ \text{rückwärts gerichtet} & \dfrac{df(x)}{dx} = -\operatorname{Lim} \dfrac{f(x) - f(x-h)}{-h} \end{array}\right\} \quad h > 0.$$

$$\text{allgemeine Form} \quad \frac{df(x)}{dx} = -\operatorname{Lim} \frac{f(x) - f(x+h)}{h}, \quad h \gtrless 0.$$

Zu beiden Arten des Differentialquotienten gehören als Umkehrung auch zwei verschiedene Arten fachen Integrales. Ist $F(x)$ der vorwärts gerichtete Differentialquotient von $f(x)$, so folgt nach der taren Methode $f(x) - f(x+nh) = -\operatorname{Lim} \{h[F(x) + F(x+h) + F(x+2h) + \ldots + F(x+\overline{n-1}h)$

ir n unendlich gross werden lassen und Lim $(nh) = s$, Lim $(x + nh) = u$ setzen, so ist wegen $h > 0$ > 0, $u > x$, mithin

$$f(x) - f(x+s) = f(x) - f(u) = -\int_x^{u=x+s} F(x)\,dx, \quad \begin{matrix} s > 0 \\ u > x \end{matrix}. \qquad (3\alpha)$$

lso die Grenze u, „bis zu welcher integrirt wird", grösser als die andere x, „von welcher aus" integrirt ıan kann also das Integral als „vorwärts gerichtetes" bezeichnen. Die Umkehrung des rückwärts ten Differentialquotienten hingegen ergibt:

$$f(x) - f(x-s) = f(x) - f(u) = \int_{x-s=u}^{x} F(x)\,dx, \quad \begin{matrix} s > 0 \\ u < x \end{matrix}, \qquad (3\beta)$$

: ist das Verhältniss umgekehrt, weshalb man das Integral als „rückwärts gerichtet" bezeichnen kann. emeine Formel erscheint aus 2γ:

$$f(x) - f(x+s) = f(x) - f(u) = -\int_x^{x+s=u} F(x)\,dx, \quad \begin{matrix} s \gtreqless 0 \\ u \gtreqless x \end{matrix}, \qquad (3\gamma)$$

je nach der Beschaffenheit von s, d. h. je nach dem Vorzeichen von h, α oder β hervorgeht. Die von der aus integrirt wird, x, kann man auch als die „variabele" derjenigen, bis zu welcher integrirt der „festen" entgegen setzen. Letztere ist $u = x \pm s$, s das Intervall, dessen absoluter Wert zu x ird im ersten, von x subtrahirt wird im zweiten Falle.

Auf die Unterscheidung dieser beiden Arten des reellen Integrales, nach seiner Richtung und nach enseitigen Verhältniss der variabelen und festen Grenze, ist bisher kein Gewicht gelegt worden, das h unnötig, da ja eine Vertauschung der Grenzen statthaft ist. Für uns ist sie wichtig, denn es wird gral als Specialfall von Summen erscheinen, bei denen diese Umkehr nicht gestattet ist.

Aus den Formeln 2 den Differentialquotienten zu positiv ganzem Index ξ bildend, müssen wir bei uch die Richtung unterscheiden, und erhalten in Summenform:

gerichtet: $$D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname*{Lim}_{h=0} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{\xi+1} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x + \overline{k-1}\,h) \right] \right\}, \quad h > 0, \qquad (4\alpha)$$

s gerichtet: $$D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname*{Lim}_{h=0} \left\{ (-h)^{-\xi} \sum_{k=1}^{\xi+1} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x - \overline{k-1}\,h) \right] \right\}, \quad h > 0, \qquad (4\beta)$$

ıe Form: $$D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname*{Lim}_{h=0} \left\{ (-h)^{-\xi} \sum_{k=1}^{\xi+1} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x + \overline{k-1}\,h) \right] \right\}, \quad h \gtreqless 0, \qquad (4\gamma)$$

Nun enthalten diese Reihen den Index ξ nur in diesen Verbindungen: als Potenz-Exponenten und r eines Binomial-Coëfficienten, welche beide für beliebige ξ Sinn haben. Es entsteht daher die was wird aus ihnen, wenn wir darin für ξ beliebige (zunächst reelle) Zahlen zulassen? Diese Frage im Folgenden beschäftigen.

Lassen wir aber nun ξ eine beliebige Zahl sein: so können sie nicht mehr von $k = 1$ bis $k = \xi + 1$ nd der Binomial-Coëfficient $\binom{\xi}{k-1}$ wird für kein endliches k zu Null. Folglich dehnen sich die zu unendlichen aus. Dies bringen wir zum Ausdruck, indem wir sie von $k = 1$ bis $k = n$ ssen, wo n, die „Gliederzahl", eine positiv ganze Zahl ist, und die neue Bedingung Lim $n = \infty$ n. Ferner werden die Potenzen mit dem Index ξ nicht mehr eindeutig bleiben, sondern vieldeutig

werden. In α und β wollen wir diese Vieldeutigkeit von den Grenzwerten als solchen ablösen und Vorzeichen werfen, indem wir $h^{-\xi}$ als eindeutigen reellen positiven Hauptwert nehmen, und $(+1)^{-}$ resp. $(-1)^{-\xi}$ in β mit dem $(-1)^{\xi}$ vor dem Grenzwert vereinigen. Das ergibt in α wieder $(-1)^{\xi}$, in $(-1)^{+\xi}.(-1)^{-\xi}$, nicht gleich 1, sondern gleich dem ebenfalls vieldeutigen $(+1)^{\xi}$.

Um nun für diese Ausdrücke Nr. 4, Grenzwerte unendlicher Reihen, eine bequeme Bezeich haben, nennen wir sie nach wie vor „Differentialquotienten zum Index ξ der Function $f(x)$ nach ihren mente x“, und zwar die nach den geschehenen Umformungen eindeutigen Grenzwerte in α und „eindeutige“, die Producte aus ihnen und aus ihrem Vorzeichen sowie 4γ „mehrdeutige“. Bezeichne sie werden durch grosse lateinische D resp. $\mathfrak{D}$ — die mehrdeutigen durch jenes, die eindeutigen durch di denen der Index oben, das Argument unten links angefügt wird. Zu unterscheiden ist aber auch α a wärts gerichteter“ von β als „rückwärts gerichtetem“, und um auch in der Schreibweise eine Unters zu haben, wollen wir jenen durch eine eckige, diesen durch eine runde Klammer um den Index ausz So ist denn:

$$D_x^{[\xi]} f(x) = (-1)^{\xi}\, \mathfrak{D}_x^{[\xi]} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x + \overline{k-1}h) \right] \right\}$$
$$h > 0,\ \operatorname{Lim} h = 0,\ n = \infty,$$

der vorwärts gerichtete,

$$D_x^{(\xi)} f(x) = (+1)^{\xi}\, \mathfrak{D}_x^{(\xi)} f(x) = (+1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x - \overline{k-1}h) \right] \right\}$$
$$h > 0,\ \operatorname{Lim} h = 0,\ n = \infty,$$

der rückwärts gerichtete Differentialquotient von $f(x)$ nach x zum Index ξ,

$$D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x + \overline{k-1}h) \right] \right\}$$
$$h \gtrless 0,\ \operatorname{Lim} h = 0,\ n = \infty,$$

die allgemeine Form beider.

Nun kommt in den Argumenten von f das Product $\overline{k-1}h$ vor und der letzte Wert von $\operatorname{Lim} n = \infty$. Wir werden annehmen müssen, dass sich das Product nh für Eintritt der Grenzen e wissen Grösse nähere, nennen wir dieselbe s; so ist s positiv in α und β, wird aber zu x in α addirt subtrahirt in β, und ist in γ zugleich mit h positiv oder negativ. Ferner bezeichnen wir den Gr $\operatorname{Lim}(x + nh) = x + s$ in α und γ, $\operatorname{Lim}(x - nh) = x - s$ in β mit u, so ist $u > x$ in α, $u < x$ in aber grösser oder kleiner als x, je nachdem s positiv oder negativ ist. Um für diese Grenzwerte ei messene Deutung zu finden, betrachten wir den Fall $\xi = -1$. Die Reihen, welche aus den rechte von Nr. 5 hervorgehen, decken sich mit den Integralen 3α, β und γ, wenn man dort f statt F s und u beibehält. Das Resultat, welches sich hieraus ergibt, ist ein doppeltes: einmal sehen wir früher aus anderen Ueberlegungen hergeleitet war — dass auch nach unserer Definition der Diff quotient zum Index (-1) das einfache Integral ist, vorwärts oder rückwärts gerichtet, je nachdem d rentialquotient es ist, und zweitens, dass die Grenzwerte $\operatorname{Lim}(nh) = s$ und $\operatorname{Lim}(x \pm nh) = u$ in Falle das Intervall resp. die feste Grenze des Integrales darstellen. Da sie von ξ unabhängig sind, wir für beliebige ξ diese Bezeichnung derselben festhalten.

Ist also h das Increment, n die Gliederzahl der Reihen 5, so nenne ich $\operatorname{Lim}(nh) = s$ das „In $\operatorname{Lim}(x + nh) = u$ in α und γ, $\operatorname{Lim}(x - nh) = u$ in β die „feste Grenze“ des Differentialquotien Index ξ. In α und β ist das Intervall an sich positiv, in γ hat es dasselbe Vorzeichen wie das In vor dem Verschwinden, u ist $> x$ in α, $< x$ in β. Einen Differentialquotienten, erklärt durch N dem diese Grenzwerte gleich s resp. u sind, nenne ich „von der variabelen Grenze x aus vor- resp. r über den Intervall s erstreckt“ oder „von der variabelen Grenze x (zuerst zu nennen) bis zur

t“ oder „zwischen den Grenzen x und u resp. $x \pm s$ genommen“. Bezeichnen will ich ihn, indem ich nzen links neben das D resp. $\mathfrak{D}$ setze, und zwar die variabele oben, die feste unten, also in unserem oben und u, oder, wenn das Intervall ausgedrückt werden soll, $x \pm s$ unten. Demnach lautet die lige Definition:

Unter dem von der variabelen Grenze x über das Intervall s erstreckten oder zwischen den Grenzen genommenen Differentialquotienten von $f(x)$ nach x zum Index ξ verstehe ich

α) unter dem vorwärts gerichteten den Grenzausdruck

$$D_x^{[\xi]} f(x) = (-1)^{\xi}\, {}_{x+s=u}^{x}\mathfrak{D}_x^{[\xi]} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x+k-1h) \right] \right\} \tag{6α}$$

$$\text{für } h > 0,\ \operatorname{Lim} h = 0,\ n = \infty,\ nh = 1,\ x + nh = u,$$

β) unter dem rückwärts gerichteten den Grenzausdruck

$$D_x^{(\xi)} f(x) = (+1)^{\xi}\, {}_{x-s=u}^{x}\mathfrak{D}_x^{(\xi)} f(x) = (+1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x-k-1h) \right] \right\} \tag{6β}$$

$$\text{für } h > 0,\ \operatorname{Lim} h = 0,\ n = \infty,\ nh = s,\ x - nh = u,$$

γ) ohne Unterscheidung der Richtung

$$x+s=\,{}_{u}^{x}D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x+k-1h) \right] \right\} \tag{6γ}$$

$$\text{für } h \gtrless 0,\ \operatorname{Lim} h = 0,\ n = \infty,\ nh = s,\ x + nh = u.$$

Die Grössen „Intervall“, „variabele Grenze“, „feste Grenze“, „Gliederzahl“ und „Increment“ hängen leichungen zusammen, welche folgendes Gesetz ergeben: Eine Vermehrung der Gliederzahl zieht eine erung des absoluten Wertes des Intervalles und bei constanter variabeler Grenze eine Vergrösserung n in α, eine Verkleinerung derselben in β nach sich. Die Vermehrung der Gliederzahl müsste im le natürlich eine unendlich grosse sein. Aus Nr. 6 erhalten wir für $\xi = -1$:

$$x+s=\,{}_{u}^{x}D_x^{-1} f(x) = \int_{x+s=u}^{x} f(x)\, dx, \tag{7}$$

$= 0$:

$$x+s=\,{}_{u}^{x}D_x^{0} f(x) = f(x), \tag{8}$$

positiv ganzes $\xi = r$:

$$x+s=\,{}_{u}^{x}D_x^{r} f(x) = \frac{d^r f(x)}{dx^r}, \tag{9}$$

in diesem Falle die Reihe eine endliche wird, ist der Differentialquotient zu beliebigem Index von und fester Grenze unabhängig.

Als Resultat unserer bisherigen Verallgemeinerung können wir aussprechen: es ergiebt sich ein ig-vieldeutiger Begriff. Denn dass zwei Differentialquotienten zu demselben Index, mit derselben n Grenze und demselben Intervalle, aber verschiedener Richtung allgemein nicht denselben Wert nnen, ist leicht zu sehen, und jeder ist ausserdem noch complex, als Product aus einer reellen Grösse m complexen Factor. Von den Liouville'schen Grenzwert-Darstellungen sind nur zwei in unseren nen verwendet: doch war bereits darauf aufmerksam gemacht worden, dass die anderen beiden mit derselben wesentlich identisch sind und andererseits hätte ich auch die fehlenden erhalten können, die Gleichung Nr. 1 nicht in die Form 2 gebracht, sondern unverändert beibehalten und im Uebrigen n Weg eingeschlagen hätte. In der Grünwald'schen Definition ist die meinige als Specialfall ent- α für ein rein reelles negatives, β für ein rein reelles positives Increment. Neu ist der Begriff des es.

2. Convergenzbedingungen und Integraldarstellungen.

A. Wir untersuchen zunächst, wie der Differentialquotient zu beliebigem Index sich verhält, wen Intervall unendlich klein wird. In Nr. 6γ entwickeln wir $f(x+\overline{k-1}h)$ in die Taylorsche Reihe von (Gliedern, deren letztes das Restglied ist:

$$f(x+\overline{k-1}h) = f(x)+\frac{\overline{k-1}h}{1!}f'(x)+\ldots.+\frac{(\overline{k-1}h)^r}{r!}f^{(r)}(x)+\frac{(\overline{k-1}h)^{r+1}}{(r+1)!}f^{(r+1)}(x+\vartheta\overline{k-}$$

ϑ ist ein echter Bruch. Es wird also:

$$x+_s^x D_x^\xi f(x) = (-1)^\xi \sum_{m=0}^{r}\left[\frac{f^{(m)}(x)}{m!}\operatorname{Lim}\left\{h^{-\xi}\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1}(\overline{k-1}h)^m\right]\right\}\right]$$

$$+\frac{(-1)^\xi}{(r+1)!}\operatorname{Lim}\left\{h^{-\xi}\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1}f^{(r+1)}(x+\vartheta\overline{k-1}h)(\overline{k-1}h)^{r+1}\right]\right\}.$$

Den ersten Grenzwert gestalten wir so um:

$$\operatorname{Lim}(nh)^{m-\xi}\operatorname{Lim}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k-1}\binom{\xi}{k-1}(k-1)^m\right]n^{\xi-m}\right\},$$

so wird nh zu s, im zweiten Teile aber können wir, da er h nicht mehr enthält, gesondert zur Grenze übergehen, und erhalten nach Nr. XXI des ersten Teiles $1 : [\Gamma(-\xi)(-\xi+m)]$, mithin

$$x+_s^x D_x^\xi f(x) = \frac{(-1)^\xi}{\Gamma(-\xi)}\sum_{m=0}^{r}\left[\frac{f^{(m)}(x)\,s^{-\xi+m}}{m!\,(-\xi+m)}\right]+R,$$

wenn wir mit R den zweiten Grenzwert bezeichnen. Nun soll s verschwinden, was auch, wenn n une gross wird, stets möglich ist. Dann lässt sich die positiv ganze Zahl r stets so gross wählen, dass, wenn $-\xi+r$ noch negativ ist, $-\xi+r+1$ doch positiv wird. Für $s=0$ wird erst recht $\vartheta\overline{k-1}h$ zu also die Function in R von k unabhängig, wir können dann auch auf R die eben benutzten Formel wenden und erhalten

$$r<\xi<r+1,\ \operatorname*{Lim}_{s=0} R = \operatorname*{Lim}_{s=0}\frac{(-1)^\xi f^{(r+1)}(x)\,s^{-\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi)(-\xi+r+1)(r+1)!} = 0,$$

falls $f^{(r+1)}(x)$ endlich und $(-\xi+r+1)$ nicht gleich Null ist.

Ist nun ξ kleiner als Null, so werden in Nr. 11 alle Exponenten von s positiv, also im Gre

$$\xi<0,\ \operatorname*{Lim}_{s=0} x+_s^x D_x^\xi f(x) = 0.$$

Ist ξ dagegen positiv und liegt es zwischen 0 und 1, so setzen wir $r=0$, wir benutzen nur ein

$$0<\xi<1,\ \operatorname*{Lim}_{s=0} x+_s^x D_x^\xi f(x) = \operatorname*{Lim}_{s=0}\frac{(-1)^\xi f(x)\,s^{-\xi}}{\Gamma(-\xi)(-\xi)}.$$

Liegt ξ zwischen 1 und 2, so setzen wir $r=1$:

$$1<\xi<2,\ \operatorname*{Lim}_{s=0} x+_s^x D_x^\xi f(x) = \operatorname*{Lim}_{s=0}\frac{(-1)^\xi}{\Gamma(-\xi)}\left[\frac{f(x)\,s^{-\xi}}{-\xi}+\frac{f'(x)\,s^{-\xi+1}}{1!\,(-\xi+1)}\right],$$

u. s. f. Es folgt also: Ein Differentialquotient, dessen Intervall verschwindet, wird zu Null, sobal Index negativ ist. In Nr. 11 können wir die Summe noch etwas umgestalten:

$$\sum_{m=0}^{r}\frac{f^{(m)}(x)\,s^{-\xi+m}}{m!\,(-\xi+m)} = \frac{1}{-\xi}\sum_{m=0}^{r}\frac{f^{(m)}(x)\,s^{-\xi+m}}{m!}+\frac{1}{-\xi}\sum_{m=0}^{r}\frac{f^{(m)}(x)\,s^{-\xi+m}(-m)}{m!\,(-\xi+m)}.$$

Da es sich um sehr kleine s handelt, ist die erste Summe identisch mit $s^{-\xi} f(x+s)$, auf die zweite
n wir dieselbe Umformung an und fahren damit fort, bis alle $f^{(m)}$ das Argument $x+s$ erhalten haben.
rd aus Nr. 11 schliesslich

$$r<\xi<r+1, \quad \operatorname*{Lim}_{s=0} {}_{x+s}^{x}D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname*{Lim}_{s=0} \sum_{m=0}^{r} \frac{s^{-\xi+m} f^{(m)}(x+s)\,(-1)^m}{\Gamma(-\xi+m+1)} + R, \tag{14}$$

ach Nr. 12 ist $\operatorname{Lim} R = 0$.

B. In Nr. 6γ teilen wir die Reihe in zwei unendliche, die erste von n_1 Gliedern. n_1 stehe in einem
en Verhältniss zu n, so dass auch $\operatorname{Lim}(n_1 h)$ ein bestimmter Wert s_1 ist, der zu s in demselben
ltniss steht. Es ist also

$$ {}_{x+s}^{x}D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n_1} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x+\overline{k-1}h) \right] \right\}$$

$$+ (-1)^{\xi} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=n_1+1} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x+\overline{k-1}h) \right] \right\}$$

er erste Grenzwert offenbar nichts anderes als ${}_{x+s_1}^{x}D_x^{\xi} f(x)$. Den zweiten gestalten wir so um:

$$\left\{ h^{-\xi} \sum_{k=n_1+1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi}{k-1} f(x+\overline{k-1}h) \right] \right\} = \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi} \sum_{k=1}^{n-n_1} \left[(-1)^{n_1+k-1} \binom{\xi}{n_1+k-1} f(x+\overline{n_1+k-1}h) \right] \right\}$$

$$= \operatorname{Lim} \left\{ h \sum_{k=1}^{n-n_1} \left[(-1)^{n_1+k-1} \binom{\xi}{n_1+k-1} (n_1+k-1)^{\xi+1} f(x+n_1 h+\overline{k-1}h)\,(n_1 h+\overline{k-1}h)^{-\xi-1} \right] \right\}$$

Gehen wir jetzt zur Grenze $n_1 = \infty$ über, so ist $n_1 h = s_1$ zu setzen und nach Nr. XIX des ersten
überall

$$\operatorname*{Lim}_{n_1=\infty} \left\{ (-1)^{n_1+k-1} \binom{\xi}{n_1+k-1} (n_1+k-1)^{\xi+1} \right\} = 1 : \Gamma(-\xi),$$

mmt der Grenzwert die Form an

$$\frac{1}{\Gamma(-\xi)} \operatorname{Lim} \left\{ h \sum_{k=1}^{n-n_1} \left[f(x+s_1+\overline{k-1}h)\,(s_1+\overline{k-1}h)^{-\xi-1} \right] \right\}$$

ser Grenzwert ist nichts anderes, als das einfache Integral von $f(x+z)\,z^{-\xi-1}$ nach z zwischen den Grenzen
Lim $\{s_1+\overline{n-n_1}h\} = s$. Folglich

$$ {}_{x+s}^{x}D_x^{\xi} f(x) = {}_{x+s_1}^{x}D_x^{\xi} f(x) + \frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{s_1}^{s} f(x+z)\, z^{-\xi-1}\, dz. \tag{15}$$

Ein Differentialquotient, dessen Intervall in zwei Teile geteilt ist, ist also gleich der Summe aus
er den ersten Teil erstreckten Differentialquotienten zu demselben Index und einem über den zweiten
streckten Integrale, in dem die variabele Grenze und der Index als Parameter auftreten. Gleichung
auch, wenn $x+s_1$ nicht zwischen x und $x+s$ liegt.

C. In Nr. 15 setzen wir $s_1 = 0$. Ist ξ negativ, so folgt mittelst Nr. 13

$$\xi < 0, \quad {}_{x+s}^{x}D_x^{\xi} f(x) = \frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{0}^{s} f(x+z)\, z^{-\xi-1}\, dz. \tag{16}$$

Ist ξ dagegen positiv und liegt es zwischen den ganzen Zahlen r und $(r+1)$, so gestalten wir das
l in Nr. 15 durch $(r+1)$-malige partielle Integration um. Benutzen wir gleichzeitig die Gleichung
für $s = s_1$, so folgt:

$$ {}_{x+s}^{x}D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m s_1^{-\xi+m} f^{(m)}(x+s_1)}{\Gamma(-\xi+m+1)} + R + (-1)^{\xi} \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m s^{-\xi+m} f^{(m)}(x+s)}{\Gamma(-\xi+m+1)} $$

$$ -(-1)^{\xi} \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m s_1^{-\xi+m} f^{(m)}(x+s_1)}{\Gamma(-\xi+m+1)} + \frac{(-1)^{\xi+r-1}}{\Gamma(-\xi+r+1)} \int_{s_1}^{s} f^{(r+1)}(x+z)\, z^{-\xi+r}\, dz. $$

Die erste und dritte Summe heben sich und R verschwindet für $s_1 = 0$, also folgt

$$ r < \xi < r+1, $$

$$ {}_{x+s}^{x}D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \sum^{r} \frac{(-1)^m s^{-\xi+m} f^{(m)}(x+s)}{\Gamma(-\xi+m+1)} + \frac{(-1)^{\xi+r-1}}{\Gamma(-\xi+r+1)} \int_{0}^{s} f^{(r+1)}(x+z)\, z^{-\xi+r}\, dz. $$

Wir haben also durch identische Umformungen den Differentialquotienten zu negativem Index ein einfaches Integral, den zu positivem als eine Summe aus einem solchen und gewöhnlichen Diffe quotienten dargestellt und können nun hieran die Discussion des Begriffes knüpfen. Das Integral Nr. eine bestimmte endliche Function der in ihm auftretenden Grössen, sobald f im Intervalle von x b endlich und stetig verläuft: das Integral in Nr. 17 ebenso, wenn $f^{(r+1)}(x+s)$ diese Eigenschaft Mithin: Der Differentialquotient zum Index ξ der Function $f(x)$ nach x, von der variabelen Grenze das Intervall s vor- oder rückwärts erstreckt, ist eine endliche stetige Function dieser Grössen: 1. negatives ξ, wenn f im Intervalle endlich und stetig verläuft, 2. für ein positives ξ, welches zwisch ganzen Zahlen r und $(r+1)$ liegt, wenn f und die $(r+1)$ ersten Differentialquotienten von f im Different Intervalle endlich und stetig verlaufen.

D. Durch Specialisirung ergeben sich folgende Formeln, in denen, wenn die Richtu Differentiation angegeben ist, die auftretenden Potenzen die reellen positiven Hauptwerte darstelle Complexität auf dem Vorzeichen ruht:

$$ \begin{matrix} \xi < 0 \\ s > 0 \end{matrix} \Big| \; {}_{x+s}^{x}D_x^{[\xi]} f(x) = \frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{0}^{s} f(x+z)\, z^{-\xi-1}\, dz; \quad {}_{x-s}^{x}D_x^{(\xi)} f(x) = \frac{(+1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{0}^{s} f(x-z)\, z^{-\xi-1}\, dz $$

und wenn wir die feste Grenze statt des Intervalles einführen:

$$ \xi < 0, \quad {}_{u}^{x}D_x^{[\xi]} f(x) = \frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{x}^{u} f(t)\,(t-x)^{-\xi-1}\, dt; \quad {}_{u}^{x}D_x^{(\xi)} f(x) = \frac{(+1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{u}^{x} f(t)\,(x-t)^{-\xi-1}\, dt $$

$$ \xi < 0, \quad u \gtrless x, \quad {}_{u}^{x}D_x^{\xi} f(x) = \frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_{x}^{u} f(t)\,(t-x)^{-\xi-1}\, dt. $$

$$ \begin{matrix} r < \xi < r+1, \\ u \gtrless x \end{matrix} \quad {}_{u}^{x}D_x^{\xi} f(x) = (-1)^{\xi} \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^m f^{(m)}(u)\,(u-x)^{-\xi+m}}{\Gamma(-\xi+m+1)} + \frac{(-1)^{\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi+r+1)} \int_{x}^{u} f^{(r+1)}(t)\,(t-x)^{-\xi+} $$

In Nr. 15 haben wir den Fall, dass ξ die Null oder eine positiv ganze Zahl ist, noch zu b Er liefert

$$ \xi = r = 0, 1, 2, \ldots, \quad {}_{x+s}^{x}D_x^{r} f(x) = {}_{x+s_1}^{x}D_x^{r} f(x), $$

d. h. die gewöhnlichen Differentialquotienten sind vom Intervalle unabhängig. Das Liouvillesche Integ aus der ersten Formel Nr. 18 hervor, wenn man darin $s = \infty$ setzt. Also ist der Differential Liouvilles nichts anderes als ein über ein unendliches Intervall vorwärts erstreckter — ein specieller Fal Begriffes. An dieser Stelle möge erwähnt werden, dass man die Schreibweise des Integrales nachahm und setzen:

$$ {}_u^x D_x^\xi f(x) = {}_u^x D_t^\xi f(t) = {}_u^x D_v^\xi f(v) = \ldots \tag{22}$$

Ferner mögen zwei unmittelbar folgende Gesetze hier Platz finden:

$$ {}_u^x D_x^\xi [f(x)+\varphi(x)] = {}_u^x D_x^\xi f(x) + {}_u^x D_x^\xi \varphi(x), \quad {}_u^x D_x^\xi (c.f(x)) = c \,.\, {}_u^x D_x^\xi f(x). \tag{23}$$

3. Mehrmalige Differentiation. Es ist

$$ \frac{d}{dx}\, {}_u^x D_x^\xi f(x) = -\operatorname*{Lim}_{h=0} \left\{ \frac{1}{h} \left({}_u^x D_x^\xi f(x) - {}_u^{x+h} D_x^\xi f(x) \right) \right\}.$$

Stellen wir die Differentialquotienten durch ihre Reihen dar und nehmen das Increment h derselben sem h hier gleich an, so folgt, wenn wir die Glieder mit gleichen f vereinigen:

$$ \frac{d}{dx}\, {}_u^x D_x^\xi f(x) = (-1)^{\xi+1} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\xi-1} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\xi+1}{k-1} f(x+\overline{k-1}h) \right] \right\} = {}_u^x D_x^{\xi+1} f(x), $$

rch mehrmalige Anwendung

$$ \frac{d^r}{dx^r}\, {}_u^x D_x^\xi f(x) = {}_u^x D_x^{\xi+r} f(x) \tag{24}$$

Bezeichne ich ${}_u^x D_x^\xi f(x)$ mit $F(x)$, so wird ferner

$$ {}_u^x D_x^\eta \left\{ {}_u^x D_x^\xi f(x) \right\} = {}_u^x D_x^\eta F(x) = (-1)^\eta \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\eta} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\eta}{k-1} F(x+\overline{k-1}h) \right] \right\} $$

$$ = (-1)^\eta \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\eta} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\eta}{k-1} {}_u^{x+\overline{k-1}h} D_v^\xi f(v) \right] \right\} $$

Löse ich den im k-ten Gliede stehenden Differentialquotienten in seine Summe auf, so hat diese 1 Glieder, deren erstes $f(x+\overline{k-1}h)$, deren letztes immer $f(x+\overline{n-1}h)$ enthält. Schliesslich ergiebt sich

$$ {}_n^x D_x^\eta \left\{ {}_u^x D_x^\xi f(x) \right\} = {}_u^x D_x^{\eta+\xi} f(x). \tag{25}$$

Der ausführliche Beweis steht bei Grünwald, Zeitschr. 16 Seite 472. Ausführlicher wollen wir den Beweis der folgenden Formel geben. In Nr. 25 ist Bedingung, dass der innere Index ξ beliebig, cht positiv ganz sei. Geschieht dagegen dies letztere, so lautet das Resultat ganz anders. Es ist

$$ {}_u^x D_x^\eta \frac{df(x)}{dx} = (-1)^\eta \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\eta} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\eta}{k-1} \frac{df(x+\overline{k-1}h)}{dx} \right] \right\} $$

$$ = (-1)^\eta \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\eta} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\eta}{k-1} \left(- \operatorname{Lim} \frac{f(x+\overline{k-1}h) - f(x+kh)}{h} \right) \right] \right\} $$

$$ = (-1)^{\eta+1} \operatorname{Lim} \left\{ h^{-\eta-1} \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\eta}{k-1} (f(x+\overline{k-1}h) - f(x+kh)) \right] \right\} $$

nn man die Reihe ausschreibt, wird sie:

$$) - \binom{\eta}{1} f(x+h) + \binom{\eta}{2} f(x+2h) - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \binom{\eta}{n-1} f(x+\overline{n-1}h) $$

$$ - \binom{\eta}{0} f(x+h) + \binom{\eta}{1} f(x+2h) - \ldots\ldots + (-1)^{n-1} \binom{\eta}{n-2} f(x+\overline{n-1}h) - (-1)^{n-1} \binom{\eta}{n-1} f(x+nh) $$

$$ = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \binom{\eta+1}{k-1} f(x+\overline{k-1}h) \right] - (-1)^{n-1} \binom{\eta}{n-1} (n-1)^{\eta+1} f(x+nh) (n-1)^{-\eta-1} $$

also wenn ich dies einsetze und zur Grenze übergehe, so dass $x+nh=u$, $nh=u-x$ wird, Benutzung von Nr. XXI:

$$ {}_u^x D_x^\eta \frac{df(x)}{dx} = {}_u^x D_x^{\eta+1} f(x) + (-1)^\eta \frac{f(u)\,(u-x)^{-\eta-1}}{\Gamma(-\eta)} $$

Durch Schluss von r auf $(r+1)$ folgt die Formel

$$ {}_u^x D_x^\eta \frac{d^r f(x)}{dx^r} = {}_u^x D_x^{\eta+r} f(x) + (-1)^\eta \sum_{m=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-m+1} f^{(m)}(u)\,(u-x)^{-\eta-r+m}}{\Gamma(-\eta-r+m+1)} $$

von welcher Nr. 17 eigentlich ein Specialfall ist. Aus den letzten drei Gleichungen geht hervor: Diffe man erst zu positiv ganzem Index, dann zu beliebigem zwischen Grenzen, so ist das nicht dasselbe, al man sofort zwischen denselben Grenzen zur Summe der Indices als Index differenzirt hätte, beides scheidet sich um eine gebrochene Function des Intervalles; zwei aufeinander folgende Differentiati constanter fester Grenze) darf man nur dann in ihrer Reihenfolge vertauschen, wenn beide positiv oder beide nicht positiv ganzen Index haben; in letzterem Falle muss auch die feste Grenze beider c bleiben und dieselbe sein. Setzen wir in Nr. 25 $\xi=\eta=-1$, so erhalten wir durch fortgesetzte Anw

$$ {}_u^x D_x^{-r} f(x) = \overset{(r)}{\int_u^x} \int_u^x \cdots \int_u^x \int_u^x f(x)\,dx^r = {}_u^r\!\int_u^x f(x)\,dx^r , $$

d. h. der Differentialquotient zu negativ ganzem Index ist das vielfache Integral, die einzelnen Integra immer zwischen denselben Grenzen ausgeführt. Setzen wir die Indices beide dem absoluten Wert gleich, dem Vorzeichen nach entgegengesetzt voraus, so folgt: diese Differentiationen heben sich auf, der innere Index nicht positiv ganz ist. Dagegen folgt aus Nr. 26 für $\eta=-r$:

$$ {}_u^x D_x^{-r} \frac{d^r f(x)}{dx^r} = f(x) + \sum_{m=0}^{r-1} \frac{(-1)^{m-1} f^{(m)}(u)(u-x)^m}{m!} $$

Dass dies ein richtiger Ausdruck für das r-fache Integral sammt seiner r-fachen Integrationsco ist, ist leicht zu zeigen. Die gegebenen Formeln erleiden natürlich eine Modification, sobald Bedingungen eintreten. So ist

$$ {}_{u_2}^x D_x^\eta \left\{ {}_{u_1}^x D_x^\xi f(x) \right\} = {}_{u_2}^x D_x^{\eta+\xi} f(x) + \frac{(-1)^\xi}{\Gamma(-\xi)} \int_{u_2}^{u_1} f(t)\, {}_{u_2}^x D_x^\eta (t-x)^{-\xi-1}\,dt $$

$$ = {}_{u_1}^x D_x^{\eta+\xi} f(x) + \frac{(-1)^\eta}{\Gamma(-\eta)} \int_{u_1}^{u_2} {}_{u_1}^t D_t^\xi f(t)\,.\,(t-x)^{-\eta-1}\,dt $$

$$ \frac{d^r}{dx^r}\, {}_{x+s}^x D_x^\xi f(x) = {}_{x+s}^x D_x^{\xi+r} f(x) + (-1)^\xi \sum_{m=0}^{r-1} \frac{(-1)^{r-m+1} f^{(m)}(x+s)\, s^{-\xi-r+m}}{\Gamma(-\xi-r+m+1)} $$

$$ {}_{x+s}^x D_x^\xi \frac{d^r f(x)}{dx^r} = \frac{d^r}{dx^r}\, {}_{x+s}^x D_x^\xi f(x) $$

Diese letzten Formeln, in denen also die feste Grenze veränderlich, das Intervall constant ist, geradezu das Gegenteil von Nr. 24 und 26.

Kommt die variabele Grenze x auch noch als Parameter in der Function vor, so wird der einfachs

$$ \frac{d^r}{dx^r}\, {}_u^x D_t^\xi \psi(x,t) = \sum_{m=0}^{r} \left[\binom{r}{m} {}_u^x D_t^{\xi+r-m} \frac{\partial^m \psi(x,t)}{\partial x^m} \right] $$

4. Substitutionen. Differenzirt man einen Differentialquotienten bei constanter variabeler Grenze r festen Grenze, so wird:

$$\frac{\partial}{\partial u}\,{}_u^x D_x^\xi f(x) = -\operatorname{Lim}_{h=0}\left\{\frac{1}{h}\left({}_u^x D_x^\xi f(x) - {}_{u+h}^x D_x^\xi f(x)\right)\right\}$$

Führen wir jetzt die Summen ein, und hat der erste Differentialquotient n Glieder, $u = \operatorname{Lim}(x+nh)$, ler zweite eines mehr, da $u+h = \operatorname{Lim}(x+nh+h) = \operatorname{Lim}(x+\overline{n+1}h)$ ist, folglich wird

$$\frac{\partial}{\partial u}\,{}_u^x D_x^\xi f(x) = +\operatorname{Lim}\left\{(-1)^\xi\, h^{-\xi-1}\,(-1)^n \binom{\xi}{n} f(x+nh)\right\},$$

h der schon oft benutzten Schlussweise

$$\frac{\partial}{\partial u}\,{}_u^x D_x^\xi f(x) = (-1)^\xi \frac{f(u)\,(u-x)^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)}. \tag{33}$$

Diese Formel oder vielmehr die ihr analoge benutzt Grünwald zur Herleitung seiner Integral- ng, indem er sie integrirt. Setzen wir $u = x+s$, so folgt noch durch Verbindung von Nr. 33 und nerkwürdige Beziehung

$$\frac{\partial}{\partial x}\,{}_{x+s}^x D_x^\xi f(x) - \frac{\partial}{\partial s}\,{}_{x+s}^x D_x^\xi f(x) = {}_{x+s}^x D_x^{\xi+1} f(x). \tag{34}$$

Wir wollen jetzt die Substitution neuer Variabelen im Differentialquotienten zu beliebigem Index und stellen die Frage auf: wenn f gegeben ist, wie müssen zwei Functionen F und ψ beschaffen mit die Beziehung

$${}_u^x D_z^\xi f(z) = {}_{\psi(u)}^{\psi(x)} D_y^\xi F(y)$$

Differenziren wir beiderseits nach u, so folgt mittelst Nr. 33:

$$\frac{(-1)^\xi f(u)\,(u-x)^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)} = (-1)^\xi \frac{F[\psi(u)]\,[\psi(u)-\psi(x)]^{-\xi-1}}{\Gamma(-\xi)}\cdot\psi'(u),$$

ser Gleichung müssen beide genügen. Ist F gegeben, so ist ψ aus ihr zu bestimmen, wozu keine nen Regeln gegeben werden können. Anders, wenn ψ gegeben und F gesucht ist. Setzen wir noch lass $f(z)$ selbst von der Gestalt $f[\psi(z)]$ war, so folgt mittelst Nr. 33:

$$F[\psi(u)] = f[\psi(u)]\left(\frac{\psi(u)-\psi(x)}{u-x}\right)^{\xi+1} : \psi'(u), \tag{35}$$

it ist F bestimmt, sobald sich die Umkehrung von ψ angeben lässt; ist dies die Function $U\psi$, so Gleichung $U\psi[\psi(y)] = \psi[U\psi(y)] = y$ besteht, so folgt:

$$F(y) = f(y)\left(\frac{y-\psi(x)}{U\psi(y)-x}\right)^{\xi+1} : \psi'[U\psi(y)]. \tag{36}$$

so im allgemeinen auch von x und von ξ abhängig, demnach für verschiedene ξ nicht dasselbe. Setzen 35 ein, so wird also

$${}_u^x D_z^\xi f[\psi(z)] = {}_{\psi(u)}^{\psi(x)} D_{\psi(t)}^\xi \left\{f[\psi(t)]\left(\frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x}\right)^{\xi+1} : \psi'(t)\right\}. \tag{37}$$

$= -1$ geht die richtige Integral-Substitution hervor, auch für positiv ganze ξ und $\xi = 0$ gilt die Letzterer Fall z. B. ergibt:

$${}^x D_z^0 f[\psi(z)] = f[\psi(x)] = \left| f[\psi(t)]\frac{\psi(t)-\psi(x)}{t-x} : \psi'(t)\right|_{\psi(t)\,=\,\psi(x)}.$$

$) = \psi(x)$ wird auch $t = x$, der Quotient zum Differentialquotienten $\psi'(x)$, also ist die Gleichung $\psi(x) = a+bx$ ergibt:

$$f(a+bx) = {}_{a+bu}^{a+bx} D_{a+bt}^\xi \left[f(a+bt)\,b^{\xi+1}\,b^{-1}\right] = b^\xi\,{}_{a+bu}^{a+bx} D_{a+bt}^\xi f(a+bt) = b^\xi\,{}_{a+bu}^{a+bx} D_v^\xi f(v). \tag{38}$$

Setzt man $a = 0$, $b = -1$, so folgt:

$$ {}_u^x D_x^\xi f(-x) = (-1)^\xi {}_{-u}^{-x} D_v^\xi f(v) $$

und diese Gleichung gibt Veranlassung, das Verhältniss der beiderseitigen Grenzen zu discutiren. Ist so ist $-x < -u$, also war der linke Differentialquotient rückwärts gerichtet, so ist der rechte vorwä richtet. Eine Differentiation nach negativem Argumente bewirkt also eine Umkehrung in der Richtu Differentiation, und zwar nur im eindeutigen Differentialquotienten; das Vorzeichen bleibt schliesslich d dieses ist also das Charakteristische an beiden Arten der reellen Differentiation. $\psi(x) = u -$ $\psi(x) = x - u$ ergeben:

$$ {}_u^x D_z^\xi f(u-z) = (-1)^\xi {}_0^{u-x} D_v^\xi f(v); \quad {}_u^x D_z^\xi f(z-u) = {}_0^{x-u} D_v^\xi f(v), $$

$\psi(x) = \frac{1}{x}$ ergibt:

$$ {}_u^x D_x^\xi f\left(\frac{1}{x}\right) = {}_{\frac{1}{u}}^{\frac{1}{x}} D_{\frac{1}{t}}^\xi \left\{ f\left(\frac{1}{t}\right) \left(\frac{-1}{tx}\right)^{\xi+1} : \frac{-1}{t^2} \right\} = {}_{\frac{1}{u}}^{\frac{1}{x}} D_{\frac{1}{t}}^\xi \left\{ f\left(\frac{1}{t}\right) t^{-\xi+1} \right\} (-1)^\xi x^{-\xi-1}, $$

$$ {}_u^x D_x^\xi f\left(\frac{1}{x}\right) = {}_{\frac{1}{u}}^{\frac{1}{x}} D_y^\xi \{ f(y) y^{\xi-1} \} (-1)^\xi x^{-\xi-1}. $$

Vierter Teil.

Ausführbare reelle Differentiationen.

1. Differentiation der Constanten. Setzt man $f(x) = a$, so folgt aus Nr. 16 und 19

$$ {}_{x+s=u}^{x} D_x^\xi a = a(-1)^\xi \frac{(u-x)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} = a(-1)^\xi \frac{s^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)}, \quad \begin{matrix} u \geqq x \\ s \geqq 0 \end{matrix} $$

und zwar zunächst für negative ξ. Auf positive dehnt man die Formel aus, indem man beiderseits zu ganzem Index differenzirt. Für $\xi = 0$ ergiebt sich a, für positiv ganze ξ Null, für $\xi = -1$ aber a diese bekannten Fälle sind also richtig enthalten. $a = 0$ liefert:

$$ {}_{x+s=u}^{x} D_x^\xi 0 = 0. $$

2. Differentiation der Potenz bis zu einer beliebigen festen Grenze. Für $f(x)$ sind die Integrale Nr. 16 und 19 bei beliebigem u ausführbar erstens, wenn m positiv ganz ist (d dass ξ negativ ganz, welcher die mehrfachen Integrale liefern würde, übergehen wir), es wird dann

$$ \left.\begin{matrix} m \text{ posit. ganz} \\ \xi < 0 \end{matrix}\right\} {}_{x+s}^{x} D_x^\xi x^m = \frac{(-1)^\xi}{\Gamma(-\xi)} \left| \begin{matrix} \frac{x^m s^{-\xi}}{-\xi} + \binom{m}{1} \frac{x^{m+1} s^{-\xi+1}}{-\xi+1} + \binom{m}{2} \frac{x^{m-2} s^{-\xi+2}}{-\xi+2} \\ \qquad\qquad \ldots\ldots + \binom{m}{m} \frac{x^0 s^{-\xi+m}}{-\xi+m} \end{matrix} \right| $$

oder unter denselben Bedingungen:

$$ {}_u^x D_x^\xi x^m = (-1)^\xi \left| \frac{(u-x)^{-\xi} u^m}{\Gamma(-\xi+1)} - (m,-1)^1 \frac{(u-x)^{-\xi+1} u^{m-1}}{\Gamma(-\xi+2)} + \ldots + (-1)^m (m,-1)^m \frac{(u-x)^-}{\Gamma(-\xi+} \right. $$

Zweitens ist das Integral ausführbar, wenn $-m+\xi-1$ eine positiv ganze Zahl oder die Null wenn wir mit g eine positiv ganze Zahl bezeichnen, für $m = \xi - g$; oder, wenn wir $\xi = -\eta$ setz

$$\eta > 0,\ {}^{x}_{u}D_{x}^{-\eta}\, x^{-\eta-g} = (-1)^{-\eta}(u-x)^{\eta-1}\, u^{-\eta-g+1} \sum_{m=0}^{g-1} \frac{\left(\frac{u}{x}-1\right)^{m+1}(g-1,-1)^{m}}{\Gamma(\eta+m+1)} \tag{45}$$

wird das Integral Nr. 16 für ein beliebiges Intervall ausführbar, wenn wir $x = 0$ setzen:

$$\left.\begin{matrix} m-\xi > 0 \\ \xi < 0 \end{matrix}\right\} {}^{0}_{s}D_{x}^{\xi}\, x^{m} = \frac{(-1)^{\xi}\, s^{m-\xi}}{\Gamma(-\xi)\,(m-\xi)}. \tag{46}$$

te Formel gilt, wenn m positiv ganz ist, für beliebige ξ, wie sich durch schon oft gemachten analoge mittelst Nr. XXI direct aus der Definition nachweisen lässt.

3. Differentiation der Potenz bis zu einer bestimmten festen Grenze. Die eben angege- 'älle dürften die einzigen sein, in denen die Differentiation der Potenz bis zu einer beliebigen festen für einen beliebigen Index ausführbar ist. Im Uebrigen ist das nur möglich, wenn man die feste specialisirt, um auf das Integral

$$\int_0^1 w^{a-1}(1-w)^{b-1}\, dw = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)},\quad \begin{matrix} a > 0 \\ b > 0 \end{matrix}$$

gen. So ergeben sich die folgenden, zunächst für negative Indices, für positive dann durch ganz- Differentiation beweisbaren Formeln:

$$\left.\begin{matrix} x > 0 \\ \mu < 0,\ \mu-\xi < 0 \end{matrix}\right\} {}^{x}_{+\infty}D_{x}^{[\xi]}\, x^{\mu} = [\mu,-1]^{\xi}\, x^{\mu-\xi}, \tag{47α}$$

$$\left.\begin{matrix} x < 0 \\ \mu > -1 \end{matrix}\right\} {}^{x}_{0}D_{x}^{[\xi]}\, x^{\mu} = (\mu,-1)^{\xi}\, x^{\mu-\xi}, \tag{47β}$$

$$\left.\begin{matrix} x > 0 \\ \mu > -1 \end{matrix}\right\} {}^{x}_{0}D_{x}^{(\xi)}\, x^{\mu} = (\mu,-1)^{\xi}\, x^{\mu-\xi}, \tag{48α}$$

$$\left.\begin{matrix} x < 0 \\ \mu < 0,\ \mu-\xi < 0 \end{matrix}\right\} {}^{x}_{-\infty}D_{x}^{(\xi)}\, x^{\mu} = [\mu,-1]^{\xi}\, x^{\mu-\xi}, \tag{48β}$$

n also die Richtung der Differentiation unterschieden ist. Die gewöhnlichen Differentialquotienten Integrale gehen richtig hervor. Zusammenfassend können wir schreiben:

$$\mu > -1,\ {}^{x}_{0}D_{x}^{\xi}\, x^{\mu} = (\mu,-1)^{\xi}\, x^{\mu-\xi};\quad \left.\begin{matrix} \mu < 0 \\ \mu-\xi < 0 \end{matrix}\right\},\ {}^{x}_{\pm\infty}D_{x}^{\xi}\, x^{\mu} = [\mu,-1]^{\xi}\, x^{\mu-\xi}. \tag{49}$$

e Richtung ergibt sich aus dem Verhältniss der Grenzen; bei der zweiten Gleichung ist noch zu , dass die Unstetigkeitsstelle $x = 0$ nicht erreicht werden darf. Es treten nun also hier die Facul- s Differentiationsfactor der Potenz auf, wenn die Differentiation bis zu einer bestimmten festen 0 resp. $\pm\infty$ erstreckt wird: in diesem Falle die Facultät erster, in jenem die zweiter Art. Nun wir auch alle diejenigen Definitionen des Differentialquotienten zu beliebigem Index, die auf die Potenz hen, beurteilen. Euler hatte die Facultät zweiter Art, Liouville die erster. Es bestätigt sich also, Differentialquotient des letzteren ein über ein unendliches Intervall erstreckter ist. Im Uebrigen die Liouville'schen Formeln auch in unserer Theorie, als specieller Fall, richtig, so weit sie sich der Gültigkeitsgrenzen halten. Aber z. B. seine ganze Darstellung der „complementären Function". logons der vielfachen Integrationsconstanten eines Integrales, darauf beruhend, dass er die Formel positive μ, speciell für positive ganze, gelten lässt, müssen wir von unserem Standpunkte aus ver- Der Euler'sche Differentialquotient und also alle Differentiationen, die er mit dessen Hilfe ausführt, is zur festen Grenze Null erstreckter, die Sohncke'schen teilweise bis zur festen Grenze Null, teilweise unendliches Intervall erstreckte. So erscheinen die Definitionen dieser Mathematiker als Specialfälle rigen. Grünwald hatte nicht eine Potenz x^{μ}, sondern $(x-u)^{\mu}$ zwischen den Grenzen x und u

differenzirt und die Facultät zweiter Art erhalten, also scheinbar bis zu einer beliebigen Grenze diffe aber nur scheinbar, denn unter Anwendung von Nr. 40 folgt:

$$ {}_u^x D_x^\xi (x-u)^\mu = {}^{x-u}{}_0 D_z^\xi z^\mu , $$

also tritt doch die bestimmte feste Grenze 0 auf.

Auch um das Product $x^\mu \log x$ zu differenziren, kann man die Formeln 49 benutzen, es ist:

$$ \pm {}_\infty^x D_x^\xi (x^\mu \log x) = \frac{\partial}{\partial \mu} \pm {}_\infty^x D_x^\xi x^\mu = \frac{\partial}{\partial \mu} \{[\mu,-1]^\xi x^{\mu-\xi}\} = [\mu,-1]^\xi x^{\mu-\xi} \log x + x^{\mu-\xi} \frac{\partial [\mu,-}{\partial \mu} $$

und den Differentialquotienten der Facultät haben wir im ersten Teile als eine unendliche Reihe dar welche unter den hier für μ und $\mu-\xi$ geltenden Beschränkungen stets convergirt, er ist also mit b Genauigkeit zu berechnen. Nach Nr. XVII folgt also:

$$ \left.\begin{matrix} \mu < 0 \\ \mu - \xi < 0 \end{matrix}\right\} \pm {}_\infty^x D_x^\xi (x^\mu \log x) = [\mu,-1]^\xi x^{\mu-\xi} \left\{ \log x - \xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu-k+1)(\mu-\xi-k+1)} \right\}. $$

Analog wird unter Benutzung von Nr. XVIII:

$$ \mu > -1, \quad {}_0^x D_x^\xi (x^\mu \log x) = (\mu,-1)^\xi x^{\mu-\xi} \left\{ \log x + \xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(\mu+k)(\mu-\xi+k)} \right\}. $$

In der letzten Formel können wir noch $\mu = 0$ setzen und erhalten

$$ {}_0^x D_x^\xi \log x = \frac{(+1)^\xi x^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} \left\{ \log x + \xi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k-\xi)} \right\}. $$

Ist ξ positiv oder negativ ganz, $\xi = \pm r$, so folgen hieraus mittelst Nr. XVIIIa noch die beiden Formeln:

$$ D_x^{+r} \log x = (-1)^{r-1} (r-1)!\, x^{-r}, $$

$$ {}_0^x D^{-r} \log x = \int_0^x \log x \, dx^r = \frac{x^r}{r!} \left[\log x - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{r} \right) \right]. $$

4. Für einen bestimmten Index, nämlich $\xi = -\frac{1}{2}$, und eine Reihe von bestimmten Exponenten lässt sich die Differentiation der Potenz bis zu einer beliebigen festen Grenze noch au So ist

$$ \frac{u}{x} > 1, \quad {}_u^x D_x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi x}} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{u-x}{x}} = \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi x}} 2 \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{x}{u}} $$

$$ 0 < \frac{u}{x} < 1, \quad {}_u^x D_x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{x} = \frac{(+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi x}} \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-u}}{\sqrt{x} - \sqrt{x-u}} = \frac{(+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi x}} 2 \log \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-}}{\sqrt{u}} $$

$$ \frac{u}{x} > 1, \quad {}_u^x D_x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \log \frac{\sqrt{u} + \sqrt{u-x}}{\sqrt{u} - \sqrt{u-x}} = \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} 2 \log \frac{\sqrt{u} + \sqrt{u-}}{\sqrt{x}} $$

$$ 0 < \frac{u}{x} < 1, \quad {}_u^x D_x^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{(+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-u}{u}} = \frac{(+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} 2 \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{u}{x}} $$

$$ \frac{u}{x} > 1, \quad {}_u^x D_x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{x} = \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{u(u-x)} + x \log \frac{\sqrt{u-x} + \sqrt{u}}{\sqrt{x}} \right) $$

$$ 0 < \frac{u}{x} < 1, \quad {}_u^x D_x^{-\frac{1}{2}} \sqrt{x} = \frac{(+1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{u(x-u)} + x \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{u}{x}} \right) $$

Die erste und vierte, wie die zweite und dritte dieser Formeln haben eine sehr ähnliche Gestalt, ler That hängen sie eng zusammen. Setzt man nämlich in Nr. 41 $f(y) = y$, $\xi = -\frac{1}{2}$ so folgt

$$ {}_{u}^{x}D_{x}^{-\frac{1}{2}}\,\frac{1}{x} = \frac{(-1)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{x}}\;{}_{\frac{1}{u}}^{\frac{1}{x}}D_{y}^{-\frac{1}{2}}\,y^{-\frac{1}{2}} $$

der Zusammenhang erklärt ist.

5. Die Differentiation der Exponentialgrösse ist für eine beliebige feste Grenze ebenfalls nicht ar, wenn man nicht auf den Begriff der unvollständigen Gammafunction eingehen will. Aus Nr. 15 ch, wenn man s negativ oder positiv unendlich setzt:

$$ 0 < a < 1, \quad {}_{+\infty}^{x}D_{x}^{[\xi]}\,a^{x} = a^{x}(\log a)^{\xi} \tag{55} $$

$$ a > 1, \quad {}_{-\infty}^{x}D_{x}^{(\xi)}\,a^{x} = a^{x}(\log a)^{\xi} \tag{56} $$

Die Potenzen von $\log a$ sind vieldeutig, also nach den Grössenbedingungen die in 55 mit dem Factor lie in 56 mit $(+1)^{\xi}$. Zusammenfassen lassen sich beide Formeln in

$$ a^{\pm\infty} = 0, \quad {}_{\pm\infty}^{x}D_{x}^{\xi}\,a^{x} = a^{x}(\log a)^{\xi} \tag{57} $$

Für $a^{x} = e^{\pm mx}$ erhalten wir:

$$ m > 0, \quad {}_{+\infty}^{x}D_{x}^{[\xi]}\,e^{-mx} = e^{-mx}(-m)^{\xi}, \quad {}_{-\infty}^{x}D_{x}^{(\xi)}\,e^{+mx} = e^{mx}(+m)^{\xi} \tag{58} $$

$n = 1$:

$$ {}_{+\infty}^{x}D_{x}^{[\xi]}\,e^{-x} = (-1)^{\xi}\,e^{-x}, \quad {}_{-\infty}^{x}D_{x}^{(\xi)}\,e^{x} = (+1)^{\xi}\,e^{-x} \tag{59} $$

etzt wird uns die Liouvillesche Definition in ihrer Bedeutung innerhalb der unserigen noch klarer. iel, welche er zur Grundlage machte, $D_{x}^{\xi}\,e^{mx} = e^{mx}\,m^{\xi}$, gilt ja also für beliebige ξ nur, wenn die ation über ein unendlich grosses Intervall erstreckt wird. Alle Differentiationen, welche er mit e richtig ausführt, sind über ein unendliches Intervall erstreckte, z. B. die der Potenz; er konnte die Facultät erster Art erhalten, die von Euler aufgestellte zweite Art mit seiner Theorie zu , war ihm unmöglich.

. Differentiation des Cosinus und Sinus. Ausführbar ist diese, wenn man die feste s $\pm\infty$ specialisirt, es ergiebt sich:

$$ > -1 \quad \begin{cases} {}_{+\infty}^{x}D_{x}^{[\xi]}\cos x = (-1)^{\xi}\cos\left(x - \xi\,\frac{\pi}{2}\right), & {}_{+\infty}^{x}D_{x}^{[\xi]}\sin x = (-1)^{\xi}\sin\left(x - \xi\,\frac{\pi}{2}\right) \quad (60) \\ {}_{-\infty}^{x}D_{x}^{(\xi)}\cos x = (+1)^{\xi}\cos\left(x + \xi\,\frac{\pi}{2}\right), & {}_{-\infty}^{x}D_{x}^{(\xi)}\sin x = (+1)^{\xi}\sin\left(x + \xi\,\frac{\pi}{2}\right) \quad (61) \end{cases} $$

mmengefasst

$$ \xi > -1, \quad {}_{\pm\infty}^{x}D_{x}^{[\xi]}\cos x = (\mp 1)^{\xi}\cos\left(x \mp \xi\,\frac{\pi}{2}\right), \quad {}_{\pm\infty}^{x}D_{x}^{\xi}\sin x = (\mp 1)^{\xi}\sin\left(x \mp \xi\,\frac{\pi}{2}\right) \tag{62} $$

dingung ist also $\xi > -1$, schon für $\xi = -1$ gelten die Formeln nicht mehr. Die Fouriersche benutzte Nr. 61, ohne das mehrdeutige Vorzeichen. Ein weiterer Ausbau derselben würde also unserer Anschauung richtiges ergeben, so lange $\xi > -1$, und zwar würden die etwa ausgeführten tionen über ein unendliches Intervall rückwärts erstreckte sein. Dass die Fouriersche Definition derer Hinsicht einseitig ist, haben wir bereits erwähnt und finden es hier bestätigt durch das von Nr. 60.

Fünfter Teil.

Reihen-Entwickelungen.

1. Der Taylorsche Satz. In der Gleichung 28

$$ {}_uD_x^{-r}\,\frac{d^r f(x)}{dx^r} = f(x) + \sum_{m=0}^{r-1} \frac{(-1)^{m-1} f^{(m)}(u)\ (u-x)^m}{m!} $$

setzen wir $u-x=-y$, $x=u+y$, und schreiben dann x für u, so wird

$$ {}_xD_{x+y}^{-r}\,\frac{d^r f(v)}{dv^r} = f(x+y) + \sum_{m=0}^{r} \frac{(-1)^{2m-1} f^{(m)}(x)\ y^m}{m!}, $$

oder, indem wir die Summe transponiren und auflösen:

$$ f(x+y) = f(x) + \frac{y^1}{1!} f'(x) + \frac{y^2}{2!} f''(x) + \ldots\ldots + \frac{y^{r-1}}{(r-1)!} f^{(r-1)}(x) + {}_xD_{x+y}^{-r}\,\frac{d^r f(v)}{dv^r} $$

Diese Gleichung ist der Taylorsche Satz mit ausgedrücktem Rest, denn wenn wir das letzt nach Nr. 19 als Integral darstellen, wird es

$$ \frac{(-1)^{-r}}{\Gamma(r)} \int_{x+y}^{x} \frac{d^r f(v)}{dv^r} (v-x-y)^{r-1}\,dv = \frac{1}{(r-1)!} \int_{x}^{x+y} f^{(r)}(v)(x+y-v)^{r-1}\,dv $$

Soll die Reihe gelten, so müssen alle $f^{(m)}$ endlich und stetig sein, und soll sie als un convergiren, so muss ausserdem

$$ \operatorname{Lim}_{r=\infty} \left\{ {}_xD_{x+y}^{-r}\,\frac{d^r f(v)}{dv^r} \right\} = 0 $$

sein.

2. Differentiation eines Productes. Es gilt die Gleichung

$$ {}_uD_t^{\xi}\,[f(t)\ (t-x)^m] = [\xi,-1]^m\ {}_uD_t^{\xi-m} f(t) $$

für beliebige Functionen und auch für gewisse beliebige m; wir brauchen sie hier für positiv ganze $m=0$ und wollen sie für diese beweisen. Für den letzten Fall ist sie ohne Weiteres richtig, für ist sie ebenfalls aus der Definition Nr. 6 leicht herzuleiten. Angenommen nun, sie gilt für m und l Functionen, so ist

$$ {}_uD_t^{\xi}\,[f(t)\ (t-x)^{m+1}] = {}_uD_t^{\xi}[f(t)\,(t-x)^m \cdot (t-x)] $$

also wenn ich $f(t)\,(t-x)^m$ mit $\varphi(t)$ bezeichne, da sie für $m=1$ gilt,

$$ = {}_uD_t^{\xi}\,[\varphi(t)\,(t-x)] = \xi\ {}_uD_t^{\xi-1}\,\varphi(t) = \xi\ {}_uD_t^{\xi-1}\,[f(t)\ (t-x)^m], $$

d. h. wenn die Gleichung für m gilt,

$$ {}_uD_t^{\xi}\,[f(t)\ (t-x)^{m+1}] = \xi\ [\xi-1,-1]^m\ {}_uD_t^{\xi-1-m} f(t) = [\xi,-1]^{m+1}\ {}_uD_t^{\xi-(m+1)} f(t) $$

Nr. 64 gilt also, wenn es für 1 und ein m gilt, auch für $m+1$, mithin allgemein für posit m. Nun ist

$$ {}_uD_x^{\xi}\,[\varphi(x) f(x)] = {}_uD_t^{\xi}\,[\varphi(t) f(t)] = {}_uD_t^{\xi}\,[\varphi(t) f(x+\overline{t-x})], $$

wo man unter dem Zeichen D nur t als variabel anzusehen hat. Auf f wenden wir den Taylorsc Nr. 63 an, so wird

$$ {}_u^x D_x^\xi [\varphi(x) f(x)] = \sum_{m=0}^{r-1} \left\{ \frac{f^{(m)}(x)}{m!} {}_u^x D_t^\xi [\varphi(t) (t-x)^m] \right\} + {}_u^x D_t^\xi \left\{ \varphi(t) {}_x^t D_v^r f^{(r)}(v) \right\} $$

n wir nun Nr. 64 benutzen und $[\xi,-1]:m! = \binom{\xi}{m}$ setzen:

$$ {}_u^x D_x^\xi [\varphi(x) f(x)] = \sum_{m=0}^{r-1} \left\{ \binom{\xi}{m} f^{(m)}(x) {}_u^x D_x^{\xi-m} \varphi(x) \right\} + {}_u^x D_t^\xi \left\{ \varphi(t) {}_x^t D_v^{-r} f^{(r)}(v) \right\} \quad (65) $$

Das letzte Glied, den „Rest" der Reihe, könnten wir durch Integraldarstellung leicht in die Gestalt achen Integrales bringen, in der er bei Grünwald erscheint. Damit die Reihe gilt, müssen alle enden, gewöhnliche wie begrenzte, Differentialquotienten im Intervalle x bis u endlich und stetig , und damit die Reihe als unendliche convergire, muss ausserdem der Rest für $r = \infty$ verschwinden. t dies, so haben wir

$$ D_x^\xi [\varphi(x) f(x)] = f(x) {}_u^x D_x^\xi \varphi(x) + \binom{\xi}{1} f'(x) {}_u^x D_x^{\xi-1} \varphi(x) + \binom{\xi}{2} f''(x) {}_u^x D_x^{\xi-2} \varphi(x) + \ldots \text{ in inf.} \quad (66) $$

Diese Formel ist auch für positive ganze ξ sowie für $\xi = -1$ richtig, im letzteren Falle ergiebt einiger Umformung die bekannte Regel zur Integration eines Productes.

. Allgemeine Reihe. Setzt man in Nr. 65 $\varphi(x) = 1$ und $r+1$ statt r, so wird nach Nr. 42

$$ {}_u^x D_x^\xi f(x) = \sum_{m=0}^{r} \left[\binom{\xi}{m} f^{(m)}(x) \frac{(-1)^{\xi-m} (u-x)^{-\xi+m}}{\Gamma(-\xi+m+1)} \right] + {}_u^x D_t^\xi \left\{ {}_x^t D_v^{-r-1} f^{(r+1)}(v) \right\}, \quad (67) $$

iel, von der Nr. 19 nur ein Specialfall ist. Darf man die Reihe als unendliche ansetzen, so wird

$$ x) = (-1)^\xi \left\{ \frac{f(x) (u-x)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} - \binom{\xi}{1} \frac{f'(x) (u-x)^{-\xi+1}}{\Gamma(-\xi+2)} + \binom{\xi}{2} \frac{f''(x) (u-x)^{-\xi+2}}{\Gamma(-\xi+3)} - \ldots \text{ in inf.} \right\} \quad (68) $$

n wir das Intervall einführen nach einer kleinen Umformung

$$ {}_{x+s}^x D_x^\xi f(x) = \frac{(-1)^\xi}{\Gamma(-\xi)} \left\{ \frac{f(x) s^{-\xi}}{-\xi} + \frac{f'(x) s^{-\xi+1}}{-\xi+1} + \frac{f''(x) s^{-\xi+2}}{-\xi+2} + \ldots \text{ in inf.} \right\} \quad (69) $$

ergl. hiermit Nr. 11 bis 14.

Specialisirungen. $f(x) = x^\mu$, $\varphi(x) = x^\lambda$, $u = 0$ ergiebt aus Nr. 65, falls $\lambda > -1$, -1,

$$ 1)^\xi = (\mu,-1)^0 (\lambda,-1)^\xi + \binom{\xi}{1} (\mu,-1)^1 (\lambda,-1)^{\xi-1} + \binom{\xi}{2} (\mu,-1)^2 (\lambda,-1)^{\xi-2} + \ldots \text{ in inf.}, \quad (70) $$

mischen Satz" der Facultät, den Crelle zu beweisen suchte, allerdings unter Bedingungen und nur eite Art. Die Reihe ist schliesslich nichts anderes, als eine hypergeometrische. Benutzen wir die ngsweise dieser, so erhalten wir noch zur Differentiation von Potenz-Ausdrücken die Formeln

$$ \mu > -1, \quad {}_0^x D_x^\xi \{x^u (a+x)^\lambda\} = (a+x)^\lambda x^{u-\xi} (\mu,-1)^\xi F\left(-\xi, -\lambda, \mu-\xi+1, \frac{x}{a+x}\right) \quad (71) $$

$$ {}_u^x D_x^\xi x^u = (-1)^\xi \frac{x^u (u-x)^{-\xi}}{\Gamma(-\xi+1)} F\left(-\xi, -\mu, -\xi+1, 1-\frac{u}{x}\right) $$

Endlichkeit und Stetigkeit der Function im Intervalle und Convergenz der Reihen vorausgesetzt. bt dann die Differentiation der Potenz für eine Anzahl vorher noch nicht erledigter Fälle.

Differentiation der Function einer Function. Es ist

$$ {}_u^x D_x^\xi f(\psi(x)) = {}_u^x D_t^\xi f(\psi(t)) = {}_u^x D_t^\xi f(\psi(x) + \overline{\psi(t) - \psi(x)}) $$

Auf f wenden wir den Taylorschen Satz an und erhalten

$$ {}_u^x D_x^\xi f(\psi(x)) = \sum_{m=0}^{r-1} \left\{ \frac{f^{(m)}(\psi(x))}{m!} \, {}_u^x D_t^\xi (\psi(t) - \psi(x))^m \right\} + {}_u^x D_t^\xi \left\{ {}_{\psi(t)}^{\psi(x)} D_v^{-r} f^{(r)}(v) \right\} $$

Auch aus Nr. 37, womit sie eng zusammenhängt, liesse sich diese Formel herleiten, doch las uns an dem einen Beweise genügen. Ebenso soll nur erwähnt werden, dass für positiv ganze ξ die be von Hoppe zuerst gegebene endliche Reihe hervorgeht: es verschwindet dann das erste Glied und $m > \xi$ wird, auch das allgemeine Glied der Reihe.

Sechster Teil.

Schluss.

Den „reellen Differentialquotienten zu beliebigem Index“ in seiner doppelten Eigenschaft als „vo und „rückwärts genommenen“ haben wir als Grenzwert der Reihe 6γ definirt, und der Gegensatz z seinen beiden Arten beruhte darauf, dass das Increment in jenem Falle aus positiven, in diesem aus n reellen Werthen gegen die Null convergirte. Das ist aber ein ausschliessender Gegensatz nur, so l sich um reelle Grössen handelt. Das Increment h kann jedoch in den Verbindungen, in welchen es in auftritt, an und für sich betrachtet, auch complex sein, und es ist weiter zu untersuchen, was dann ge Die Definition des Differentialquotienten zu beliebigem Index behalten wir unverändert bei, es variabele Grenze das Argument x des ersten Reihengliedes, Intervall der Grenzwert $s = \mathrm{Lim}(nh$ Grenze die Summe $u = x + s = \mathrm{Lim}(x + nh)$, x kann complex sein, ebenso sind es im allgemeine s, letzteres mit derselben Amplitude wie h. Die Summation geht längs der x und u verbindenden vor sich. Ich habe über diesen allgemeinsten Begriff eingehende Untersuchungen angestellt, au Wiedergabe ich jedoch verzichten muss. Die für den reellen Differentialquotienten ohne Bestimm Richtung gegebenen Beweise und Formeln behalten dieselbe Form und Gültigkeit auch für den co

Ist nun aber in Nr. 6γ h beliebig complex, so kann man meine Definition leicht in die Grün überführen, indem man nur $-h$ an die Stelle von h treten lässt. Da das Increment auch bei G beliebig complex sein soll, so ist meine Definition wesentlich identisch mit jener, nur eine Modification d Und diese Modification halte ich für einfacher und natürlicher. Denn für $\xi = +1$ geht aus der der erste Differentialquotient in der Form

$$ \frac{df(x)}{dx} = -\lim_{h=0} \frac{f(x) - f(x+h)}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, $$

hervor, in der h beliebig complex sein (also auch einen negativen reellen Wert haben) kann, die aber j als die ursprünglichere anzusehen ist gegenüber der aus Grünwalds Definition folgenden

$$ \frac{df(x)}{dx} = \lim_{h=0} \frac{f(x) - f(x-h)}{h} = \lim_{h=0} \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}, $$

welche erst abgeleitet ist. Ueberhaupt dürfte es angebracht sein, diejenige Grösse, auf welcher alle das Increment h, im allgemeinsten Falle mit positivem Vorzeichen einzuführen, unbeschadet ihrer Specialisirungen.

Allerdings vermeidet Grünwald durch seine Wendung des Begriffes das Auftreten des Facto was für seine „Logiirung“ praktischen Wert hat, da diese eine Differentiation des Differentialquotien ξ verlangt. Doch wird hierdurch wieder die complexe Vieldeutigkeit des Begriffes nicht so über überhaupt nicht so bemerkbar. Von der Theorie des „Logiales“ kenne ich nur die Haupt-Resultat in den „Sitzungsberichten“ (siehe Seite 11) gegeben sind, nicht die Herleitung, die sich jedenfalls in

lich gebliebenen „Abhandlungen“ befindet. Doch ist es mir gelungen, auch aus meiner Definition Formeln und noch eine Reihe neuer selbstständig herzuleiten. Neu aufgestellt habe ich den Begriff valles, welcher wohl nicht unbrauchbar ist, und die Gültigkeit des Integrales Nr. 18, welches bei l nur für $\xi \leqq -1$ gilt, auch auf echt gebrochene negative Indices ausgedehnt. Die Beweise der Grünwald sich findenden Formeln sind bis auf zwei Ausnahmen neu, wie denn meine ganze Methode cipiell andere ist.

Für die complexe Differentiation bleiben vor Allem die Integraldarstellungen Nr. 16 bis 19 bestehen. Herleitung sind die vorkommenden Integrale geradlinig erstreckt. Da man aber einem Integrale, sondere Punkte vermieden werden, einen beliebigen Weg erteilen kann, so können diese ebenfalls beliebigen Curve von der einen bis zur anderen Grenze gehen, also nachträglich können wir Summation in Nr. 6γ gewissermaassen nicht auf geradlinigem, sondern auf beliebigem Wege vor-a, d. h. dem h in den verschiedenen Reihengliedern verschiedene Werte, z. B. verschiedene Amplituden, ıken, wie es Schimpf in seiner Definition anfangs thut. Was die Gültigkeit der Integrale in An-es Index ξ betrifft: so kann das Linien-Integral Nr. 16 der Herleitung nach nur für negative ξ nn es wurde dadurch gewonnen, dass man in Nr. 15 $s_1 = 0$ setzte. Ist ξ positiv, so verschwindet ${}_v^{\varepsilon}D_x^{\xi} f(x)$ nicht mehr, es wird vielmehr unendlich gross, also Nr. 16 verliert unbedingt seine Geltung. an trotzdem (ich führe die feste Grenze ein und vertausche die Integralgrenzen) das Linien-Integral leichung

$$ {}_u^x D_x^{\xi} f(x) = -\frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} \int_u^x f(t)\,(t-x)^{-\xi-1}\,dt \qquad (74) $$

ein positives ξ, das zwischen den ganzen Zahlen r und $r+1$ liegt, gelten lassen, so würde es unendlich gross werden, und indem man $(r+1)$-mal partiell integrirt und das Resultat mit Nr. 19 sieht man, dass gerade die unendlich gross werdenden Teile überflüssig sind. Dieses Unendlich-um lässt sich aufheben dadurch, dass man das Integral nicht längs einer Linie von u bis x, sondern r geschlossenen Curve von u um x herum bis wieder zu u nimmt. Allerdings darf man nicht ein-a: „für positive Indices tritt an die Stelle des Linien-Integrales ein geschlossenes“ — man muss beweisen, dass diese Modification mit den bisherigen Formeln übereinstimmende Resultate ergiebt, e sie willkürlich, wenn auch durchaus der gewöhnlichen Behandlungsweise derartiger Integrale ent-. Wir betrachten also das Integral von

$$ -\frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)} f(t)\,(t-x)^{-\xi-1}\,dt $$

en dasselbe von u längs einer Geraden bis zu einem nahe an x liegenden Werte t; dann auf einem eise in positiver Richtung ganz um x herum; schliesslich von t auf der anderen Seite der Geraden ück. Es sei $t-x = \varrho e^{i\vartheta}$, $u-x = \varrho_1 e^{i\vartheta}$, so substituiren wir: im ersten Linien-Integrale $\varrho e^{i\vartheta}$, $dt = d\varrho\, e^{i\vartheta}$, ϱ geht von ϱ_1 bis ϱ; im Kreis-Integrale $t-x = \varrho e^{i\vartheta}$, $dt = \varrho e^{i\vartheta} i d\vartheta$, ϑ geht $\vartheta + 2\pi$: im zweiten Linien-Integrale $t-x = \varrho e^{i\vartheta} e^{i2\pi}$, $dt = d\varrho e^{i\vartheta} e^{i2\pi}$, ϱ geht von ϱ bis ϱ_1. nan nun $(r+1)$-malige partielle Integration an bei allen drei Integralen, so sieht man, dass die ile des Kreis-Integrales, die für $\varrho = 0$ unendlich gross werden würden, gegen gleiche Teile der nien-Integrale sich heben und erhält

$$ \frac{1)^{\xi+m} f^{(m)}(x+\varrho_1 e^{i\vartheta})\,(\varrho_1 e^{i\vartheta})^{-\xi+m}}{\Gamma(-\xi+m+1)} - \frac{(-1)^{\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi+r+1)} \int_{\varrho_1}^{\varrho} f^{(r+1)}(x+\varrho e^{i\vartheta})\,\varrho^{-\xi+r}\,(e^{i\vartheta})^{-\xi+r+1}\,d\varrho $$

$$ -\frac{(-1)^{\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi+r+1)} \int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} f^{(r+1)}(x+\varrho e^{i\vartheta})\,(\varrho e^{i\vartheta})^{-\xi+r} d\vartheta $$

$$-\sum_{m=0}^{r}\frac{(-1)^{\xi+m}f^{(m)}(x+\varrho_1 e^{i\vartheta})(\varrho_1 e^{i\vartheta}e^{i2\pi})^{-\xi+m}}{\Gamma(-\xi+m+1)}-\frac{(-1)^{\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi+r+1)}\int_{\varrho}^{\varrho_1} f^{(r+1)}(x+\varrho e^{i\vartheta}e^{i2\pi})\varrho^{-\xi+r}(e^{i\vartheta}e^{2\pi})^{-\xi}$$

$$= (1-e^{-2i\pi\xi})\sum_{m=0}^{r}\frac{(-1)^{\xi+m}f^{(m)}(x+\varrho_1 e^{i\vartheta})(\varrho_1 e^{i\vartheta})^{-\xi+m}}{\Gamma(-\xi+m+1)}$$

$$-(1-e^{-2i\pi\xi})\frac{(-1)^{\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi+r+1)}\int_{\varrho_1}^{\varrho} f^{(r+1)}(x+\varrho e^{i\vartheta})(\varrho e^{i\vartheta})^{-\xi+m}d\varrho\, e^{i\vartheta}$$

$$-\frac{(-1)^{-\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi+r+1)}\int_{\vartheta}^{\vartheta+2\pi} f^{(r+1)}(x+\varrho e^{i\vartheta})(\varrho e^{i\vartheta})^{-\xi+r}d\vartheta.$$

Lässt man jetzt ϱ verschwinden, so verschwindet das letzte Integral, falls $f_{(x)}^{(r+1)}$ endlich i
indem man wieder x und u einführt, wird unser geschlossenes Integral zu

$$(1-e^{-2i\pi\xi})\left\{\sum_{m=0}^{r}\frac{(-1)^{\xi+m}f^{(m)}(u)(u-x)^{-\xi+m}}{\Gamma(-\xi+m+1)}+\frac{(-1)^{\xi+r+1}}{\Gamma(-\xi+r+1)}\int_{x}^{u} f^{(r+1)}(t)(t-x)^{-\xi+r}d\right.$$

Nach Nr. 19 ist aber die Klammer gleich ${}_u^x D_x^{\xi} f(x)$, mithin:

$$\xi > 0,\quad {}_u^x D_x^{\xi} f(x) = -\frac{(-1)^{\xi}}{\Gamma(-\xi)}\int_{u}^{x}\frac{f(t)(t-x^{-\xi-1}\,dt}{1-e^{-2i\pi\xi}},$$

das Integral längs einer geschlossenen Curve von u um x bis wieder zu u erstreckt. Beachtet r
Beziehungen:

$$(-1)^{\xi} = e^{i\pi\xi},\quad (e^{+iy}-e^{-iy}):2i = \sin y,\quad \Gamma(1-\xi)\Gamma(1+\xi) = (\xi\pi):\sin(\xi\pi),$$

so kann man noch schreiben:

$$\xi > 0,\quad {}_u^x D_x^{\xi} f(x) = \frac{e^{2i\pi\xi}\Gamma(1+\xi)}{2i\pi}\int_{u}^{x} f(t)(t-x)^{-\xi-1}\,dt,$$

mit demselben Integrationswege. Aus der Herleitung geht hervor, dass, wenn ξ gleich Null oder eine
ganzen Zahl ist, die geradlinig erstreckten Integralteile verschwinden, es bleibt nur ein Integral län
beliebig geschlossenen Curve um x übrig, wir erhalten die bekannte Formel

$$D_x^r f(x) = \frac{r!}{2i\pi}\int f(t)(t-x)^{-r-1}\,dt.$$

Diese Formeln 75 bis 77 waren durch Zurückgehen auf Nr. 19 gewonnen, und Nr. 19 durch id
Umformung der Definition Nr. 6γ; also fliessen unsere geschlossenen Integrale ziemlich direct aus
Definition.

Der Zusammenhang der letzteren mit den Definitionen von Most, Schimpf und von Schäw
nun hierdurch auf's klarste dargelegt. Die ersten beiden hatten die Formel für das vielfache In
nicht, wie ich, die für den vielfachen Differentialquotienten zur Gewinnung ihrer Verallgemeinerung
um auch für positive Indices geltende Integrale desselben Differentiales zu erhalten: ich habe gezeig
diese auch aus meinem, vielleicht näher liegenden, Principe zu gewinnen sind. Von Schäwen dage
von dem geschlossenen Integrale ausgegangen: da auch aus unserer Theorie auf umgekehrtem W
Gültigkeit desselben bewiesen ist, so ist die Beziehung beider Definitionen zu einander deutlich.
bemerkt, dass er dem Begriffe unserer „festen Grenze" erst bei negativen Indices begegnet, währen

i positiven der Ausgangspunkt des Integrales nicht gleichgültig ist. Wie wichtig dieser von ihm achtete Begriff aber ist, dürfte sich aus unserer ganzen Darstellung ergeben, namentlich mache ich am auf das Gesetz

$$ {}_uD_x^{\eta}\left\{{}_uD_x^{\xi} f(x)\right\} = {}_uD_x^{\xi+\eta} f(x) = {}_uD_x^{\xi}\left\{{}_uD_x^{\eta} f(x)\right\}, $$

ur dann gilt, wenn die festen Grenzen beider Differentiationen gleich sind, bei dem man also ohne ie festen Grenzen bestimmt bezeichnen muss: und dieses Gesetz dürfte, neben den Integraldar-, für praktische Anwendung der Theorie das wichtigste sein.

Was ihre praktische Anwendbarkeit überhaupt betrifft, so erinnere ich zunächst an die mannigfachen nten Beispiele Liouvilles, geometrische und mechanische Probleme behandelnd. Seine Definition vir innerhalb der unserigen auf ganz bestimmte Weise deuten, so weit also die Gültigkeitsbedingungen sind, haben die Beispiele auch für uns Richtigkeit. Von Schäwen benutzt seine Definition sofort zur on Differentialgleichungen und Grünwald hat allgemein das Gebiet bezeichnet, auf welchem die An- n sich vorzüglich bewegen würden, jedoch ohne speciellere Ausführungen. Mir ist es gelungen, ein schon (in Crelle's Journal Band I) behandeltes Problem, betreffend den Zusammenhang zwischen der nd der verticalen Fallhöhe auf Raumcurven, auf Differentiationen zum Index $\pm\frac{1}{2}$ zurückzuführen; rbaren Fälle ergaben zum Teile bekannte Resultate, verificirten also das Verfahren, zum Teile nicht ante neue Lage- und Möglichkeits-Bedingungen. Doch muss ich auf die Wiedergabe auch dieser ungen hier verzichten.

Die Definition des höheren Differentialquotienten als Grenzwert eines Ausdruckes von m $\frac{0}{0}$ hielt Liouville für sehr wenig, Riemann für gar nicht geeignet, um auf sie die Definition des alquotienten zu beliebigem Index zu basiren, auch Most und Schimpf glaubten sie nicht direct zu können, sondern wenigstens auf die vielfachen Integrale zurückgehen zu müssen: ich habe wohl ass sie in der That brauchbar ist, dass dieser Weg, den Grünwald zuerst betreten hat, in der That zu n Begriffe sicher führt, alle seine Eigenthümlichkeiten zu entwickeln, alle in dieses Gebiet schlagenden vollem Umfange zu beantworten gestattet.

VITA.

atus sum Karolus Theodorus Martinus Bochow in oppido Luckau Lusatorum a. d. IV. Kal. ii MDCCCLXI patre Martino matre Augusta de gente Unruh. Fidei addictus cum evangelicae et primis elementis imbutus in scholis et gymnasio oppidi patrii.

einde me contuli ad studium rerum mathematicarum, physicarum, naturalium in universitatibus literariis er duo, Berolinensi et Halensi per quaterna semestria. Quo tempore interfui scholis, exercitationibus seminario mathematico virorum doctissimorum Hankel, Meyer, Herrmann, Kolbe, Bruhns, Hoppe, Bruns, Wangerin, Jessen, Hettner, Kayser, Grenacher, Oberbeck, Cantor, Erdmann, Haym, Zopf, Lüdecke. Quibus omnibus gratias ago; maximas viro illustrissimo quem cum ceteris meis studiis praefuisse, tum in hoc opusculo liberaliter et benevole consulendo et me adjuvasse numquam obliviscar.

THESEN.

I.

Das Urtheil Liouvilles über Eulers Definition des Differentialquotienten zu beli
Index, „que ses raisonnements ont quelque chose de vague et incomplet“, ist nicht bere

II.

Das Vorhandensein unserer Geometrie ist kein Beweis für die Apriorität
Raumes.

III.

Wenn man von einer „nullten Dimension“ sprechen will, so ist darunter nic
Punkt zu verstehen, sondern eine Grösse, welche die Richtung angiebt.

Ueber eine veränderte Form der Bedingung für die Integrirbarkeit der Functionen.

(Von Herrn *Paul du Bois-Reymond* in Tübingen.)

Im Art. II meines Aufsatzes: *Versuch einer Classification der willkürlichen Functionen etc.* (dieser Band, pag. 21) habe ich versucht den der Theorie der bestimmten Integrale zu Grunde zu legenden Begriff scharf zu kennzeichnen. Ich fühle indessen, dass die Art, wie das Criterium der Integrirbarkeit formulirt wurde, etwas zu wünschen übrig lässt.

Es seien a und b constant, ferner sei $b-a=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n$, und σ_p sei die grösste positiv genommene Werthdifferenz der Function $f(x)$ im Intervall δ_p, so ist — heisst es a. a. O. — die Function $f(x)$ im Intervall $(a\ldots b)$ integrirbar, wenn der $\lim_{n=\infty}(\delta_1\sigma_1+\delta_2\sigma_2+\cdots+\delta_n\sigma_n)=0$ ist. Hier kann aber bemängelt werden, dass nicht deutlich gesagt ist, ob unter dem Intervalle δ_p verstanden ist:

$$a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{p-1}\leqq x<a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_p$$

oder

$$a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{p-1}<x\leqq a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_p$$

oder

$$a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{p-1}\leqq x\leqq a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_p$$

oder endlich, ob die drei Annahmen auf Eins hinauslaufen, ja ob der Spielraum des Arguments von $f(x)$, aus welchem die Differenz σ geschöpft wird, nicht noch erweitert werden kann, ohne dass von der Function $f(x)$ mehr wie die Integrirbarkeit verlangt wird. Diese Lücke wird durch folgenden Satz ausgefüllt:

Es sei vorgelegt irgend eine Eintheilung in Intervalle

$$b-a=\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_m,$$

und das Gesetz, nach welchem bei unbegrenzter Vermehrung der δ sie schliesslich alle verschwinden. Ferner sei σ_p die grösste positiv genommene Werthdifferenz von $f(x)$ im Intervall

$$a+\delta_1+\cdots+\delta_{p-1}\leqq x<a+\delta_1+\cdots+\delta_p.$$

Weiter sei

$$b-a=\delta'_1+\delta'_2+\cdots+\delta'_n$$

irgend eine andere Zerlegung von $b-a$ in Intervalle, und es werde unter σ'_p die grösste positiv genommene Werthdifferenz von $f(x)$ im Intervall:

$$a+\delta'_1+\cdots+\delta'_{p-1}-\Delta'_p<x<a+\delta'_1+\cdots+\delta'_p+\Delta''_p$$

verstanden, wo Δ'_p und Δ''_p irgend Grössen vorstellen, die mit δ_p zugleich verschwinden: alsdann behaupte ich, dass $\lim_{n=\infty}\Sigma\delta'_p\sigma'_p$ verschwinden muss, wenn $\lim_{n=\infty}\Sigma\delta_p\sigma_p=0$ ist. Das Umgekehrte ist a fortiori der Fall.

Beweis. Wir behalten die Voraussetzungen und Bezeichnungen des Satzes bei, und nehmen n soviel grösser als m an, dass das grösste unter den δ' beliebig viel kleiner als das kleinste unter den δ sei. Ferner setzen wir:

$$\begin{aligned}
x_p &= a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_p,\\
x_{r_p} &= a+\delta'_1+\delta'_2+\cdots+\delta'_{r_p},\\
x_{s_p} &= a+\delta'_1+\delta'_2+\cdots+\delta'_{s_p},\\
x'_{r_p} &= a+\delta'_1+\delta'_2+\cdots+\delta'_{r_p}-\Delta'_{r_p},\\
x'_{s_p} &= a+\delta'_1+\delta'_2+\cdots+\delta'_{s_p}+\Delta''_{s_p}.
\end{aligned}$$

Hierin bestimmen wir r_p und s_p so, dass

$$x'_{r_p}\geqq x_{p-1},\quad x'_{s_p}<x_p,$$

und dass x'_{r_p}, x'_{s_p} resp. die kleinste und die grösste Grösse ihrer Gattung ist, die den vorstehenden Ungleichheiten genügen. Falls n hinreichend gross ist, wird das Intervall

$$(x'_{r_p}\leqq x\leqq x'_{s_p})$$

und a fortiori dieses:

$$(x_{r_p}\leqq x\leqq x_{s_p})$$

dem Intervall $(x_{p-1}\leqq x<x_p)$ angehören, und durch fernere Vergrösserung von n werden die Unterschiede:

$$x_p-x_{s_p},\quad x_{r_p}-x_{p-1}$$

beliebig klein gemacht werden können.

Wir wollen noch mit τ_o, τ_p, τ_m bezeichnen die Intervalle:

$$\begin{aligned}
\tau_o &= x_{r_1}-a,\\
\tau_p &= x_{r_{p+1}}-x_{s_p},\\
\tau_m &= b-x_{s_m},
\end{aligned}$$

und können nach diesen Vorbereitungen unseren Beweis führen, wie folgt:

Zunächst ist jedenfalls:

$$\delta'_{r_p}\sigma'_{r_p}+\delta'_{r_p+1}\sigma'_{r_p+1}+\cdots+\delta'_{s_p}\sigma'_{s_p}\leqq\delta_p\sigma_p,$$

da keine der Grössen $\sigma'_{r_p}\ldots\sigma'_{s_p}>\sigma_p$ sein kann, indem σ_p die grösste Differenz der Werthe $f(x)$ im Intervall $x_{p-1}\leqq x<x_p$ ist, und die $\sigma'_{r_p}\ldots\sigma'_{s_p}$ grösste Differenzen von $f(x)$ in Theilen dieses Intervalls vorstellen. Wegen

$$\tau_p=\delta'_{s_p+1}+\delta'_{s_p+2}+\cdots+\delta'_{r_p+1}$$

können wir setzen:

$$\delta'_{s_p+1}\sigma'_{s_p+1}+\delta'_{s_p+2}\sigma'_{s_p+2}+\cdots+\delta'_{r_{p+1}}\sigma'_{r_{p+1}}=\tau_p\sigma^*_p,$$

wo σ^*_p eine endlich bleibende Grösse. Somit haben wir die Umformung:

$$\sum_{p=1}^{p=n}\delta'_p\sigma'_p=\sum_{p=1}^{p=m}\{\delta'_{r_p}\sigma'_{r_p}+\delta'_{r_p+1}\sigma'_{r_p+1}+\cdots+\delta'_{s_p}\sigma'_{s_p}\}+\sum_{p=0}^{p=m}\tau_p\sigma^*_p.$$

Die erste Summe rechts, die nach dem Vorigen

$$\leqq\sum_{p=1}^{p=m}\delta_p\sigma_p$$

st, wird Null, wenn m unendlich wird; die zweite Summe:

$$\sum_{p=0}^{p=m}\tau_p\sigma^*_p=[\sigma]\sum_{p=0}^{p=m}\tau_p$$

ann, indem n beliebig viel grösser als m angenommen wird, beliebig klein emacht werden. Nichts hindert uns z. B. n so gross anzunehmen, dass as grösste unter den

$$\tau_p<\frac{b-a}{m^2}$$

ei. Dann ist aber auch

$$[\sigma]\sum_{p=0}^{p=m}\tau_p<[\sigma]\frac{b-a}{m},$$

id wegen der Endlichkeit von $[\sigma]$ verschwindet mit wachsendem m auch e zweite Summe in obiger Umformung. Also ist in der That

$$\lim_{n=\infty}\sum_{p=1}^{p=n}\delta'_p\sigma'_p=0.$$

(E. D.

Der Nutzen dieses Satzes besteht besonders darin, dass man grösseren Sielraum gewinnt für die Intervalle, aus denen die Werthdifferenzen σ der Function $f(x)$ geschöpft werden, ohne dass man dabei befürchten müsste, v1 der Function $f(x)$ mehr wie die Integrirbarkeit zu verlangen.

Die neue Form der Bedingung der Integrirbarkeit ist somit:

Im Intervall $a \ldots b$ ist die Function $f(x)$ integrirbar, wenn, unter σ_p die grösste Differenz der Functionalwerthe $f(x)$ im Intervall

$$a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_{p-1}-\Delta_p' < x < a+\delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_p+\Delta_p'$$

verstanden, wo Δ_p', Δ_p'' mit δ_p Null werden, die Summe

$$\delta_1\sigma_1+\delta_2\sigma_2+\cdots+\delta_n\sigma_n$$

die Null zur Grenze hat, sobald alle δ in

$$b-a = \delta_1+\delta_2+\cdots+\delta_n$$

verschwinden.

Tübingen im October 1874.

(Abdruck aus dem „Journal für die reine und angewandte Mathematik", Bd. 79.)
(Gedruckt bei Georg Reimer in Berlin.)

ZUR GESCHICHTE

DER

TRIGONOMETRISHEN REIHEN

EINE ENTGEGNUNG

VON

PAUL DU BOIS-REYMOND

TÜBINGEN
VERLAG DER H. LAUPP'SCHEN BUCHHANDLUNG.

DRUCK VON H. LAUPP IN TÜBINGEN.

1.
Einleitung.

Unter dem Titel: Versuch einer Geschichte der
stellung willkürlicher Functionen einer Va-
beln durch trigonometrische Reihen ist in
ster Zeit die Dissertation eines Doctoranden an der philo-
ischen Facultät zu Göttingen erschienen und verbreitet
en, die, so weit sie meine Betheiligung an den Fort-
tten jener Theorie anbelangt, zwar in einem Punkte
tändniss zeigt *), übrigens aber durch systematische Ver-
eigungen, weiter, indem sie eine längst von mir erledigte
tfrage wieder hervorholt, um darin eine beschränkte Auf-
ng nachträglich zur Geltung zu bringen, endlich durch
völlig sinnlose Bemängelung meines Integralbegriffs mich
gt, ihren Aufstellungen, wohl bemerkt, nur wo sie gegen
gerichtet sind, entgegenzutreten.

Freilich, stünde hinter der Schrift nur ihr Titel - Autor
wäre sie keine Dissertation, so könnte ich mir diese Mühe
n. Man vermisst, wenn man sie zur Hand nimmt, so-
ı jene Schärfe der Begriffe, jenes Zusammenwirken von

*) In der Frage nach den allgemeinsten Bedingungen, unter wel-
die Coefficienten der trigonometrischen Reihe in die bekannte
alform sich bringen lassen. Hr. O. Stolz hat indessen schon
richtig erkannt, um was es sich handelt (Jahrbuch üb. d.
hr. d. Math., 1876, VIII, 128).

Freiheit und Vorsicht des Denkens, ohne welches man diesem heiklen Gebiet nur zu leicht falsche Vorstellungen bildet und auf Irrwege geräth.

Um ein Beispiel von der Metaphysik der Dissertation geben, so stellt sie sich im Hinblick auf die sprungwe Werthänderungen der Functionen die Frage: Was soll verstehen unter: »Die trigonometrische Reihe stellt eine Fu tion dar«? Die trigonometrische Reihe nimmt bekannt in den Sprungstellen den Mittelwerth der angrenzenden We an. Die Functionen im Allgemeinen, die doch lediglich schriften sind, durch welche den numerischen Werthen Arguments numerische Werthe der Function zugeordnet den, unterliegen überhaupt keiner Beschränkung, also nicht jener, in den Sprungstellen den Mittelwerth $\frac{1}{2}f(x+$ $\frac{1}{2}f(x-o)$ zu erhalten. Daraus ergiebt sich, dass eine Funct wenn sie in einem Intervall keine Sprungstelle hat, möglic weise für jeden Punct dieses Intervalls durch eine trig metrische Reihe dargestellt werden kann. Hat sie deren kann sie in den Sprungstellen nur dann dargestellt wer wenn sie dort den Mittelwerth annimmt. Weiter lässt darüber natürlich Nichts sagen. Die Function ist, wie ist, und die Reihe auch. Eine Function, die nur in ver zelten Puncten durch die Reihe nicht wiedergegeben w ist eben bis auf diese Puncte darstellbar. Eine durch unstetige Function wird z. B. in unzähligen Puncten stellbar sein können, in unzähligen nicht. Das scheint son klar. Der Dissertation genügt dies jedoch nicht, sonder macht Vorschläge (pag. 15), um der Darstellbarkeit der F tionen durch trigonometrische Reihen ein weiteres Gebie eröffnen. Da an der Reihe Nichts zu ändern ist, so soll Function sich fügen, und fortan den Sprungwerth stet

vorschriftsmässigen Stelle tragen. Stellen wir uns aber die wissenschaftliche Welt einer Epoche beschliesse wirk- eine Zuordnung nur dann Function zu nennen, wenn Sprungwerth an die vorgeschriebene Stelle gebracht ist, ass alle Functionen, um als solche der Analysis angehören ürfen, diese Operation sich gefallen lassen müssen. Wenn aus dem so zugerichteten Calcül einmal eine Function orginge, bei welcher der Sprungwerth doch wieder an eine he Stelle käme, und wenn gerade dieser Sprungswerth ire, der das Problem löst, welche Verlegenheit! Entweder renkt ihn vorschriftsmässig ein, dann ist die Lösung falsch, man lässt ihn gelten, dann ist das Princip durchbrochen. Keineswegs spasshaft scheint es mir aber, dass die Dis- tion, die eine historische sein will, hierbei noch oben- auf Riemann sich beruft *).

Angesichts so merkwürdiger Reformvorschläge könnte ich, gesagt, die Angriffe jener Schrift auf sich beruhen lassen. ss hat jeder publicirende Gelehrte auf eine Reihe von genossen Rücksicht zu nehmen, welche bei der mit jedem mehr gebotenen Trennung der Forschungsrichtungen sei- Jntersuchungen fremd bleiben und sich kein selbstständiges eil darüber bilden können, an deren Achtung ihm jedoch gelegen ist. Sie würden sich indessen wohl sagen, dass abstracten Dingen die tiefere Einsicht an der Seite rfolges zu suchen ist, und würden in diesem Urtheil den zuversichtlich-absprechenden Ton der Schrift sich rlich beirren lassen.

Allein diese Schrift ist eben eine Dissertation, und als solche mit einer gewissen Autorität auf. Hinter ihr

*) Riemann soll sich am Vorschlag der Dissertation betheiligen: melte Schriften pag. 223.

steht eine sie mit ihrem Ansehen deckende und ihre Verb
tung zu erheblichem Theil übernehmende Behörde.
hat also gewissermassen amtlichen Charakter. Aus die
Grunde pflegen Facultätsreferenten ihren Facultäten ni
gern Streitschriften über controverse Fragen zur Annahme
empfehlen, geschweige Angriffsschriften, die gegen Pro
soren anderer Universitäten gerichtet sind.

Selbst wenn der Referent völlig im Rechte wäre,
die streitigen Behauptungen sich grosser Actualität
freuten, so würde solcher Schritt noch immer höchst un
wöhnlich erscheinen. Man würde sich billig fragen, wa
für die Veröffentlichung nicht ein neutraler Ort vorgezo
worden sei, und da man von dem Referenten doch wohl
aussetzen müsste, er werde nur im Einverständniss mit
Sachverständigen seiner Facultät *) und mit gutem Bed

*) Von Hrn. Prof. Amandus Schwarz, unter dessen Auspi
diese Dissertation veröffentlicht wurde, ist indessen vor deren Ersche
eine ihren Inhalt betreffende Eröffnung an seine Fachgenossen in
Facultät nicht gemacht worden, wie diese Herren auf meine Anf
mir mitzutheilen die Güte hatten. Auch wurde mir geschrieben,
ihnen auf Grund der besonderen an ihrer Facultät bestehenden Ein
tungen keine Gelegenheit geboten war, vor dem Druck von der A
Kenntniss zu nehmen.

Es sei mir gestattet, hier noch einmal zu betonen, wie bedenl
es ist, Dissertationen polemischen Charakters, besonders gegen Coll
gerichtete zuzulassen.

Der Angegriffene befindet sich offenbar in ähnlicher Lage, wie
von Insulten durch die Tagespresse Betroffener, der nicht weiss,
wem er es eigentlich zu thun hat, mit dem Sitzredacteur, dem
redacteur oder ihm bekannten Mitarbeitern des Blattes. Er wäre
schieden befugt, zunächst von der Facultät Erklärungen zu verlar
die ihr doch immerhin peinlich sein müssten. Diese würde natü
an ihren Berichterstatter sich halten, der ihr gegenüber verant
lich ist. Die Facultät aus dem Spiele lassend, hat weiter der von
Dissertation angegriffene Autor, selbst wenn es sich herausstellen s
dass der Titel-Autor auch intellectueller Urheber der Streitschrift

Angriffsschrift zu dem nicht zu läugnenden Nachdruck
r Inauguraldissertation verholfen haben, so läge der Schluss
, dass ihr grosses Gewicht beizulegen sei. Kurzum es
ten Fachgenossen auf dergleichen Erwägungen hin die
tellungen jener Dissertation unbesehen für ebenso be-
det halten, als sie es thatsächlich nicht sind. Und ge-
dieser Umstand nöthigt mir eine Erwiderung ab, deren
schon um von meiner Zeit einen mir erspriesslicher schei-
en Gebrauch machen zu können, gern wäre überhoben
sen.

Wie es nun eben geht, aus der kurzen Abfertigung, die
unächst beabsichtigte, wurden umständlichere Auseinan-
tzungen; ich fand die Gelegenheit einladend, nachdem
o lange Nichts über die Theorie der Darstellungen ver-
licht, einen Ueberblick zu geben über meine bisherigen
rsuchungen in diesem Gebiet, die ich nun gleichsam aus
erne besser übersehen konnte, und namentlich die seither

---

ein volles Recht nicht allein gegen diesen, sondern auch gegen
erichterstatter der Facultät sich zu wenden, der ja für die Dis-
on eingetreten ist.

t die Dissertation vollends gegen einen Collegen gerichtet, und
benützte seine Stellung, um seinem Unmuth Luft zu machen,
er z. B. gleichfalls ein Stück Tendenzgeschichte als Dissertation
e, wie widerwärtig könnte ein solcher Streit ausarten!

n nun zu meinem Fall zurückzukehren, so unterliegt es für mich
Zweifel, nach genauer Prüfung des Inhalts der Dissertation
ch Allem, was mir sonst über diese Angelegenheit zu Ohren ge-
n ist, dass ich dem Titel-Autor Unrecht thun würde, wenn ich
Vertheidigung gegen ihn, oder doch besonders gegen ihn rich-
Mitschuldiger ist er gewiss. Ich ziehe jedoch vor, die Autorfrage
r Hand auf sich beruhen zu lassen, und da ich keinen andern
habe, als den, mich meiner Haut zu wehren, so betrachte ich
te die Dissertation lediglich in abstracto als meinen Gegner,
le sie also gleichsam als eine pseudonyme Schrift.

für die Darstellbarkeit der Functionen aufgefundenen Bed
gungen zu erörtern. Ich hatte dergleichen Bedingungen
mehreren Abhandlungen mitgetheilt, mir eine eingehende I
cussion des von Andern und von mir in dieser Richtung E
deckten auf eine später zu veröffentlichende vollständige I
stellung der Theorie versparend. Dem nun greife ich
ein wenig vor, indem ich schon jetzt eine kurze vergleiche
Uebersicht über die Gültigkeitsbedingungen mittheile.

Eine ausführliche Critik der Dissertation liegt entf
nicht in meiner Absicht. Viel weniger mühsam wäre es
mich, gleich selbst die Geschichte der Fourierschen Rei
zu schreiben. So verschieden ist meine Auffassung, dass
fast keine Seite unterschreiben würde. Ich habe es hier,
Eingangs bemerkt, nur mit ihren mich persönlich angehen
Verschweigungen und Angriffen zu thun.

Was jene anlangt, so stehen sie mit dem äusseren I
der Geschichte in gewissem Zusammenhang. Auf ihn will
zunächst etwas eingehen. Indem ich sodann die allgeme
Grundzüge der Geschichte der trigonometrischen Reihen,
sie meiner Vorstellung sich eingeprägt hat, zu entwerfen
suche, wird das System der Verschweigungen deutlich
vortreten.

2.

lgemeine Grundzüge einer Geschichte der trigonometrischen Reihen.

Die Dissertation erzählt die Geschichte der trigonometrin Reihen so, als ob es in ihrem Plane liege, sie volldig zu sondern von der Theorie allgemeinerer analytischer nen, mit denen sie jedoch im engsten Zusammenhang en, und deren mit keiner Sylbe Erwähnung geschieht.

Solche Trennung mag formal ausführbar, ja praktisch inen, in Wirklichkeit ist sie aber unnatürlich, und beächtigt wahre Einsicht. Wer möchte z. B. die Topohie einer binnenländischen Provinz behandeln, als wäre ine Insel, unter systematischem Ausschluss ihrer Beziegen zum Angrenzenden! Es müsste, um nur Eines zu ernen, ein Fluss, der die Grenze mehr als zweimal übereitet, mehr als einmal unter den Flüssen der Provinz aufhlt werden. So kann es auch nicht das richtige Ver- en sein, um den Entwickelungsgang der Theorie der trimetrischen Reihen zu beschreiben, sie loszulösen von den seren Gebieten, zu denen sie gehört. Der allgemeine Be- von darstellenden Formeln, welchen ich in mehreren Abllungen auszubilden bestrebt war, sollte gerade von hö- m Standpunct aus einen besseren Einblick in den Inhalt speciellen Formeln gewähren, wie es denn alltägliche Er-

fahrung ist, dass man das Besondere erst vom Allgemei
aus richtig versteht.

An den trigonometrischen Reihen als solchen ist von
teresse, nur was aus ihrer eigenthümlichen Zusammensetzu
entspringt. Was sie mit unzähligen anderen Formeln gem
haben, ist von Interesse eben für die gemeinsame Form, a
nicht für die trigonometrischen Reihen im Besondern. E
weise Beschränkung ist es daher wohl kaum zu nenn
wenn man in einer Geschichte der Fourierschen Reihen
von allem mit ihr Zusammenhängenden loslöst.

Ich vergass hervorzuheben, dass ich hier unter Geschic
nicht ein blosses Anführen der erschienenen Schriften
ihres Inhaltes verstehe, sondern jene durchleuchtete Schil
rung der Fortentwickelung des wissenschaftlichen Gedank
der, einem köstlichen Stoffe vergleichbar, zwar beständig du
die Arbeit der Forscher erzeugt wird, leider jedoch nur
geringen Procenten in der verbrauchten Druckerschwärze e
halten ist. Ihn zu sammeln und in ein würdiges Gefäss zu füll
ist die mühevolle und edle Aufgabe des Geschichtsschreib

Als Geschichtsschreiber der Fourierschen Reihen, würde i
jenes Ziel verfolgend, zunächst zwei Aufgaben vor mir seh
Einmal gälte es den geistigen Kampf der vor Fourierscl
Epoche zu verstehen. Er setzt die Entdeckung des eigentlic
Wesens der darstellenden Formeln durch Fourier und i
Ausdehnung auf andere Gebiete durch Laplace in das rec
Licht. Hiermit gelangt die physikalische Periode
Geschichte der darstellenden Formeln, wie man sie nenn
kann, der Hauptsache nach zum Abschluss. Die Metho
sind gewonnen, sie werden weiter ausgebildet, auf neue P
bleme angewandt, doch der Grundgedanke bleibt derselbe.

Die zweite Aufgabe ist die Schilderung der mathem

hen Periode der Theorie. Ihr Ziel ist die streng lo-
ne Begründung der durch die Arbeiten der ersten Periode
onnenen Formeln und Sätze. Sie wird nach einigen er-
rmen Anläufen eröffnet durch Lejeune-Dirichlet,
führt durch zahlreiche Untersuchungen zur heutigen Lehre
den Darstellungsformeln. Bei der Geschichtsschreibung
r zweiten Periode würde ich, wenn es sich nur um die
ierschen Formeln handeln soll, dem oben Gesagten ent-
chend, zu unterscheiden bestrebt sein zwischen dem was
seren Classen darstellender Formeln angehört, und dem was
Fourierschen Darstellungen eigenthümlich ist.

Zum Letzteren gehören einmal die Untersuchungen, die
mit dem Bau der Reihe rechts in:

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots$$

den aus ihr durch Integration und Differentiation ent-
enden Reihen beschäftigen, dann aber die Untersuchungen,
he mehr der dargestellten Function $f(x)$ links in jener
iel gewidmet sind, also namentlich, wenn sie die Bezie-
gen zwischen der Summengrenze und den Coefficienten
ffen. Zwar lässt sich diese Eintheilung weder sachlich
chronologisch völlig scharf durchführen, doch gewährt
m Allgemeinen eine gute Uebersicht.

Ueber die gliedweise Integration besitzen wir nur die
annsche Habilitationsschrift, welche werthvolle dorthin
rige Sätze enthält. Die durch einmalige Integration der
nometrischen Reihen erhaltenen Reihen sind in der Li-
ur, so viel ich weiss, bis jetzt ohne Erörterung geblieben,
ich benütze den Anlass, um anzukündigen, dass ich über
n Gegenstand gearbeitet habe, und zu mittheilens-
ien Ergebnissen gelangt bin. Er steht in enger Bezie-

hung zum allgemeinen Problem über die gliedweise Integ barkeit der Reihen. Die angekündigten Resultate gelten, weit sie trigonometrische Reihen betreffen, lediglich für F riersche Reihen*), oder doch für solche trigonometrische Reih deren Summe in einem Intervall integrirbar ist, die sich a gleichfalls, wie ich bei dieser Gelegenheit fand und ber veröffentlicht habe, in die Fouriersche Form bringen lass

In diesen Theil der Theorie gehört auch, was über Differenzirbarkeit u. dergl. an den Tag gebracht ist, wobei a ebenfalls Fouriersche Reihen zu Grunde gelegt werden, e lich auch die genauere Untersuchung ihrer Coefficienten.

Tritt nun weiter die darzustellende Function links in

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2y+\ldots$$

in den Vordergrund, so bieten sich hier, wie in allen äl lichen Fällen, zuerst die beiden Fragen dar: nach dem stimmtsein der Darstellung durch die darzustellende Funct (was man auch wenig zutreffend Eindeutigkeit der Darstellu nennt) und nach der Beschaffenheit der Reihensumme $f($

*) Wir wollen auch hier vom allgemeinen Gebrauch uns nicht fernen, indem wir unter trigonometrischen Reihen überhaupt Rei der Form:

$$f(x)=a_0+a_1\cos x+a_2\cos 2x+\ldots$$
$$+b_1\sin x+b_2\sin 2x+\ldots$$

verstehen, und sie Fouriersche Reihen nennen nur wenn bedeutet v den soll, dass die Coefficienten in die Form

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha),\quad a_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha)\cos p\alpha,$$
$$b_p=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}d\alpha f(\alpha)\sin p\alpha$$

gebracht sind (Abhandl. d. K. bayer. Akad. d. W. II. Cl. XII. Bd. Abth. pag. V.).

he die oben angeführte Bestimmung der Coefficienten auf sse Integrale gestattet.

Was den Bericht über die einschlägigen Untersuchungen ngt, so muss in ihm äusserst sachliche Strenge walten. ı wir forschen hier weitab von den Strebungen der Praxis, he aus diesen Subtilitäten für's Erste keinen Vortheil en wird, ja zum Theil befinden wir uns auf metaphy- nem oder wie man es jetzt nennt, metamathematischem en. Jedenfalls ist das Interesse an solchen Forschungen rein abstractes, und wenn über sie nicht völlig genau chtet wird, so hat der Bericht keinen theoretischen Werth, da er eben keinen practischen besitzt, so hat er gar en Werth. Der Historiker darf z. B. nicht übersehen, aus der Coefficientenbestimmung die Bestimmtheit der tellung nur bedingt folgt, da die Coefficienten-Integrale agen, wenn $f(x)$ nicht integrirbar ist. Aus Hrn. G. Can- s und meinen Untersuchungen ergiebt sich, dass hierauf er That Rücksicht genommen werden muss. Gerade durch feineren Unterscheidungen wird die Forschung an die nometrischen Reihen gefesselt, während jene beiden Fragen unzähligen Reihen gestellt werden, und bei den meisten, n man eben von den feineren Unterschieden absieht, ein ches sich ergiebt wie bei den trigonometrischen Reihen, es nämlich für ein und dieselbe Function nur eine Ent- elung nach einem gewissen Formelement giebt, und dass Coefficienten durch gewisse Integrale über ein Intervall dargestellten Function sich ausdrücken lassen.

Der dritte Hauptgegenstand der Forschung über die tri- nometrischen Reihen ist die Frage, welche Eigenschaften Function besitzen müsse, um durch eine trigonometrische ie darstellbar zu sein, oder, richtiger ausgedrückt, welchen

Beschränkungen man zu diesem Zweck den allgemeinen Fun
tionsbegriff unterwerfen müsse. Diese Frage zerfällt in ei
allgemeinere, wo über die Function von vornherein Nich
vorausgesetzt ist, namentlich nicht ihre Integrirbarkeit,
welchem Falle die trigonometrische Reihe nicht in die Fo
rier'sche Form gebracht werden kann. Ausser einig
Stellen bei Riemann ist schwerlich über diesen allgemein
Fall etwas an die Oeffentlichkeit gedrungen. Die bisherig
Untersuchungen über die Gültigkeit der trigonometrisch
Entwickelung fassten das Problem enger auf und setzen v
allen Dingen die Integrirbarkeit der darzustellenden Functi
und die Fouriersche Form der Reihe voraus.

Der Zeit nach begann mit der Forschung über dies
Gegenstand die mathematische Periode der Entwickelung d
Theorie, und zwar, wie angedeutet, mit Dirichlets berufen
Note im IV. Bde des Crelleschen Journals im Jahre 1829. D
Ziel der Mathematiker war damals zwar zunächst zu beweise
dass die Fouriersche Reihe gegen den Werth der darzustelle
den Function convergirt, aber dies läuft wesentlich auf da
selbe hinaus, wie die Aufstellung von solchen Beschränkunge
für die Function $f(x)$, unter denen sie entwickelbar ist, d
ohne dergleichen Beschränkungen der Beweis eben nicht ge
führt werden kann.

Dirichlets Beschränkung, welche ich die Dirichletsch
Bedingung genannt habe*), bestand darin, dass die Function i
dem Intervall, in welchem sie darstellbar sein soll, nur ein
endliche Anzahl Maxima besitzen dürfe. Längere Zeit wa
der mathematische Erkenntnisstrieb durch das Dirichletsch
Resultat und den Weg, auf dem es erhalten wurde, befriedig

*) Borch. Journal, Bd. 79, pag. 33.

t 35 Jahre nach Erscheinen der Dirichletschen Note wird Forschung über die Gültigkeitsbedingungen für die Fousche Darstellung wieder aufgenommen. Hr. Lipschitz ersucht, ob Dirichlets Bedingung, die offenbar nur geführt war, um das augenfälligste Ergebniss sogleich er Frage zu stellen, durch seine Analyse wirklich gefordert Es ergiebt sich, dass Dirichlets Calcül dem Gedurch Fouriersche Reihen darstellbarer Functionen erlich weitere Grenzen gestattet, als die von ihm aufgelte Bedingung.

Die Arbeiten, durch welche sodann ich an diesen Forngen mich betheiligte, hatten zunächst ganz andere Ziele. trotz seiner unvergleichlichen Feinheit immerhin besonders Docenten fühlbare Umständlichkeit des Dirichletschen eises, der geheimnissvolle Grenzfall der Fourierschen ien, den man die Fouriersche Formel nennt, welcher mir Schlüssel zu der ganzen Theorie zu sein schien, worin ich ı denn auch nicht getäuscht habe, vor allen Dingen aber Gewissheit, dass die Grenzausdrücke der Lösungen parer Differentialgleichungen den Fourierschen Darstellungen ähnliche Eigenschaften zeigen müssen, was in zahlreichen elfällen schon bestätigt ist: Alles dies reizte mich, den ren Zusammenhang dieser analytischen Erscheinungen aufchen, einfache und allgemeine Integralsätze als ihre gesame Grundlage aufzudecken. Das Ergebniss war, dass Fouriersche Darstellungsart, soweit Dirichlet ihr Strenge eilt hatte, ein sehr specieller Fall in der That höchst allseiner Integralsätze ist. Um den Beweis hierfür zu leisten, ıte ich mich nicht der Zerlegung bedienen, welche Dilet auf das Integral anwendet, in welches er die n ersten ler der Fourierschen Reihe zusammenfasst. Das neue Be-

weisverfahren, welches die allgemeinen Sätze heischten, na
die Form eines neuen Mittelwerthsatzes an, von dem sc
viel geschrieben worden ist, und den ich bei dieser Geleg
heit nachdrücklichst für mich in Anspruch nehme *).

Mit Hülfe dieses Satzes beweist man in wenigen Ze
die allgemeinen Sätze, von denen der Dirichet'sche ein
sonderer Fall ist, und zwar unter den nämlichen Bedingun
für die darzustellende Function, welche er zu Grunde le
und die für die Anwendungen vorläufig genügen werden.

Mich fesselte aber die Theorie, und so sah ich kein
deres Ende des Nachdenkens über diesen Gegenstand vor
als bis ich in Betreff der Bedingungen für die Darstellb
keit zu endgültigen Aufschlüssen über folgende Punkte
langt sein würde. Es handelte sich um die Gültigkeits
dingungen für die allgemeinen Formeln, welche den Four
schen analog sind, und von den für diese im Besonderen
tenden. Hinsichtlich letzterer war die Hauptfrage, wo für
die Grenze der Gültigkeit zu suchen sei, ob schon innerh
der stetigen Functionen, oder in unserer Vorstellung en
generen Regionen der Functionenmannigfaltigkeit. Als let
Ziel leuchtete mir die Aufstellung einer nicht allein aus
chenden sondern nothwendigen Bedingung für die Darstellb
keit durch Fouriersche Reihen. Diese Probleme sind beh
delt in einer Reihe von Arbeiten, wo sie zu gutem Ende
führt sind. Eine nothwendige Bedingung für die Darst
barkeit durch Fouriersche Reihen habe ich allerdings n
gefunden, aber ich habe an besonderen Functionsklassen
zeigt, was sie Alles leisten müsste, wodurch die Exist
einer solchen Bedingung in Frage gestellt ist.

*) Im Anhang erörtere ich diese Prioritätsfrage, um sie, v
möglich aus der Welt zu schaffen.

Von diesen Untersuchungen ist in der Dissertation fast
ne Erwähnung geschehen, sie hebt nur die Aufstellung
iger doch nichtdarstellbarer Functionen hervor.

Der Umfang des Verschweigungsgebiets erscheint unter
aussetzung zweier Motive vollkommen bestimmt. Es sind
e: Erstens trägt man Scheu, die Prioritätsfrage in Betreff
zweiten Mittelwerthsatzes zu berühren. Zweitens will
vermeiden, gegenüber den neuen Zeichen $\succ \sim \prec$, und
daran sich knüpfenden Operationen Stellung zu nehmen.
erste Motiv achte, das zweite begreife ich. Indessen
de unter solchen Umständen ein anderer Titel für die
ertation sich empfohlen haben, etwa: »Fragmente einer
chichte der Fourierschen Reihen« oder dergl.

Wie Eingangs bemerkt, erscheint es mir nützlich, schon
dieser Gelegenheit die gerügte Lücke in der Geschichts-
eibung der Dissertation wenigstens zum Theil auszufüllen,
m ich die verschiedenen bis jetzt bekannten allgemeinen
igkeitsbedingungen für die Darstellbarkeit der Functionen
gleichend zusammenstelle. Denn weitere allgemeine Er-
nisse hinsichtlich der Bedingungen für die darzustellende
ction scheinen weder für die allgemeinen Darstellungsfor-
n noch für die Fourierschen in *naher* Aussicht zu stehen.

Vorher jedoch will ich der Dissertation auf zwei aus-
klich gegen mich gerichtete Angriffe antworten, die mir
genheit zu Erörterungen von allgemeinerem Interesse
n. Es handelt sich erstens wieder einmal um den Grenz-
h von Functionen zweier Veränderlichen, in dem vieler-
enen Falle, wo eine Function einer Veränderlichen als
nze einer Reihe etc. dargestellt ist, und zweitens um den
riff des bestimmten Integrals.

3.

Die Bedeutung von Grenzen unendlicher Operatione an Sprungstellen.

Ich hatte in meiner Abhandlung »Ueber die sprun weisen Werthänderungen der Functionen« die Frage erörte was alles unter einer als

$$lim_{h=\infty} f(x, h)$$

definirten Function $f(x)$ verstanden werden könne. Da eine unbestimmte Grösse ist, so braucht man, während h nimmt, x nicht fest sich zu denken, und so ist der all meinste Werthinbegriff von $lim\, h=\infty\, f(x, h)$ für einen bes deren Werth $x=x_1$, das was ich mit $lim_{h=\infty,\ x=x_1} f(x,$ bezeichne, wo der $lim_{h=\infty,\ x=x_1}$ bedeutet, dass x und sich gleichviel wie, entweder nacheinander oder nach irge einem Gesetze gleichzeitig ihren Grenzwerthen nähern. Sprungstellen von $lim_{h=\infty} f(x, h)$ sind es, für welche Unterschied zwischen den verschiedenen Auffassungen des mes von $f(x, h)$ sich zeigt. Ich habe es natürlich, so lan sich noch nicht eine der möglichen Auffassungen von f in der Wissenschaft festgesetzt hat, als Sache persönlich Dafürhaltens hingestellt, welcher von den Auffassungen m den Vorzug geben will, und habe mich persönlich für die e gemeinste Auffassung $lim_{h=\infty,\ x=x_1} f(x, h)$ entschieden.

inde, welche ich für meine Wahl beibringe, sind, glaube
, durchschlagend. In der Theorie der partiellen Differen-
gleichungen wird die Definition der Function $f(x)$, wie
sie auffasse, ohne Zweifel die herrschende bleiben. Doch
e ich diese Dinge rein gegenständlich dargelegt, und sogar
onderer Vorsicht im Ausdruck mich befleissigt. Ich behan-
e sodann einige an diese begrifflichen Unterscheidungen sich
pfende Probleme. Hat man nämlich eine unendliche Ope-
on, z. B. eine Reihe und ist eine Function als

$$lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n} u(x)$$

nirt, so legt das Obige die Aufgabe nahe, mit Hülfe der
me der Reihe $\sum_{1}^{\infty} u(x)$, wenn man sie bilden kann, auch
Limes:

$$lim_{n=\infty,\, x=x_1} \sum_{1}^{n} u(x)$$

udrücken. Es ist dies ein Problem wie jedes andere, und
gab eine allgemeine Formel, die es in vielen Fällen löst.
wendete sie auf die Fouriersche Formel, die Fouriersche
e und ein gewisses mit ihr verwandtes Integral an, für
hes Hr. Prym die Aufgabe schon früher, aber von der
rie der partiellen Differentialgleichungen aus behandelt
in der seinen Zwecken entsprechenden Form gelöst hatte.
Ich hielt diese Sache für abgethan und ich meine auch,
sie es ist. Widerspruch hatte sich nicht erhoben. Wo-
n auch? Vielmehr las ich zustimmende Erwähnungen
er Behandlung der Frage, und auch Unterhaltungen
Fachgenossen konnten mich eines Anderen nicht be-
n.

Die Dissertation greift mich nun dieser Untersuchung

wegen an, indem sie offenbar zwei Dinge verwechselt. We
es sich blos um die Summe einer Reihe handelt, deren Gl
der Functionen einer Veränderlichen sind, so wird allerdi
Niemand etwas anderes darunter verstehen, als die Grenze
Summe der ersten n Glieder der Reihe für einen festen We
des Arguments. Aber wenn man, wie oben erörtert, e
Function zu definiren hat, so kann man sie natürlich glei
falls als Summe der Reihe in diesem gewöhnlichen Sinne ansel
aber eben so gut als etwas Anderes, und es ist doch gew
Sache der Convention, zu entscheiden, was sie, im Besonde
und im Allgemeinen, vorstellen soll. Ein Missverständni
das ich mir kaum erklären kann, ist, dass ich irgendwo
Nachweis zu führen versucht, die Fouriersche Reihe stelle an
Unstetigkeitsstelle alle Werthe der Function zwischen den
grenzenden Werthen dar. Angesichts der Schärfe, mit der
mich ausdrückte, lässt diese Behauptung blos die Deutung
dass der Verfasser die Abhandlung nur vom Hörensagen ken
und entweder Missverstandenes gehört, oder Gehörtes mi
verstanden. Ich habe vielmehr den Nachweis wirklich gefü
und nicht nur zu führen versucht, dass die Grenze der erst
n Glieder der Fourierschen Reihe bei gleichzeitiger B
wegung des Arguments diese Werthe annimmt.

Von der Formel

$$Lim_{n=\infty,\, x=x_1} \left\{ \tfrac{1}{2} \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) d\alpha \right.$$

$$+ \cos x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos \alpha d\alpha + \cdots + \cos nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \cos n\alpha$$

$$+ \sin x \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin \alpha d\alpha + \cdots + \sin nx \int_{-\pi}^{+\pi} f(\alpha) \sin n\alpha$$

$$\frac{\pi}{2}\{f(x_1+o) + f(x_1-o)\}$$

$$f(x_1+o) - f(x_1-o)\}. \quad Lim_{n=\infty,\, x=x_1} \int_o^{n(x-x_1)} \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\alpha}$$

e ich weiter wörtlich: sie »muss als die eigentliche Werth-
immung der Fourierschen Reihe für Sprungstellen ange-
n werden, da sie jeden Werth des Limes der
ihe liefert, wie man auch der Sprungstelle
h nähern und dazu die Gliederzahl unend-
h werden lassen möge«. Gegen vorstehende Be-
ptung mit ihrer Begründung ist schwerlich etwas einzu-
den. Würde ich ohne nähere Erläuterung die Formel für
eigentliche Werthbestimmung der Fourierschen Reihe er-
t haben, wie die Dissertation es darstellt, so wäre dies
dings eben so unwissenschaftlich, wie der Ukas, den sie
h darauf erlässt: »Es darf keine andere Reihenfolge statt-
n als die, zuerst $x=x_1$ und dann $n=\infty$ zu setzen«. . . .
it untersagt sie also ein für alle mal — wir vermögen
n anderen Sinn in ihren Worten zu entdecken — ähn-
Formeln, wie die oben angeführte aufzusuchen. Sie ver-
t also geradezu, gewisse Functionen aufzustellen, versucht
in den Functionsbegriff zu beschränken. Die Functionen
Form $f(x) = lim_{n=\infty,\, \varepsilon=o} \sum_{p=1}^{p=n} u_p(x+\varepsilon)$ sind aus der
ysis verbannt, ganz ähnlich wie sie bereits vorschlug, (s.
Einleitung dieser Entgegnung) Functionen das analytische
errecht nur dann zu gewähren, wenn sie den Sprungwerth
r Mitte der Schwankung hätten.

Wie sich zeigt, wenn man weiter liest, erstreckt sich das
eisungsdecret der Dissertation allein auf jene Art ge-

mischter Grenzen und nicht auf $f(x) = lim_{h=\infty,\, \varepsilon=0} F(x+\varepsilon,$

im Allgemeinen, denn zu Gunsten des von Hrn. Prym b
Gelegenheit einer partiellen Differentialgleichung behandelt
Integrals:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} d\alpha f(\alpha)\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\alpha-x)+r^2} = F(x, r)$$

wird eine Ausnahme gemacht. Seine gemischten Grenzwert
$lim_{r=1,\, \varepsilon=0} F(x, r)$ sind gestattet. »Die Fouriersche Rei
convergirt aber durchaus nur gegen den Mittelwerth, da w
uns bei ihr nur im Gebiete einer Variabeln befinden«, fü
die Dissertation hinzu. Wenn es uns nun dennoch trotz d
Interdict gefällt, auch den Ausdruck $lim_{n=\infty,\, x=x_1} \sum_{p=1}^{p=n} u_p($
zu untersuchen, weshalb ist dann n keine Variabele? Et
weil sie nur in ganzen Zahlen wächst? Ja was hindert de
sich n continuirlich wachsend zu denken, $\sum_1^n u_p$ aber immer r
um ein Glied zunehmend, so oft n eine ganze Zahl durchlä
ähnlich wie die springenden Zeiger der Uhren ihren W
während der stetig wachsenden Zeit zurücklegen?

Es ist jedenfalls ein seltsames Unterfangen, eine analy
sche Theorie, die bei innerer Folgerichtigkeit durch n
Aufgaben und Sätze nach aussen als leistungsfähig sich
währt, in die Grenzen einer beschränkten und inconsequen
Doctrin zurückweisen zu wollen. Wenn die Doctrin gemisc
Grenzwerthe von Reihen verwirft, wo denn innerhalb der u
ermesslichen Mannigfaltigkeit unendlicher Operationen gede
sie die Grenze zu ziehen, von welcher an sie der »sogena
ten« Stetigvieldeutigkeit nach ihren Vorstellungen Existe
berechtigung einräumen darf?

Zum Integralbegriff.

Bei der Besprechung der Riemannschen Habilitationsschrift
zuerst von deren allgemein-theoretischen Theil die Rede.
Dissertation erwähnt vorübergehend, dass Riemann den
griff des bestimmten Integrals definirt und untersucht, wann
e Function ein Integral besitzt. Dann wendet sie sich
zlich gegen mich mit der Bemerkung: »Hr. Prof. P. du
is-Reymond nimmt freilich in seinen Schriften über die
rierschen Integrale wieder den Cauchyschen Standpunkt
in Betreff der Definition des bestimmten Integrals, den
emann wegen seiner Willkürlichkeit verwirft. Daher schrei-
sich manche seiner von den gemeinhin angenommenen
ig abweichenden Resultate.« In der Anmerkung hierzu
eine Auzahl Stellen aus meinen Abhandlungen angeführt,
che wohl das Urtheil im Texte bestätigen sollen.

Die Begriffsfestsetzung des bestimmten Integrals zerfällt
wei Theile. Es ist erstens festzustellen, unter welchen Be-
gungen das Integral existirt über ein Intervall genommen,
welchen die Function endliche Schranken nicht überschreitet,
zweitens ist der Begriff des bestimmten Integrals zurecht-
gen, falls im Integrationsintervall oder an den Grenzen
cte vorkommen, bei der Annäherung an welche die Func-
nicht zwischen festen Grenzen eingeschlossen werden kann.

Was die erste Frage betrifft, so beschäftigt sich Cauchy,

so viel ich weiss, mit ihr nicht weiter. Er denkt sich, w
zu seiner Zeit allgemein geschah, die Function stetig mit ei
zelnen Maximis und auch Unstetigkeiten. Meines Wissens rüh
die erste Bemerkung, welche dem allgemeineren Function
und Integralbegriff gewidmet ist, von Lejeune-Dirichl
her. Ich besprach sie kürzlich (Leipz. Ann. XVI Bd., 1
Anm.). In die Wissenschaft eingeführt wurde der erweiter
Integralbegriff durch die Art. 5 und 6 der Riemannsch
Habilitationsschrift.

Die zweite Frage anlangend, so scheint hier in der Th
Cauchy zuerst genaue Begriffe geschaffen zu haben, inde
er das bestimmte Integral, wenn $f(x)$ für $x = c$, wo $a<c<$
unendlich wird, als

$$lim_{\varepsilon = o,\ \varepsilon_1 = o} \int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon_1}^{b} f(x)dx$$

auffassen lehrte. Nachdem Riemann dies am Schlusse d
Art. 4 der cit. Schrift gebührend hervorgehoben, fügt
hinzu, dass andere Festsetzungen von Cauchy über den B
griff des bestimmten Integrals in Fällen, wo es dem Grun
begriff nach ein solches nicht gibt . . . zur allgemeinen Ei
führung ihrer grossen Willkürlichkeit wegen kaum geeigne
seien; womit natürlich die in jedem Lehrbuch an die vo
stehende Cauchysche Begriffsfestsetzung sich anschliessend
Cauchyschen Hauptwerthe

$$lim_{\varepsilon = o} \int_a^{c-\varepsilon} + \int_{c+\varepsilon}^{b}$$

gemeint sind.

Da nun keine andere Stelle bei Riemann aufzufind
ist, auf welche die Dissertation bei ihrem über mich verhär-

n Tadel sich hat berufen können, so muss der meiner Schrif-
n unkundige Leser schliessen, dass ich in Cauchyschen Haupt-
rthen speculire. Allerdings kömmt gelegentlich deren einer
i mir vor, wo er jedoch ebenso am Platze ist, wie bei einer
nlichen Gelegenheit ein solcher bei Riemann (Art. 12 der
. Schrift). Die zum Beleg in der Anmerkung angeführten
llen aus meinen Schriften haben aber mit den Cauchyschen
uptwerthen gar Nichts zu schaffen. Mit Ausnahme einer
lle (Leipz. Ann. VII, 257, Anm.), deren wenig geschickte
torsion der Tadel der Dissertation wahrscheinlich ist, und
mit den Hauptwerthen gleichfalls ausser jeder Beziehung
ht, betreffen sie Doppelintegrale.

Während Cauchy in seinen Untersuchungen über die
égrales singulières vom Integrationsgebiete des Doppelinte-
ls zwei sich kreuzende Streifen abtrennte, in welchen zu-
ich der Unendlichkeitspunct der Function liegt, habe ich
gezogen, seine oben angeführte Auffassung des über einen,
r bis an einen Unendlichkeitspunct erstreckten einfachen
egrals, die von Niemand bemängelt wird, auf die Doppel-
egrale auszudehnen, indem ich erst das Integral über ein Ge-
t nahm, das zwar dem Gebiete des auszuwerthenden Integrals
gehörte, den Unendlichkeitspunct aber nicht enthielt, und
ches ich sodann in das erste übergehen liess. Dies ist die
ürlichste und allgemeinste Vorstellung, welche hier möglich
, die zu bekannten Methoden der Functionentheorie führt,
l die dem correcten Grenzbegriff entspricht. Es ist eben durch-
nichts Willkürliches darin, Nichts worin ich der Analysis
Zang anthue, wie die Dissertation es einigemal versucht.
s ursprüngliche Gebiet ist rechteckig, mit dem Unendlich-
tspunct in einer der Ecken, und das sich ihm nähernde
me ich, den besonderen mir vorliegenden Aufgaben ent-

sprechend, ebenfalls rechteckig an, und mit einer Seite in ei
Seite des ursprünglichen fallend, untersuche aber auch,
welchen Ergebnissen die allgemeinere Annahme führt, wo d
rechteckige Begrenzung des beweglichen Gebiets der des u
sprünglichen nur parallel ist*).

Seit dem Erscheinen dieser Untersuchungen sind üb
zehn Jahre verflossen, ohne dass ich je ein Wort des Wide
spruchs vernommen, wogegen mir öfters lebhafte Zustimmu
ausgedrückt wurde. Es ist lediglich eine aus der Lu
gegriffene Unwahrheit, dass manche meiner »R
sultate« von den gemeinhin angenommenen völlig abweiche
Nicht ein Beispiel weiss ich dafür. Wobei ich übrigens
Gunsten der Dissertation voraussetze, dass sie »Ansichten« od
»Anschauungsweisen« hat sagen wollen, denn ein Result
ist richtig oder falsch, und ist keine Annahme.

Da aber die in Rede stehende interessante Phrase d
Göttinger Inauguraldissertation meinen Integralbegriff als m
der Riemannschen Auffassung des bestimmten Integrals
Widerspruch stehend behauptet, so will ich auf diese Seite d
Frage noch mit einigen Worten eingehen, die Gelegenheit b
nutzend, um einen kurzen Rückblick auf meine bisher ve
öffentlichten Untersuchungen über den Integralbegriff zu werfe

Wenn ich den Riemannschen Standpunkt verlassen hätt
so könnte es sich doch nur um den Integralbegriff für zwische
endlichen Grenzen verharrende Functionen handeln: also u
die Riemannsche Bedingung der Integrirbarkeit, dass d
Summe der Theilintervalle mit den in ihnen vorhanden
grössten Werthunterschieden der Function multiplicirt, z
gleich mit dem grössten der Theilintervalle die Null z

*) Leipz. Ann. IV, 370.

nze hat. Sehen wir zu, ob ich mich dieser neuen Be-
gung gegenüber abweisend verhalten habe.

Die Wahrheit ist, dass ich durch meine Beschäftigung
den partiellen Differentialgleichungen, bei denen Integrale
voraussetzungslosen Functionen eine so bedeutende Rolle
len, auch wenn ich nicht von je für den Integralbegriff
h interessirt hätte, mit Nothwendigkeit darauf hingewiesen
den musste, ihm die grösseste denkbare Allgemeinheit zu
eilen. Als ich jene Riemannsche Bedingung kennen ge-
t, leuchtete mir nach einigem Schwanken ein, dass sie das
plus ultra der Allgemeinheit sei, und ich suchte und
den Beweis dafür, dass wirklich jede Function, die ihr
igt, integrirbar ist, und jede integrirbare Function ihr
igt.

Ich äusserte mich sodann, es war in den sechziger Jah-
befreundeten Gelehrten gegenüber in dem Sinne, dass die
erige Begründung der allgemeinen Principien und Me-
len der Intgralrechnung ungenügend sei, und dass sie auf
nd des Riemannschen Criteriums neu durchgeführt werden
ste. Es wurde mir nur die Schwierigkeit eines solchen
rnehmens entgegengehalten. Da aber eine wirklich be-
ligende Darstellung der Grössenbeziehungen, welche in den
meinen Sätzen der Integralrechnung enthalten sind, nur
lich ist, wenn deren Hauptbestandtheil, die zu integrirende
tion, so unbeschränkt gelassen wird, wie es die Sätze ge-
en, so schien mir die Wichtigkeit des Erfolgs den Kampf
den Schwierigkeiten der Aufgabe zu lohnen.

Meine erste Mittheilung über diesen Gegenstand hatte
einem Aufsatz über die Divergenz der Fourierschen Reihe
efügt, an welchen sich Weiterungen knüpften, so dass ihre
öffentlichung um ein paar Jahre verzögert wurde. Gleichwohl

habe ich die Priorität in Bezug auf alle Sätze der neuen
tegraltheorie: Der Beweis dafür, dass die neue Bedingu
nothwendig und ausreichend ist; die Integrirbarkeit von P
ducten integrirbarer Functionen und die äusserste Erweiteru
dieses Satzes; die allgemeinste Form, welche der Bedingu
ertheilt werden kann hinsichtlich der Functionswerthunt
schiede, mit denen die Theilintervalle zu multipliciren si
die partielle Integration; der Fundamentalsatz der Integ
rechnung; die Rolle, welche der allgemeine Integralbegriff
der Theorie der darstellenden Integrale und der trigonomet
schen Reihen, und in der Variationsrechnung spielt, s
theils von mir zuerst theils nur von mir veröffentlicht.

Das Erwähnte nebst Manchem, was ich überging, u
Mehrerem, was ich noch nicht zu veröffentlichen Musse u
Gelegenheit fand, berechtigen mich schon heute zu erklär
dass mein ursprünglicher Plan, den allgemeinen Theil
Integralrechnung auf Grund des Riemannschen Criteriums
aufzurichten, der Hauptsache nach durchgeführt ist, und
werde dies in Bälde durch eine zusammenhängende Darstellu
dieser Ergebnisse zeigen, wenn mir, der ich langsam arbe
und häufig aufgehalten werde durch die dem Begründer ei
Theorie eigene Aengstlichkeit, in dieser schreiblustigen Z
nicht von minder bedächtigen Autoren zuvorgekommen wi

Doch kehren wir von diesem *à propos* wieder zu dem h
theil der Dissertation zurück. Ich bemerke, dass die eben na
haft gemachten Untersuchungen nicht etwa vergraben bliebe
sondern gelesen, vielfach erwähnt, und verarbeitet wurd
Gleichwohl sagt sie, ich hätte statt des Riemannschen wie
den Cauchyschen Standpunkt eingenommen. Ich glaube
Schlüssel zu dieser Ungereimtheit und zu anderen ähnlichen

Dissertation — wenn ich sie personificiren darf — könnte
ht bündiger, als durch diesen so naiven Griff nach den
rnern des Stiers beweisen, dass sie von der Sache
chts versteht. Ich gestehe, dass ihr überlegener Ton
Durchbruch dieser Erkenntniss eine Weile bei mir zu-
kgehalten hat. Aber was soll ich schliesslich mit dem besten
llen mir dabei denken, wenn ich z. B. lese (p. 23):
.. Erfüllt die Function nicht mehr die Bedingung der In-
rirbarkeit (eine Annahme, die aber Riemann (gesamm.
r. p. 224) gar nicht macht), so haben die Integraltheo-
ıe freilich ihren Sinn verloren; in diesem Falle aber haben
überhaupt noch gar kein Mittel zur Untersuchung« (sci-
t ob die Fouriersche Reihe convergirt oder divergirt). Zu-
fender bemerkt Riemann, indem er a. a. O. jene Annahme
nz ausdrücklich macht, dass sodann schon die Fourier-
e Coefficientenbestimmung nicht mehr anwendbar ist.

Ueber den Gültigkeitsbereich der Darstellungsform für beliebige Functionen.

Man wolle das unter dieser Ueberschrift Vorgeführte ansel als einen Zusatz zum einer Abhandlung: Allgemeine Le sätze über den Gültigkeitsbereich der Integr formeln, die zur Darstellung willkürlicher Fu tionen dienen, Borch. Journ. Bd. 79, pag. 38 sqq.

Es sollen in diesem Zusatz einige meiner dortigen Sä sorgfältiger hergeleitet, und gegen andere zu gleichem Zwe aufgestellte abgewogen werden, wie ich es denn namentl am Schluss dieses Kapitels mir angelegen sein lasse, gegenwärtigen Stand dieser Probleme und die Ziele mei anderen einschlägigen Untersuchungen zu beleuchten.

1. Die Formeln, welche den Gegenstand der Untersuchung den. (Allgemeine Lehrsätze etc.)

Ich erinnere zunächst an die Fundamentalformeln Theorie der darstellenden Integrale:

$$\text{(A.)}\quad lim \int_a^b d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h) = o\,,\quad o < a \leqq b.$$

$$\text{(B.)}\quad lim \int_o^a d\alpha f(\alpha)\varphi(a, h) = f(o)\ \ lim \int_o^a d\alpha\varphi(\alpha, h).$$

Das Zeichen *lim* stellt den Grenzwerth $h = \infty$ vor und
$x, h)$ ist so beschaffen, dass der *Limes* rechter Hand in (B.)
n a unabhängig, endlich und bestimmt ist.

Die Formeln (A.) und (B.) bilden die Grundlage der zur
ırstellung willkürlicher Functionen dienenden Formel:

$$\lim \int_A^B d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha - x, h) = f(x - o) \lim \int_{-a}^{o} d\alpha\varphi(\alpha, h) + f(x + o) \lim \int_{o}^{b} d\alpha\varphi(\alpha, h),$$

) beide Grenzwerthe rechts unabhängig von a und b, end-
h und bestimmt sind, und $A < x < B$ ist.

Von Formel (A.) habe ich gezeigt (l. c. Art. 1), dass sie
ein Theorem der Integralrechnung von ungewöhnlicher
lgemeinheit sich erweist. Sie gilt nämlich stets, wenn für
$\leqq a_1 \leqq b_1 \leqq b$

$$\lim \int_{a_1}^{b_1} d\alpha\varphi(\alpha, h) = o$$

, $\varphi(\alpha, h)$ bei zunehmendem h eine endliche Grösse nicht
erschreitet, und $f(x)$ integrirbar ist. Hiernach können wir
e Theorie als erledigt ansehen, so dass die Untersuchung
ı auf die Formel (B.) zu beschränken hat, deren Theorie
nentlich hinsichtlich der Functionen $f(x)$, auf welche die
rmel angewendet werden darf, die erheblichsten Schwierig-
ten darbietet.

Ich hatte in meiner ersten Arbeit über Darstellungen
ber die allgemeinen Eigenschaften der Classe von Doppel-
egralen, zu welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört,
rch. Journ. Bd. 69) die allgemeine Formel (B.) bewiesen,

unter der Voraussetzung, dass die Function $f(x)$ von $x=o$ bis zu einem beliebig wenig von o verschiedenen Argum kein Maximum oder Minimum habe. Die Aufgabe war a diese grosse Beschränkung so weit als möglich aufzuheben

Mein erster Schritt in dieser Richtung (Allgemeine Le sätze etc. Art. 4) bestand darin, dass ich eine Classe Functionen $\varphi(x, h)$ ausschied, für welche die Integrirbarl von $f(x)$ und das Bestimmtsein von $f(o+o)$ ausreicht. Es wa die Functionen $\varphi(x, h)$, welche einen unbedingt conve genten Grenzwerth

$$lim \int_o^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$$

ergeben. So nannte ich diesen *Limes*, wenn

$$lim \int_o^a d\alpha \, mod \, \varphi(\alpha, h)$$

endliche Schranken nicht übersteigt, ohne dabei bestimmt s zu brauchen.

Hier nun sehen wir uns unmittelbar vor den Gegenst unserer Untersuchung gestellt, welcher ist, den Gültigkei bereich der Formel:

$$\text{(B.)} \quad lim \int_o^a d\alpha f(a)\varphi(\alpha, h) = f(o) \; lim \int_o^a d\alpha \varphi(\alpha, h)$$

festzustellen, falls der Grenzwerth rech zwar endlich und bestimmt und von a una hängig aber *bedingt* convergent ist, d. h. we der Grenzwerth

$$lim \int_o^a d\alpha \, mod \, \varphi(\alpha, h)$$

endlich gross ist, wie dies z. B. bei dem bekanntesten
spiel $\varphi(x,h)=\frac{\sin xh}{x}$ zutrifft, wo

$$\int_0^a da \bmod \varphi(a,h)=\int_0^{ah} d\alpha \frac{+\sqrt{\sin^2\alpha}}{\alpha}$$

; h logarithmisch unendlich wird.

Die Aufgabe ist daher zunächst für jede Function
; h), welche die Eigenschaft hat einen bedingt
nvergenten und von a unabhängigen Grenz-
rth

$$lim \int_0^a d\alpha\varphi(\alpha,h)$$

ergeben, möglich weiteste Bedingungen für
zu finden, unter denen Gleichung (B,) statt-
den muss.

Diese Bedingungen werden voraussichtlich bei der grossen
beschränktheit der Function $\varphi(x, h)$ in demselben Maasse
Function $f(x)$ einschränken. Die weitere Aufgabe wird
, angemessene Beschränkungen der Func-
n $\varphi(x, h)$ aufzusuchen, welche $f(x)$ einen be-
glich weiteren Spielraum gewähren, und bei
en Forschungen das Ziel im Auge zu behalten, dass man
der Richtung der bekannten und in den Anwendungen
lichen besonderen Darstellungsformeln vordringe.

Wir stellen an die Spitze dieser Betrachtungen ein Paar
ssätze, die ich (Allgemeine Lehrs. Art. 8) des Näheren
begründen nicht für nöthig hielt, hier indessen nicht un-
iesen lassen will, übrigens gegenwärtig auch wohl etwas
rfer zu fassen in der Lage bin.

2. Zwei Hülfssätze.

I. Eine stetige Function $f(x)$ lässt sich, we sie integrirbare Differentialquotienten ha in zwei andere $f_1(x)+f_2(x)$ spalten, deren er nirgends abnimmt, und deren zweite nirge zunimmt.

Denn es sei:

$$f(x)-f(\alpha)=\int_a^x f'(x)dx),$$

unter $f'(x)$ irgend einen Differentialquotienten von $f(x)$ standen.

---

*) Ueber die mögliche Beschaffenheit der Differentialquotienten stetigen Function $f(x)$ gilt Folgendes:

Eine stetige Function kann haben:

1. einen stetigen Differentialquotienten,
2. einen durchweg bestimmten eindeutigen, aber durchweg uns gen Differentialquotienten,
3. irgendwie unstetige Differentialquotienten.

Vom zweiten Fall ist mir kein Beispiel in der Literatur vorgel Ich werde andeuten, wie man solches analytisch bilden könnte. Wenn im Raum zwischen zwei sich in der Ordinate $x=x_1$ berührenden Cu eine von beiden Curven abwechselnd reflectirte Zickzacklinie von chen Neigungen beschreibt und deren Ecken abrundet, so ist ihr D rentialquotient ein durchweg bestimmter eindeutiger, im Punct $x=$ unstetiger und auf die bekannte Weise lässt sich durch Summation geeigneten Folge von solchen Zickzacklinien entsprechenden Functi eine Function bilden, deren Differentialquotienten in pantachischen P ten unstetig sind.

Wenn wir nun im Texte den oder die Differentialquotienten grirbar annehmen, so dürfen sie zu jeder der drei obigen Klasse hören. Jedenfalls aber muss einer der äusseren Differentialquotienten $f(x)$ integrirbar vorausgesetzt werden, in welchem Falle auch die w hin benützte Gleichung $f(x)-f(a)=\int_a^x f'(x)dx$ statt hat. (Leipz. XVI. Bd. pag. 122.

Wir beginnen damit die Werthe von $f'(x)$ auszulassen, er durch Null zu ersetzen, in denen diese Function für ein gument x zugleich positive und negative Werthe besitzt; s wir wegen und unbeschadet der Integrirbarkeit n dürfen. Alsdann zerlegen wir $f'(x)$ in zwei Functionen $x)$ und $f_2'(x)$ von denen $f_1'(x)$ positiv und $= f'(x)$ oder ll ist je nachdem $f'(x)$ positiv oder negativ ist, $f_2'(x)$ negativ l $= f'(x)$ oder Null ist, je nachdem $f'(x)$ negativ oder positiv wobei ich bemerke, dass, wenn $f'(x)$ unbestimmt ist, mit em ihm gleichen Functionswerth $f_1'(x)$ oder $f_2'(x)$ ein solcher neint ist, der unbestimmt zwischen denselben Grenzen ist.

Nun besteht der wichtige Umstand, dass jede der nctionen $f_1'(x)$, $f_2'(x)$ für sich integrirbar ist. n im Intervall δ_p seien f'_{op} und f'_{up} resp. der grösste und kleinste geometrische Werth von $f'(x)$, so ist wegen der egrirbarkeit von $f'(x)$: $lim\ \Sigma\delta_p(f'_{op} - f'_{up}) = 0$. Ersetzt n nun z. B. f'_{up} durch Null, wo diese Grösse negativ ist, muss *a fortiori* sein $lim\ \Sigma\delta_p(f'_{op} - f'_{up}) = 0$, also etc.

Bilden wir daher:

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f_1'(\alpha)d\alpha + \int_a^x f_2'(\alpha)d\alpha$$

ist $f(x)$ in der angezeigten Weise zerlegt, wenn wir

$$f_1(x) = \tfrac{1}{2}f(a) + c + \int_a^x f_1'(\alpha)d\alpha$$

$$f_2(x) = \tfrac{1}{2}f(a) - c + \int_a^x f_2'(\alpha)d\alpha$$

en, unter c irgend eine Grösse verstanden. Q. E. D.

II. Wenn eine Function $f(x)$ einen integrir-

baren Differentialquotienten hat, und x l
wegt sich von a bis X, so werden die re
nirgend abnehmenden und nirgend zunehme
den Componenten $f_1(x)$ und $f_2(x)$ von $f(x)$ da
zu endlichen Werthen $f_1(X)$ und $f_2(X)$ gelange
wenn das Integral

$$\int_a^X f'(\alpha)d\alpha$$

unbedingt convergirt.

Denn dann ist convergent alles was aus dem Integ
$\int_a^X f'(\alpha)d\alpha$ wird, wenn man darin beliebige Werthe von f'
durch Null ersetzt.

3. II. Methode der Herleitung der Formel (B.)

Während die Art. 1. dieses Capitels erwähnte erste M
thode unter Anwendung meines Mittelwerthsatzes auf das I
tegral $\int_a^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h)$ oder genauer auf seine beiden The
$\int_a^\varepsilon + \int_\varepsilon^a$ zu der von mir nach Dirichlet benannten D
dingung für die Function $f(x)$ (keine unendliche Anzahl M
xima zu haben) führt, so gestattet die gleich anzugeber
zweite Herleitung unter gewissen Bedingungen unendlich vi
Maxima von $f(x)$, indem sie aber in anderer Beziehung f
mehr einschränkt wie die Dirichletsche Bedingung, von die
Function nämlich voraussetzt, dass sie einen Differentialq
tienten hat.

Das Princip, nach welchem wir überhaupt neue Bedingungen finden, hier und bei der folgenden Herleitung III, ist dass wir die beliebig schwankende Function $f(x)$ auf Functionen zurückzuführen suchen, die nur in wachsendem oder abnehmendem Sinne sich ändern, wo dann die oben angedeuteten Methoden meiner ersten Untersuchung in Kraft treten.

Die II. Herleitung benützt die Hülfssätze wie folgt: Soll in

$$\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha, h)$$

stens $f(x)$ einen integrirbaren Differentialquotienten hat, eitens das Integral

$$\int_0^a d\alpha f'(\alpha)$$

der unteren Grenze absolut convergirt, lässt $f(x)$ sich in $c)+f_2(x)$ zerlegen, wo $f_1(x)$ und $f_2(x)$ nur je in einem Sinne h ändern. Und indem man auf die Integrale

$$\int_0^a d\alpha f_1(\alpha)\varphi(\alpha, h), \quad \int_0^a d\alpha f_2(\alpha)\varphi(\alpha, h)$$

I. Herleitungsart (Art. 1.) anwendet, gelangt man wieder zu mel (B.). Ich habe in einer späteren Untersuchung die eben altene Bedingung auf besondere Fälle angewandt.

4. III. Herleitung von Formel (B.).

Die Specialisirung der Function $\varphi(x, h)$, welche den Anidungen näher führt, besteht darin, dass $\varphi(x, h) = \frac{\psi(x, h)}{x}$ etzt wird, mit der Bestimmung, dass $\psi(x, h)$ auch für ∞ unter einer endlichen Grenze bleibt, und dass $\psi(x, h)$

bei endlichem h mit x verschwindet. Auf diese Beschränkung

führte eine Transformation des Integrals $\int_0^a d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha,h)$ dur

partielle Integration, bei welcher für $f(x)$ entsprechend weite
Bedingungen als bei der Herleitung II erhalten werden.

Wir transformiren nur den Theil $\int_0^\varepsilon$ des Integrals $\int_0^a$,

beliebig klein, weil für $lim \int_\varepsilon^a = o$ nach Art. 1. $f(x)$ ja übe

haupt nur integrirbar zu sein braucht.

Es wird gesetzt:

$$\int_0^\varepsilon d\alpha f(x)\varphi(\alpha,h) = \varphi(\varepsilon,h)\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha) - \int_0^\varepsilon d\alpha \frac{\partial\varphi(\alpha,h)}{\partial\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

alsdann führt man eine Hülfsfunction $\lambda(x)$ ein, die durch

$$x\lambda(x) = \int_0^x f(\alpha)d\alpha$$

gegeben ist, zerlegt $\lambda(x)$, unter der Voraussetzung dass $\lambda($
einen integrirbaren Differentialquotienten hat in die nirge
abnehmenden resp. nirgend zunehmenden Componenten $\lambda(x)$:
$\lambda_1(x)+\lambda_2(x)$ und transformirt vorstehende partielle Integr
tion in:

$$\int_0^\varepsilon d\alpha f(\alpha)\varphi(\alpha,h) = \lambda(o)\int_0^\varepsilon d\alpha\varphi(\alpha,h) + \Big(\lambda_1(\varepsilon)-\lambda_1(o)\Big)\Big[\xi\varphi(\xi,h)$$

$$\int_\xi^\varepsilon d\alpha\varphi(\alpha,h)\Big] + \Big(\lambda_2(\varepsilon)-\lambda_2(o)\Big)\Big[\xi_1\varphi(\xi_1,h) - \int_{\xi_1}^\varepsilon d\alpha\varphi(\alpha,$$

$$+ \lambda(o)\, lim_{\varepsilon = o}\, \varepsilon\varphi(\varepsilon, h),$$

$$o \leqq \xi,\ \xi_1 \leqq \varepsilon.$$

iese Umformung ist gezeigt: Allgemeine Lehrsätze etc. g. 55 und 56. Lässt man h unendlich werden, so fällt man ieder auf Formel (B.).

Hier also ergiebt sich auf Grund der Hülfssätze für $f(x)$ e Bedingung, dass

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)\right) = \int_0^a d\alpha \left(\frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)\right)$$

solut convergent sei, da doch

$$\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta) = \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

t $f(x)$ zugleich integrirbar ist.

Diese Bedingung ist ein wirklicher Fortschritt in der eorie der darstellenden Integrale. Es ist die erste Bedingung, welche für die Darstellbarkeit der Function für einen besonderen Argumentwerth keinem noch so kleinen Intervall, dem er angehört, die Stetigkeit auferlegt.

Erinnert man sich, dass ein Integral

$$\int_0 d\alpha F(\alpha)\frac{t(\alpha)}{\alpha}$$

der unteren Grenze absolut convergent ist, wenn $t(x)$ eine nction bezeichnet, die $< \tau(\alpha)$ ist, unter $\tau(x)$ die Grenze schen Convergenz und Divergenz verstanden, während $F(x)$ unter einer endlichen Grenze zu bleiben braucht, so ergiebt sich leicht (Allgemeine Lehrsätze Art. 11) dass in

$$\int_0^a d\alpha \frac{f(\alpha)}{\alpha} - \int_0^a d\alpha \frac{1}{\alpha^2} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

die beiden Integrale rechts für sich absolut convergent sin
wenn $f(x)$ die Form

$$f(o) + t(x)F(x)$$

hat, wo $f(o)$ aus der Differenz der Integrale herausfällt. F
ist $t(x)$ z. B. $\frac{1}{(l\frac{1}{x})^{1+\nu}}$, $\frac{1}{l\frac{1}{x}(ll\frac{1}{x})^{1+\nu}}$, etc., ν beliebig klein abe
$> o$. $F(x)$ braucht nur integrirbar zu sein.

Auf die Interpretation dieser dritten Bedingung gehe ic
im Folgenden des Genaueren ein. Ihr Interesse tritt nämlic
besonders hervor, wenn man sie mit der IV. nun zu bespre
chenden Bedingung vergleicht, und beider Vortheile und Wirk
samkeitsbereich gegen einander abwägt.

5. VIte Ableitung der Formel (B.)

Die vierte Ableitung der Formel (B.) beschränkt d
Function $\varphi(x, h)$ im Grunde nicht weiter als die dritte, son
dern verlangt nur, unter Aufstellung unterscheidender Merk
male, zwei verschiedene Herleitungen. Bei einer späteren Ge
legenheit werde ich dies ausführlich zeigen, während ich hie
lediglich schon Veröffentlichtes eingehender zu erörtern m
zur Aufgabe gestellt habe *).

*) Hier will ich nur andeuten, dass man die bei dem von Dirichl
let betrachteten Integral sich natürlich darbietende Zerlegung i
abnehmende alternirende Theile auch bei dem allgemeinen Integr
$\int_0^a \varphi(\alpha, h) d\alpha$ herstellen kann, indem man $\varphi(\alpha, h)$ in $\varphi_1(\alpha, h) + \varphi_2(\alpha, h$
zerlegt, wo z. B. $\varphi_1(\alpha, h)$ positiv und gleich $\varphi(\alpha, h)$ oder Null ist. J
des Integral für sich hat einen unendlichen Limes. Man kann sie d
her und muss sie nun in Theilintegrale zerlegen, die ähnliche Eige
schaften wie die Dirichletschen zeigen.

Dieser vierten Ableitungsweise liegt der Dirichletsche Be-
eis der Formel (B.) (im Falle sie auf die Sinus-Cosinusreihe
h bezieht) mit seiner Erweiterung durch Hrn. Lipschitz
Grunde. Hr. Lipschitz führte die Dirichletsche Analyse
rch, unter Verzicht auf dessen erleichternde Voraussetzung,
ss in Formel (B.) die Function $f(x)$ von o an nur abnimmt.
ese Annahme gestattete Dirichlet einen Theil des Inte-
als linker Hand in (B.) von vornherein ausser Betracht zu
sen. Setzt man aber von vornherein Nichts über die Func-
n $f(x)$ voraus, so zeigt Hr. Lipschitz, dass die Formel (B.)
halten wird, wenn über das Nullwerden von $f(x+\varepsilon) - f(x)$
eignete Voraussetzungen gemacht werden. Darin, dass auf
che Weise, und im Allgemeinen in solcher Form Gültig-
tsbedingungen für die Darstellung der Functionen aufge-
llt werden können, scheint mir das wissenschaftliche In-
esse der Analyse des Hrn. Lipschitz zu liegen, während
mich minder wesentlich dünkt, dass er den langsamsten
ad der erforderlichen Abnahme von $f(x+\varepsilon) - f(x)$, der aus
nen Formeln geschlossen werden kann, nicht angab, auf den
ter Hr. U. Dini aufmerksam machte.

Worauf es aber ankommt, das ist, ob diese Bedingung
e Punctbedingung oder eine Streckenbeding-
g ist, was ich gleich näher erläutern will. Es handelt
n, um Missverständnissen vorzubeugen, für's Erste nur um
rstellung eines besonderen Functionswerthes, und nicht um
Darstellung einer Function in einem Intervall. Dann sei
er Punctbedingung eine solche verstanden, welche
die Art der Annäherung der benachbarten Functionswerthe
den darzustellenden beschränkt, und die nämliche oder eine
ere Beschränkung keinem Puncte seiner Umgebung auf-
gt. Die Streckenbedingung enthält dagegen für

alle Puncte eines, den darzustellenden Functionswerth übrige beliebig eng einschliessenden Intervalls gleiche Vorschrifte Bei der Punctbedingung erfahren daher, wenn die Darstellba keit von $f(x)$ für $x = x_1$ geprüft werden soll, die x_1 benac barten Functionswerthe keine anderen Beschränkungen, die durch das Zeichen $lim_{x=x_1}$ möglicherweise bedingten *).

Eine Strecken- oder genauer Gebietsbedingung ist z. die für die Potenzreihen durch die Functionentheorie festg setzte, desgleichen sind es auch die durch die Restausdrüc für die Taylorsche Reihe gegebenen Bedingungen.

Die aus der Analyse des Hrn. Lipschitz fo gende Bedingung ist eine Streckenbedingung. muss lauten: Wir setzen $f(x+\varepsilon) - f(x) = \rho(\varepsilon) f_1(x,$ Wenn in einem den Punkt $x = x_1$ einschliesse den beliebig kleinen Intervall für jeden Wer von x die Grösse $f_1(x, \varepsilon)$ mit ε verschwindet, wei sie ferner verschwindet, falls x gleichzeit einem besonderen Werthe sich nähert, während unter jede Grenze sinkt: dann ist $f(x)$ für $x =$ darstellbar. $\rho(\varepsilon)$ erweist sich gleich $\frac{1}{log \frac{1}{\varepsilon}}$.

Die etwas zusammengesetzte Natur dieser Bedingung u ihre Beziehung zu der Bedingung, welche aus der III. Herl tung der Formel (B.) hervorgeht, werden wir gründlicher ve stehen, wenn wir vorher einige bei der Beurtheilung der St tigkeitseigenschaften der Functionen wesentliche Punkte u überlegt haben.

---

*) Eine Bedingung kann übrigens auch gemischt, d. i. gleichzei Punct- und Streckenbedingung sein. In gewissem Sinne sind dies Obigen auch, da die Function im Integrationsintervall integrirbar s muss.

6. Ueber die Stetigkeit der Functionen.

Wenn die Function $f(x)$ die Bedingung

$$lim_{\varepsilon = 0}(f(x) - f(x \pm \varepsilon))$$

einem Puncte $x = x_1$ erfüllt, so heisst sie in diesem ncte stetig, und wenn sie jene Bedingung für jeden nct eines Intervalles erfüllt, so heisst sie in dem In- rvall stetig. Hrn. Heine's Princip von der gleich- ssigen Stetigkeit kann man auch so interpretiren, dass der nes:

$$lim_{x = x_1,\ \varepsilon = 0}(f(x) - f(x \pm \varepsilon))$$

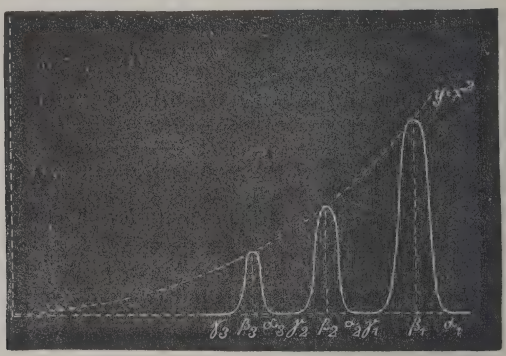
erhalb jeden Intervalles Null ist, in welchem die Function stetig ist.

Fassen wir wieder einen Punct $x = x_1$ ins Auge, Wenn $)-f(x_1+\varepsilon)$ sich auf die Form bringen lässt: $\rho(\varepsilon)f_1(x_1, \varepsilon)$, $\rho(\varepsilon)$ mit ε ohne Maxima verschwindet und $f(x_1, \varepsilon)$ nicht l wird, aber unter einer endlichen Grenze bleibt, so heisse der Grad der Stetigkeit von $f(x)$ im Puncte x_1. Je kleiner die Null von $\rho(\varepsilon)$, desto höher sei Stetigkeitsgrad (der übrigens an beiden Seiten von x_1 ver- eden sein kann).

Nun ist auf Dieses zu achten: Es sei $\rho(\varepsilon)$ der Stetig- sgrad von $f(x)$ im Puncte $x = x_1$. Setzt man $f(x)-f(x+\varepsilon)$ $\varepsilon)f_1(x, \varepsilon)$, so kann, wenn ε und $x-x_1$ nach einem eigneten Gesetz $\chi(\varepsilon, x) = 0$ zugleich verschwin- , $f_1(x, \varepsilon)$ endlich bleiben, aber auch beliebig k im Verhältniss zu $\rho(\varepsilon)$ unendlich werden. sieht dies geometrisch leicht ein, u. A. durch eine ähnliche truction, wie die, mit der ich sogleich folgende wichtige eiterung vorstehender Bemerkung beweisen werde: Wenn

in einem Intervall, in welchem die Functi
$f(x)$ stetig ist, $\rho(\varepsilon)$ deren niedrigsten Stet
keitsgrad vorstellt, so kann dennoch $f_1(x, \varepsilon)$
$\rho(\varepsilon) f_1(x, \varepsilon) = f(x) - f(x+\varepsilon)$ beliebig rasch im Verhä
niss zu $\rho(\varepsilon)$ unendlich werden, falls x einz
nen Puncten x_1 sich nähert, während zuglei
ε gegen die Null abnimmt.

Dass dies richtig ist, leuchtet ein, wenn man einen B
auf die eine solche Function $f(x)$ darstellende ausgezog
Linie in folgender Figur wirft:



Die Function $f(x)$ ist die ausgezogene Linie über α
welche man sich mit unbegrenzt oft wiederkehrenden ähnlic
Maximis, wie die drei in der Figur angegebenen, in
Winkel zwischen der punctirten Kurve $y = x^2$ und der Absciss
axe fortgesetzt zu denken hat. In den Strecken $\overline{\gamma_n \alpha_{n+1}}$ sei
Null, und sei durchweg stetig mit endlichem Differenti
quotienten. Setzen wir nun $x = \beta_n$, $\varepsilon = \alpha_n - \beta_n$, so wird

$$f(x) - f(x+\varepsilon) = f(\beta_n) - f(\alpha_n) = f(\beta_n),$$

und ferner:

$$f(\beta_n) = \rho(\alpha_n - \beta_n) f_1(x, \varepsilon),$$

und es ist klar, dass welchen Stetigkeitsgrad man auch
ρ annehmen möge, wegen der Beziehungslosigkeit zwisc

und $\alpha_n - \beta_n$ die Grösse $f_1(x, \varepsilon)$ beliebig stark unendlich wer-
kann, während β_n und $\alpha_n - \beta_n$ mit angemessener relativer
chwindigkeit zugleich verschwinden. Ist, wie hier voraus-
etzt, die Function durchweg differenzirbar, so ist $\rho(\varepsilon) = \varepsilon$
niedrigster Stetigkeitsgrad.

'. Ueber das Verhältniss zwischen den Bedingungen III. und IV.

Die Bedingung der absoluten Convergenz des Integrals

$$\int_0^a d\alpha \frac{d}{d\alpha} \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha d\beta f(\beta)$$

gemischter Natur. Bis zum Stetigkeitsgrade $\tau(\alpha)$ (Grenze
chen Convergenz und Divergenz) ist sie reine Punctbe-
;ung. Für niedere Stetigkeitsgrade scheint sie nur Strecken-
ngung zu sein, wenigstens sind die etlichen besonderen
rpretationen jener allgemeinen Bedingung, welche mir bis
gelungen, so beschaffen, dass sie Eigenschaften der
ction in einem Intervall verlangen.

Handelt es sich zunächst um die Ergebnisse (Allgemeine
sätze etc. Art. 11) allgemeiner Natur, so ist, wie schon
angeführt, jede Function für $x = o$ darstellbar, wenn
$= \rho(x) f_1(x)$, wo $f_1(x)$ keiner anderen Beschränkung als der
ichkeit und Integrirbarkeit unterliegt, also namentlich
stetig zu sein braucht, und der Grad $\rho(x)$ der Stetigkeit
Puncte $x = o$ $\prec \tau(x)$ ist, daher also z. B.

$\alpha = \frac{1}{\left(l\frac{1}{x}\right)^{1+\nu}}, \frac{1}{l\frac{1}{x}\left(l_2\frac{1}{x}\right)^{1+\nu}}$, etc. sein kann, wo ν beliebig
e.

Ich untersuchte dann weiter den Fall, wo in $\rho(\alpha$
$\frac{1}{\left(l\frac{1}{x}\right)^{\mu}}$ $\mu \leqq 1$ gedacht wird, und fand, dass alsdann die F

$$f(x)=\int_{0}^{x}\frac{d\alpha\lambda(\alpha)}{\alpha l^{1+\nu}\frac{1}{\alpha}}=\frac{\psi(x)}{l^{\nu}\frac{1}{x}}$$

stets darstellbar ist, indem $\lambda(\varepsilon)$ nur integrirbar zu sein brau
Diese Bedingung auferlegt aber offenbar dem $\psi(x)$ Beschrä
ungen innerhalb einer Strecke, da $f(x)$ durch
Integral dargestellt ist.

Mit dem Lipschitzschen Criterium lässt sich unseres
vergleichen in Intervall $\prec\tau(\varepsilon)$ des Stetigkeitsgrades.
Herleitung III der Formel (B.) verlangt, wie gesagt,
dass für den darzustellenden Functionswerth der Stetigk
grad $\prec\tau(\varepsilon)$ sei, und lässt die Function übrigens bis auf
Integrirbarkeit unbeschränkt. Die Herleitung IV verla
dass der Stetigkeitsgrad $\prec\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ sei, legt aber der Function n
allein Stetigkeit auf, sondern auch die besonders einschränk
Bedingung, dass, $f(x)-f(x\pm\varepsilon)=\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}f_1(x,\varepsilon)$ gesetzt, für j
Punct x_1 eines Intervalles $lim_{x=x_1,\ \varepsilon=0}\ f_1(x,\varepsilon)=0$ sei*)

Würden wir uns nun, nachdem wir obige aus der
leitung III fliessende Punctbedingung entdeckt hät
die fernere Aufgabe gestellt haben, eine Streckenbed
gung mit etwaigen neu einzuführenden Beschränkungen
die Darstellbarkeit der Function $f(x)$ zu ermitteln, so w

*) Man kann übrigens durch eingehende Prüfung der Forderu
der Herleitung IV. die Abhängigkeiten zwischen x und ε, für w
lim $f(x,\varepsilon)$ verschwinden muss, zum Vortheil der Bedingung einschrän

da die Function $f(x)$ übrigens an Freiheit einbüsst, in em Rechte, zu erwarten, dass die ihr in Bezug auf den igkeitsgrad auferlegte Beschränkung erleichtert werde, und den es natürlich finden, dass für den Stetigkeitsgrad die ngung von $\prec\tau(\varepsilon)$ auf $\prec\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ herabginge.

Dies wohl überlegt, wird man es mit mir für zutreffend en, wenn ich die Lipschitzsche Bedingung als eine Zusatzngung zur Herleitung III auffasse, welche letztere die aus umfassendere ist.

Die Bedingung der absoluten Convergenz des Integrals $\frac{d}{d\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha d\beta f(\beta)$ enthält, wie bemerkt, zwei Arten von Bengen für die Darstellung eines Functionswerthes je nachfür diesen Werth der Stetigkeitsgrad $\prec\tau(\alpha)$ oder grösser α) ist. Um sich diese beiden Arten durch einen Verı verständlicher zu machen, erinnere ich an die Converedingungen für ein Integral $\int_0^a \frac{\varrho(\alpha)}{\alpha} f(\alpha)d\alpha$. So lange $\rho(x)$), ist die Beschaffenheit von $f(\alpha)$, wenn diese Function ntegrirbar ist, gleichgültig. Sobald aber $\rho(\alpha)\succ\tau(\alpha)$ ist, $f(\alpha)$ besondere Eigenschaften besitzen, wenn das Integral gent sein soll. Für das Intervall $\tau(\varepsilon)\prec\rho(\varepsilon)\prec\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ des keitsgrades liefert sowohl Herleitung III als IV Beagsformen, die nicht ohne eingehende offenbar äusserst rige Untersuchungen sich vergleichen lassen werden.

er hinaus, also für $\rho(\varepsilon)\succsim\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ besitzen wir aber nur die

aus III entspringenden Bedingungen, weshalb man mir
so mehr Recht geben wird, wenn ich oben die aus IV fliesse
Bedingung als Zusatz zu III erklärte, der eben nur das Int
vall $\tau(\varepsilon) \prec \rho(\varepsilon) \prec \frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ betrifft, und, wie ich betonen muss, e
keineswegs leichte Anwendung versprechende Form besitzt

Natürlich sind diese Betrachtungen sämmtlich hinter
angestellt, d. i. sie beleuchten und combiniren nachträgl
die dem Spürsinn zur Beute gefallenen Sätze. Bei einem d
artigen Gewirr verschlungenster Beziehungen möchte kein V
stand von vornherein das leitende Princip zu erkennen v
mögen. So ist es wohl möglich, dass fernere Entdeckun
den von mir eben dargelegten Sachverhalt theilweise versch
ben, wenn z. B. für das Intervall $\tau(\varepsilon) \prec \rho(\varepsilon) \prec \frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ des Stet
keitsgrades einfachere Bedingungen als die aus der III. o
der IV. Ableitung folgenden, z. B. einfache Punctbedingun
gefunden würden, nach denen ich viel geforscht habe. V
der Hand aber liegen die Dinge so, wie sie von mir dar
stellt wurden.

Falls es sich um die Frage handelt, unter welchen U
ständen eine Function für alle Puncte eines Intervalls d
stellbar sei, so werden die Punctbedingungen natürlich
Streckenbedingungen. Hier bietet aber die Bedingung III
den Stetigkeitsgrad $\prec\tau(\alpha)$ wiederum den Vortheil, dass r
bei der Untersuchung von $f_1(x, \varepsilon)$ in $f(x)-f(x\pm\varepsilon)=\rho(\varepsilon)f_1(x$
das Argument x fest lassen darf, während ε abnimmt.
verlangt dann jedoch die Stetigkeit von $f(x)$ im ganzen
tervall.

V. Beschränkung des Problems über die Darellbarkeit einer Function durch Fourierssche Reihen.

Aus dem oben Besprochenen geht Eines unzweifelhaft vor: dass nämlich alle jene allgemeinen Bedingungen mit nahme der einen aus III. für den Stetigkeitsgrad $\prec\tau(\alpha)$ enden, so einfach ihr Ausdruck auf den ersten Blick auch heinen mag, ihrer wahren Natur nach sehr verwickelt . Zwar kann man Gleiches auch von den Restbedingungen die Taylorsche Reihe sagen. Trotz den neueren Unterungen über die Darstellung von Differentialquotienten unmmt hoher Ordnung wird Jeder, der in der Lage war, lich von den Restausdrücken Gebrauch zu machen, mir tigen, dass mit ihnen zur Zeit noch nicht viel anzufangen ind dass sie schon bei überraschend einfachen Functionen ungslos versagen.

Um so nützlicher und nothwendiger müssen dem, welcher ändniss und Interesse für Probleme dieser Gattung besitzt, llere Untersuchungen erscheinen, die sich zur Aufgabe a, einmal Functionsklassen von vielleicht dem Ausdruck längeren, im Wesen aber einfacheren Eigenschaften zu reiben, die darstellbar sind, anderseits aber Functionsn zu entdecken und zu untersuchen, welche nicht darlr sind. Dergleichen Nachforschungen werden uns viel an die gesuchten Grenzdistricte zwischen Darstellbarkeit lichtdarstellbarkeit führen, als jene oben durchgesproi allgemeinen Bedingungen, auf welche ich kein überes Gewicht lege, wenn ich sie auch keineswegs für überhalte. Von solchen Erwägungen ausgehend, habe ich

meine »Untersuchungen über die Convergenz und Diverg
der Fourierschen Darstellungsformeln« und andere ähnli
Ziele verfolgende Arbeiten durchgeführt.

Ihr Grundgedanke ist folgender:

Während bei den bisherigen Untersuchungen über
Darstellbarkeit der Functionen — wenn wir der Einfach
halber annehmen, es handele sich um die Darstellung
$f(x)$ für $x=o$ und es sei $f(o)=o$ — der Function $f_1(x)$ in
$=\rho(x).f_1(x)$ keine Aufmerksamkeit geschenkt wurde, der Ste
keitsgrad $\rho(x)$vielmehr allein über die Darstellbarkeit entschei
sollte: so scheint es die natürliche Fortsetzung dieser Un
suchungen zu sein, nun besondere Annahmen über $f_1(x)$
machen, und die dadurch erhaltenen Functionen auf ihre I
stellbarkeit zu untersuchen. Da für die Theorie nur so
Functionen Interesse haben, die in der Umgebung des da
stellenden Punctes unendlich viele Maxima besitzen, so
man für $f_1(x)$ Functionen wählen, die bei verschwindende
mit unendlich vielen Maximis unbestimmt werden, und
ist wieder die nächstliegende, einfachste und analytisch
gänglichste Annahme, zu setzen $f_1(x)=\cos\psi(x)$ wo $\psi(x)$
$\frac{1}{x}$ unendlich wird. So wurde denn diese Function $f(x)=$
$\cos\psi(x)$ der Gegenstand meiner ferneren Arbeiten.

Es sind zwei Hauptannahmen über $\psi(x)$ möglich. Ers
$\psi(x)$ wird ohne Maxima unendlich, zweitens mit Maximis. I
Fälle untersuchte ich auf das eingehendste. Ich fand im er
Falle u. A., dass für irgend einen Stetigkeitsgrad $\rho(x)$
Function $f(x)=\rho(x)\cos\psi(x)$ stets darstellbar ist, und bei
Untersuchung des zweiten Falles kamen die langer Unge
heit und allgemein herrschenden Vorurtheilen ein Ende
reitenden stetigen n i c h t darstellbaren Functionen zum

ein, durch welche die Bedeutung der Fourierschen Reihen der Analysis unstreitig eine wesentliche Verschiebung erfuhr.

Die Untersuchung der Function $f(x)=\rho(x)\cos\psi(x)$ im le $\psi(x)$ keine Maxima hat, war identisch mit der Auffinıg sämmtlicher Grenzwerthe:

$$lim_{h=\infty}\int_0^a d\alpha\sigma(\alpha)\cos\psi(a)\sin h\alpha d\alpha,$$

ziemlich zusammengesetztes Grenzproblem, welches ich inen *ad assem* erledigt habe.

Seine vollständige Lösung verlangt den Limes des Integrals jedes Unendlichwerden von $\psi(x)$ und $\sigma(x)$, und sie ist von in einer Tabelle zusammengestellt worden. Diese Lösung nal gefunden, war bequeme Gelegenheit zur Vergleichung verschiedenen bis dahin für die Darstellbarkeit aufgestellBedingungen geboten, die ich denn auch nicht unbenützt . Diese Vergleichung, eine Ausdehnung jener Grenzauf-, und wohl nicht uninteressante Folgerungen aus dem gen, wie z. B. dass

$$lim\int_0^a d\alpha\left[\frac{\cos\frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}\right]\frac{\sin\alpha h}{\alpha}=0$$

während $lim_{\alpha=0}\frac{\cos\frac{1}{\alpha^4}}{\alpha}$ zwischen unendlichen Grenzen unmmt ist, dass also die Fouriersche Reihe auch versagen , indem sie convergirt, wo sie divergiren sollte, bilden Schluss dieser Mittheilung, soweit sie ausführlich ist. Es ft sich an diese Grenzwerthbestimmung noch die Frage, ie allgemeinen Darstellbarkeitsbedingungen daraus herhen, und auch in dieser Richtung habe ich die Unterıng fortgeführt, allein ich zog vor, eben weil ich auf die

allgemeinen Bedingungen weniger Werth legte, meine Erg
nisse nur auszugsweise in einem Anhang einzufügen.

Ich habe dies Alles nicht etwa ungeordnet dem Le
vorgelegt, sondern mit vorangeschickten Inhaltsangaben u
eingetheilt in Capitel und Artikel mit ausführlichen Ueb
schriften, kurz die ganze Darstellung erfreut sich gewiss ei
Uebersichtlichkeit, wie sie leider nicht gewöhnlich ist und
die ich eher Anerkennung erwartet hätte. Wenn die Inaugu
dissertation trotzdem urtheilt, dieser Theil der Untersuch
scheine zu keinen »greifbaren« Resultaten zu führen, so ble
wohl kaum für eine andere Vermuthung Raum, als dass
entweder urtheilt ohne die Arbeit zu kennen, oder dass
ihr am geeigneten Organ zum Greifen gebricht.

Für eine solche Annahme spricht auch eine andere Ste
wo sie von dem zweiten Theil der Abhandlung sagt, »in ei
weitläufigen Abhandlung« würden von mir »verwickelte
dingungen« aufgestellt, »unter denen die Fouriersche Rei
welche sonst die stetige Function darstellt, an einzelnen S
len nicht mit den Functionswerthen übereinstimmt«. Me
Abhandlung enthalte allerdings ein erstes Beispiel für eine
einem Punct nicht darstellbare Function, die Dissertat
werde aber statt dessen ein anderes zwar formal in c
Meinigen enthaltenes aber in der Anlage und im Bew
einfacheres mittheilen. Diese Bemerkungen, welche den zw
ten Theil der Untersuchung betreffen, in welchem ich φ
mit unendlich vielen Maximis behaftet voraussetze, zeigen m
dass ich für den Autor der Dissertation noch nicht weitlä
genug war.

Erstens das Beispiel anlangend, so bemerke ich, dass
keines habe geben wollen, sondern dass ich lediglich die Un
suchung des Limes:

$$lim_{h=\infty} \int_0^a d\alpha \rho(\alpha) \cos \psi(\alpha) \frac{\sin h\alpha}{\alpha}$$

tgesetzt habe unter jener weiteren Annahme über $\psi(x)$. Ich
ɔe Vorschriften für die Aufeinanderfolge der Maxima von
x) und für das Nullwerden von $\rho(x)$ aufgesucht, damit der
nes divergent sei, ich habe ferner den höchsten Stetigkeits-
d bestimmt, von welchem an schon Divergenz auftreten
ın, und habe schliesslich, was durchaus nicht überflüssig
, festgestellt, dass diese Divergenzerscheinungen auch auf-
ten können, wenn die Function $\psi(x)$ mit allen ihren Diffe-
tialquotienten stetig ist.

Bezüglich der Functionen ρ und ψ, welche für $x=o$ di-
gente Entwickelungen von $\rho(x) \cos \psi(x)$ geben, ging ich
der einfachst denkbaren Hypothese über $\psi(x)$ aus. Ich
m zunächst eine polygonale Linie an, deren Ordinaten
) darstellen. Sie verläuft über dem Intervall $o \ldots a = x_0$,
hes in die gegen Null abnehmenden Theile $\triangle_1 = x_0 - x_1$,
$= x_1 - x_2$, etc., getheilt ist, der Art, dass sie im Intervall $\triangle_p$
Werth $h_p x$ hat, wo $h_\infty = \infty$. Ich finde alsdann folgende
ingungen dafür, dass $\rho(x) \cos \psi(x)$ für $x = o$ nicht darstell-
sei. Erstens für $\rho(x)$ gilt die Ungleichheit:

$$1 \succ \rho(x) \gtrsim \frac{1}{\sqrt{log \frac{1}{x}}}$$

n für die h_p und x_p hat man, wenn

$$h_p = \frac{1}{v_p x_p}$$

$$x_{p-1} - x_p = u_{p-1} x_p$$

zt wird, die Bedingung, dass $lim\, u_p = \infty$ und dass v_p das
l einer absolut convergirenden Reihe sei (Art. 39). Dies also

sind die »verwickelten« Bedingungen, welche die Dissertati
allein meinen kann, denn andere habe ich nicht abgeleitet.

Der Nachweis, dass die Function $\psi(x)$ in der für $x=o$ nic
darstellbaren Function $\rho(x)\cos\psi(x)$ nicht nothwendig je
polygonale Gestalt haben müsse, sondern mit allen Differe
tialquotienten stetig sein könne, wie endliche Function
liess sich freilich nicht einfach führen. Hier war also nc
etwas zu leisten, und zwar nicht etwa wieder, wie es in
Dissertation geschieht, eine zahlentheoretische Function z
sammenzusetzen, sondern eine analytische Function in er
licher Form auszusinnen. Es scheint aber, dass dies n
überlassen bleibt.

Das Beispiel der Dissertation ist keineswegs einfacher u
auch nicht einmal kürzer, wie die Construction der Art.
36, 37 meiner Abhandlung. Ebenso ausführlich gerechn
würde es erheblich länger sein, auf alle Fälle dürfte es, w
einen speciellen Fall herausgreifend, weniger geeignet se
über das Wesen der nichtdarstellbaren Functionen Licht
verbreiten, wie meine Construction, welche innerhalb der
Grunde gelegten Functionsform $\rho(x)\cos\psi(x)$ die Allgemeinh
thunlich wahrt. Eine Verbesserung ist daher das neue B
spiel wohl nicht.

Ich habe zwei Arten nichtdarstellbarer Functionen ang
geben, die eine, von welcher oben die Rede war, die and
in einem Nachtrage zu der besprochenen Abhandlung. I
beiden Aufstellungen war es ein Hauptziel, den höchst
Stetigkeitsgrad zu finden, bei dem bereits Nichtdarstellbark
eintritt. Beide Functionsformen ergaben $\rho(\varepsilon)=\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}}$ *). All

*) Die zweite Form anlangend, so ist der Nachweis, dass
Stetigkeitsgrad einer nicht darstellbaren Function $f(x)=x_1 \sin h_1 x$

ist nach dem Obigen wohl möglich, dass bei einem Stetig-

tsgrad $\frac{1}{l\frac{1}{\varepsilon}} > \rho(\varepsilon) > \tau(\varepsilon)$ auch schon Nichtdarstellbarkeit statt-

det, falls in $f(x) - f(x \pm \varepsilon) = \rho(\varepsilon) f_1(x, \varepsilon)$ der $lim_{x=x_1, \varepsilon=0} f_1(x, \varepsilon)$

ht Null ist, ein Problem, auf dessen Lösung ich, wie schon

gedeutet, einige Mühe, jedoch erfolglos verwendete.

Schluss.

Das wenig anmuthende Geschäft, welches mir durch die

rbreitung einer in unserer Dissertationsliteratur ihres Glei-

n schwerlich besitzende Schrift auferlegt wurde, scheint

$sin\ h_2 x + \ldots$ bis zu $\frac{1}{l\frac{1}{x}}$ hinaufsteigen kann (Leipz. Ann. X, 443)

ch folgenden zu ersetzen. Lassen wir den durch $h_p x_p = \pi$ bestimm-

Puncten x_p Werthe der Form: $\varkappa_1\ sin\ h_1 x_p + \varkappa_2\ sin\ h_2 x_p + \ldots$

$_{p-1}\ sin\ \varkappa_{p-1} x_p + \sum_p^\infty \varkappa_q$ entsprechen, so ist leicht zu sehen, dass $f(x_p)$

t darüber ist. Wir nehmen weiter an $lim\ \frac{h_{p-1}}{h_p} = o$, so können

wenn wir x_p durch $\frac{\pi}{h_p}$ ersetzen, annehmen, dass dem x_p der

rth $\sum_p^\infty \varkappa_q \gtrsim f(x_p)$ entspricht. Nun haben wir zwischen $\varkappa_p$ und h_p

Beziehung $\varkappa_p l h_p \gtrless 1$, und wir wählen das untere Zeichen. In

$(v) \gtrless \sum_p^\infty \varkappa_q$ ist $\varkappa_q$ durch h_q zu ersetzen und h_q durch x_q. Das Glied

Reihe $\sum_p^\infty \frac{1}{l h_q}$ können wir aber zunächst leicht so bestimmen, dass

Gesammtsumme mit wachsendem p nicht langsamer Null wird als

erstes Glied. Sie braucht hierzu nur eine geometrische Reihe zu

e. Setzen wir z. B. $h_p = e^{e^p}$, so ist $\sum_p^\infty \frac{1}{l h_q} \sim \frac{1}{l h_p}$ und $\rho(x_p) \sim \frac{1}{l\frac{1}{x_p}}$.

bis auf Weiteres erledigt. In ihren Angriffen erkenne ich eb
soviel Beweise für die Begriffslosigkeit ihres Verfassers. N
fällt, wenn man sie durchblättert, sogleich auf, dass sie
erheblichem Theil Mittheilungen aus Vorlesungen des H
A. Schwarz bringt, wesshalb man schliessen möchte, auch
gegen mich gerichteten Ergüsse seien aus einer ähnlich
Quelle geschöpft, eine Ansicht, die Vertreter findet. Sollte di
Vermuthung richtig sein, so würde mir das Vorgehen des H
A. Schwarz in doppelter Beziehung tadelnswerth erschein
Einmal wäre es nicht ritterlich, sich hinter seinen Knappen
verbergen, und ihn statt sich selbst in die Pfanne hauen zu lass
Dann aber sind die Angriffe nicht gehauen und nicht ges
chen, sondern sind allgemeiner, oberflächlicher Natur, u
gestatten nicht die übliche Abwehr. Sie erheischen, wie m
im Obigen gesehen, vielmehr gleichfalls einen allgemein
und leider zeitraubenden Wiederherstellungsprocess.

Gerade dies hebe ich hervor, weil ich gegen sachgemä
Kritik durchaus nicht abweisend mich verhalte. Im Gege
theil. Ich habe in verhältnissmässig kurzer Zeit ziemlich v
über Gegenstände der allgemeinen Functionentheorie veröffe
licht, und war zum Theil gezwungen, meine Aufsätze schnel
erscheinen zu lassen, als mir lieb war, theils *pour prend*
date, und mir nicht, wie es schon einige Mal geschah,
wichtigen Dingen, die ich schon längere Zeit auf Lager hat,
ohne die letzte Hand an sie zu legen, zuvorkommen zu lasse
theils gelegentlich auch, weil amtliche Arbeit binnen Kurze
anhaltendes Nachdenken über so subtile Gegenstände, welc
keine andere Beschäftigung neben sich dulden, unmöglic
machen musste.

Wie leicht also können nebensächliche Irrthümmer, v
denen die Besten nicht sicher sind, in meinen Schriften unte

laufen sein! Wo ich dergleichen bemerkte, habe ich sie, nn etwas darauf ankam, bei nächster Gelegenheit verbessert. chts könnte mir erwünschter sein, als auf Ungenauigkeiten fmerksam gemacht zu werden, die ich übersehen hätte.

Um dergleichen handelt es sich aber in diesem Falle nz und gar nicht, sondern offenbar nur um wissenschaftlich fruchtbare Kundgebungen von Gelehrtenmissgunst. Und wenn Dissertation vollends es sich herausnimmt, meine analyti- ien Grundvorstellungen anzufechten, so kann ich des Ein- icks mich nicht erwehren, als ob ein Fährmann, der gelernt am gespannten Seil seinen Nachen über den Fluss zu führen, den Principien der Seemannskunst es besser wissen wollte, ein Kapitän, der gewohnt ist, auf der tückischen Salzflut ien Weg zu finden.

Anhang.

In seinen *Fondamenti per la teorica delle funzioni d variabili reali* erwähnt Hr. Ulisse Dini, der in seine Vorrede zu diesem Werke angiebt, dass er sich von Hrn A. Schwarz Rath erholt habe, lediglich Hrn. Weierstras als Urheber des bisher mir zugeschriebenen Mittelwerthsatzes

$$\int_a^l \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx,\ a \leqq \xi \leqq b,$$

wo $\varphi(x)$ eine im Intervall $a \ldots b$ entweder nur wachsend ode nur abnehmend sich ändernde Function, $f(x)$ irgend eine in selben Intervall integrirbare Function vorstellt.

Auf meine briefliche Anfrage, wieso dies geschehe, gal er mir die Auskunft, dass er bis zum Drucke seines Werke diese Dinge nur aus Hrn. Thomä's »Einleitung in die Theori der bestimmten Integrale« gekannt habe, wo in einer An merkung die Sache ungefähr so dargestellt sei, wie bei ihn zu lesen. Es scheint ihm sonach über Hrn. Thomä's Rich tigstellung *) seiner Anmerkung nichts mitgetheilt worden z

*) Die betreffende Stelle bei Hrn. Thomä *(Schlömilch's Zeitschrift etc XX, 475)* lautet: »... Die Sache verhält sich jedoch so, dass Hr Weierstrass diesen Satz mittels partieller Integration, also unter wesentlichen Beschränkungen hergeleitet und in Vorlesungen angewen

n. Hr. U. Dini hatte die Güte hinzuzufügen, dass er in-
schen eines Anderen belehrt worden sei, und seine Angabe
nächster Gelegenheit corrigiren werde. Ich habe bis jetzt
e solche Correctur nirgend gedruckt gesehen. Aber gleich-
, ich kann ihm aus seinem irrthümlichen Citat keinen
wurf machen, da ich aus eigener Erfahrung weiss, wie
wer es ist, wenn man nicht eine sehr vollständige und be-
m zugängliche Bibliothek benützen kann, und vielleicht
nes häufigen Verkehrs mit Fachgenossen sich erfreut, auch
in der inländischen Literatur Nichts zu übersehen, was
den besonderen Gegenstand, den man gerade behandelt,
ug hat, geschweige in einer so ausgedehnten ausländi-
en, wie es für Hrn. U. Dini die deutsche ist.

Hinsichtlich obigen Mittelwerthsatzes scheint es mir aber
der Zeit, der so geschaffenen Verwirrung durch Darstel-
g des historischen Sachverhalts, wenn möglich, ein Ende
machen.

Thatsache ist, dass ich meiner Abhandlung: *Ueber die*
emeinen Eigenschaften der Classe von Doppelintegralen,
welcher das Fourier'sche Doppelintegral gehört, Borch.
rn. Bd. 69, § 3, den Satz zuerst in seiner vollen Allge-
nheit streng bewiesen, und mit Darlegung seiner Haupt-
endungsweise veröffentlicht habe, und dass er, wie der Er-
zeigt, durch diese Abhandlung in die Wissenschaft ein-
hrt worden ist.

Mir selbst erzählte sodann Hr. Weierstrass, während

---

hat, ohne dass hiervon Hr. du Bois-Reymond Kenntniss hatte.
m hat Hr. du Bois-Reymond jenen Satz von den beschränken-
Bedingungen befreit, und ihm so erst die Bedeutung gegeben, die
tzt hat.«

meine Abhandlung unter der Presse war, dass er den Satz
Gelegenheit einer Ausdehnung der Fourier'schen Formel,
jedoch der meinigen an Allgemeinheit nachstehe, gefund
und später in Vorlesungen von ihm Gebrauch gemacht ha

Ferner hat Hr. Darboux mich auf einen Aufsatz
Hrn. Ossian Bonnet aus dem Jahre 1849 (*Remarques s*
quelques intégrales définies, Liouv. Journ. XIV, 1849, p. 24
aufmerksam gemacht, in welchem bereits ein wichtiger beso
derer Fall des Satzes angegeben und angewendet ist. In
allgemeinen Formel:

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \varphi(b)\int_\xi^b f(x)dx,\ a \leqq \xi \leqq b,$$

ist die Funclion φ nicht stetig vorausgesetzt, und es kann d
her falls z. B. $\varphi(b) > \varphi(a)$, $\varphi(a)$ durch jeden Werth $< \varphi(a)$ u
$\varphi(b)$ durch jeden Werth $> \varphi(b)$ ersetzt werden, ohne dass
das Intervall $a \ldots b$ verlässt. Desgleichen, wenn $\varphi(b) < \varphi($
kann etc. Nehmen wir $\varphi(b) < \varphi(a)$ und positiv an, und e
setzen $\varphi(b)$ durch Null, so folgt:

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,\ a \leqq \xi \leqq b,$$

welches der Satz des Hrn. O. Bonnet ist*). Hr. O. Bo

*) Hr. O. Bonnet schliesst den Satz aus dem III. der allgemein
Reihensätze, die Abel in der Einleitung zu seiner Abhandlung über
binomische Reihe mittheilt (Crelle's Journ. I, 314). Hr. O. Bonn
giebt dem Satze die Form: Wenn $a_1, a_2, \ldots a_n$ irgend welche Zahle
$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots \varepsilon_n$ aber positive, abnehmende Zahlen sind, und

$$A < a_1 + a_2 + \ldots a_p < B,\ p = 1, 2, \ldots n,$$

so ist auch $\varepsilon_1 A < \varepsilon_1 a_1\ \varepsilon_2 a_2 + \ldots \varepsilon_p a_p < \varepsilon_1 B,\ p = 1, 2, \ldots n.$

Der erwähnte Abelsche Satz ist ein besonderer Fall eines allg
meinen Satzes, den ich in meinem Antrittsprogramm pag.
mitgetheilt habe, welcher lautet: Wenn die Unterschiede $v_p - v_p$
gleichzeitig entweder nicht negativ oder nicht possitiv sind, währer
über die u_p nichts vorausgesetzt wird, so hat man:

t wendet ihn mit vollem Erfolge an auf das Integral:

$$\int_0^h \frac{\sin nx}{x}\varphi(x)dx,$$

n $\varphi(x)$ der Dirichletschen Bedingung genügt, um dessen nze für $n=\infty$ zu finden, womit bekanntlich die Gültigkeit Fourier'schen Darstellungsformeln dargethan ist. Von vorragendem Nutzen ist der von Hrn. O. Bonnet bekte Satz für $b=\infty$:

$$\int_a^\infty \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,\ a\leqq\xi\leqq\infty,$$

er selbst a. a. O., und später auch Hr. H. Weber*) geigt hat.

Aus dem Satze des Hrn. O. Bonnet kann man den alleineren Mittelwerthsatz, wie folgt, zurückerhalten. Es de in:

$$\int_a^b \varphi(x)f(x)dx = \varphi(a)\int_a^\xi f(x)dx,\ a\leqq\xi\leqq b,$$

also $\varphi(x)$ positiv sein muss und nirgend zunehmen darf, esetzt: $\varphi(x) = \Phi(b) - \Phi(x)$, so darf $\Phi(x)$ nicht abnehmen, die Beschränkung hinsichtlich des Zeichens fällt fort, und fällt auf die Gleichung:

$$\int_a^b \Phi(x)f(x)dx = \Phi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \Phi(b)\int_\xi^b f(x)dx,\ a\leqq\xi\leqq b.$$

$$+u_2v_2+\ldots+u_nv_n = v_1\left\{u_1+u_2+\ldots u_r+\Theta u_{r+1}\right\}$$
$$+v_n\left\{(1-\Theta)u_{r+1}+u_{r+2}+\ldots+u_n\right\},\ 0\leqq\Theta\leqq 1.$$

belsche Satz folgt hieraus, wenn man die v_p und $v_p - v_{p+1}$ nicht iv annimmt, das Glied hinzufügt: $u_{n+1}\,v_{n+1}$, und $v_{n+1}=0$ setzt.

*) Ueber einige bestimmte Integrale, Borch. Journ. LXVIII, 231.

Setzt man jetzt $\Phi(x) = \Psi(a) - \Psi(x)$, so darf $\Psi(x)$ nirge
zunehmen, ebenfalls ohne Beschränkung des Zeichens, u
man fällt auf die nämliche Gleichung:

$$\int_a^b \Psi(x)f(x)dx = \Psi(a)\int_a^\xi f(x)dx + \Psi(b)\int_\xi^b f(x)dx,\ a \leqq \xi \leqq b.$$

Somit ergiebt sich, dass diese Formel stets gilt, wenn nur d
in $f(x)$ multiplicirte Function entweder nirgend wächst od
nirgend abnimmt.

Obschon der Satz des Hrn. O. Bonnet ein anderer is
als der obige Mittelwerthsatz und sich zu ihm wie ein sp
cieller Fall verhält, so habe ich doch geglaubt hier seiner g
denken zu müssen, weil er in der That bei geschickter An
wendung dieselben Dienste leistet, wie der allgemeine Satz.

Dies das Historische über den Satz. Um nun auf d
Prioritätsfrage einzugehen, so meine ich erstens, das
eine Vorlesungsmittheilung nicht als ein
authentische Publication angesehen werde
kann. Ich bekenne mich zu dieser Ansicht, obschon, wen
die gegentheilige Oberhand gewinnen würde, ich einen woh
begründeten Prioritätsanspruch u. A. auf gewisse heut z
Tage viel genannte Principien erheben könnte. Einmal ab
sind die Berichte der Zuhörer häufig ungenau, ja widerspr
chend. Beispielsweise habe ich gerade über jene Weierstras
sche Mittheilung so Verschiedenartiges gehört, dass ich m
heute noch kein Bild von ihr machen kann. Sodann ist billi
zu bedenken, dass ein Autor, der, die Nützlichkeit eines R
sultats erkennend, es dem gesammten fachgenössischen Publ
cum durch eine gedruckte Mittheilung zur Verfügung stell
gegen einen anderen, der sich mit einer gelegentlichen mün

hen Mittheilung begnügt, ganz unverdient benachtheiligt
re, weil die Fertigstellung eines gedruckten Aufsatzes manch-
l viel Zeit erfordert.

Wenn ein Gelehrter sich auf eine derartige mündliche
theilung eines wichtigen Resultats beschränkt, so wird man
liessen, entweder, dass er dessen Bedeutung nicht voll er-
nt, oder, dass ihm aus irgend welchen Gründen Nichts
an liegt, es ordentlich zu publiciren. In letzterem Falle
ldet ihm aber die Wissenschaft sicherlich keinen Dank für
e Entdeckung.

Zweitens glaube ich, dass wenn man hinsichtlich der
rität nicht an gedruckte Publicationen sich hält, es na-
tlich sehr schwer sein wird, historisch festzustellen, bei
zuerst ein neuer Gedanke die Schwelle des Bewusstseins
schritten hat. In dieser mir aufgedrungenen Vertheidigung
nes wohlerworbenen Eigenthums glaube ich anführen zu
en, dass ich schon im Besitz des Satzes war, als ich am
e meines Königsberger Aufenthalts (in den fünfziger Jah-
mich längere Zeit mit Mittelwerthen beschäftigte, wie
nen Freunden aus jener Zeit bekannt ist. Ich kann acten-
ig beweisen, dass der Satz in meinen damaligen Rech-
gen figurirt. Freilich gestehe ich gern, dass ich diesen
nderen Satz aus dem Gesicht verloren. Aber als ich nach
n Hülfssatze forschte, der zum Beweise der verallgemei-
n Fourierschen Formel geeignet wäre, erinnerte ich mich
, dass dergleichen Sätze existiren, so dass ich sehr bald
richtigen Weg einschlug.

Es kommt mir natürlich nicht bei, in Frage zu stellen,
Hr. Weierstrass den Satz mit allen seinen Beziehungen
u gekannt habe, als ich ihn veröffentlichte. So wenig
ele ich daran, dass ich es im Gegentheil befremdlich fin-

den würde, wenn ein Mann, wie er, bei seinen tiefen und u
fassenden Forschungen in der Functionenlehre ein für sie
unentbehrliches Hülfsmittel übersehen hätte.

Allein darauf kommt es bei der Feststellung, wem
Geschichte der Wissenschaft das Erstlingsrecht der Entdecku
zuerkennen soll, durchaus nicht an. Hier kann gerechter We
nur entscheidend sein, wer zuerst den Satz, befried
gend bewiesen, unter Klarlegung seiner wahr
Bedeutung, dem allgemeinen Gebrauch übe
geben hat.

In diesem Sinne glaube ich den Mittelwerthsatz als r
angehörig in Anspruch nehmen zu sollen.

Sitzungsberichte
der Heidelberger Akademie der Wissenschaften
Stiftung Heinrich Lanz
Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse
Abteilung A. Mathematisch-physikalische Wissenschaften
Jahrgang 1913. 7. Abhandlung.

Eine Schrift von Ensheim „Recherches sur les calculs différentiel et intégral" mit einem sich darauf beziehenden, nicht in die „Oeuvres" übergegangenen Brief von Lagrange

analysiert und zum 10. April 1913 herausgegeben

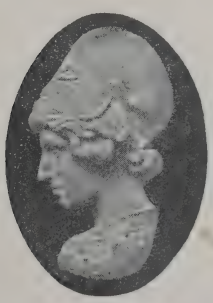
von

K. BOPP, Heidelberg

gefolgt von einem Überblick über die Publikation von Lagrange-Briefen

Eingegangen am 5. März 1913

Vorgelegt von M. Cantor



Heidelberg 1913
Carl Winter's Universitätsbuchhandlung

Verlags-Nr. 896.

Ein für die Geschichte der Analysis zu Ende des 18. Jahrhunderts nicht unwichtiges Dokument soll hier eingereiht werden an seine Stelle in Gestalt eines verschollenen Briefes des großen Meisters. Veranlassung dazu wird uns die hundertste Wiederkehr des Todestags eines der schöpferischsten Geister aller Zeiten, die wir am 10. April d. J. begehen. Wie uns LAGRANGES Biographen[1]) berichten, streiten sich um den Ruhm seiner Abstammung zwei mächtige Nationen; aber auch uns Deutschen gehört er als Nachfolger des gewaltigen EULER in der Leitung der Berliner Akademie (1766—1787), von Friedrich dem Großen berufen. Im Pantheon wird der erlauchte Tote beigesetzt, das unschätzbare Erbe seiner Manuskripte aber wird auf NAPOLEONS Befehl durch den Minister CARNOT für die Pariser Akademie erworben, und die Sorge dafür einer Kommission: LEGENDRE, PRONY, POISSON und LACROIX, anvertraut. In zwei Serien wohlgeordnet befinden sich diese Papiere in der Bibliothek des Instituts. Die erstere umfaßt 10 Bände in f.°, die andere 6 Bände in 4°, und aus ihnen ging die große Ausgabe der „Oeuvres" hervor, welche unter der Redaktion von J. M. SERRET und später von G. DARBOUX von 1867 an zu erscheinen begann. Wie „rochers de bronce" ragen darin LAGRANGES Hauptwerke, und den vorläufigen Abschluß des großartigen Unternehmens bildeten die im XIII. und XIV. Bande herausgekommenen Briefe (1892). Aber gerade die Kenntnis der letzteren hat sich im lebendigen Organismus der Wissenschaft in den letzten zwanzig Jahren bedeutend vermehrt. Wir denken dabei an die von RICCARDI 1897 herausgegebenen Briefe an PAOLI[2]),

[1]) Im Anhang geben wir eine Aufzählung der uns bekannt gewordenen LAGRANGE-Biographieen.

[2]) Prof. Comm. PIETRO RICCARDI, Alcune lettere die LAGRANGE, di LAPLACE e di LACROIX dirette al mathematico PIETRO PAOLI e sette lettere del PAOLI al Prof. PAOLO RUFFINI. In Modena, col tipi della società tipografica antica tipografia soliani 1897, Estratto dalle memorie della R. Academia di Scienze, lettere ed. arti in Modena, Serie III, Vol. I (Sezione di Scienze) pag. 105—129.

sowie an die von G. Loria neulich aufgefundenen und in der neuen Fagnano-Ausgabe jüngst veröffentlichten etlichen zwanzig zwischen Lagrange und Fagnano gewechselten Briefe aus der Zeit vom 3. Juli 1754 bis 18. Mai 1759.[3]) — Um aber auf unsern Beitrag zurückzukommen, so suchen wir, wenn wir den vorhin genannten, von Ludovic Lalanne 1892 herausgegebenen XIV. Band der „Oeuvres" aufblättern und die sehr sorgfältig gearbeitete „Table et sommaires des lettres" durchgehen, vergeblich nach einem Korrespondenten Ensheim, und doch existiert eine von uns aufgefundene kleine Schrift: „Recherches sur les calculs différentiel et intégral par le citoyen Ensheim, A Paris, De l'imprimerie d'Agasse, rue de Poitevins, n.° 13, An VII."[3a])

Auf Seite 28 derselben finden wir unsern Brief:

Lettre du citoyen Lagrange à l'auteur.

Paris, le 3 frimaire, an 7. [23. Nov. 1799].

Je vous remercie de la confiance dont vous m'avez honoré en me communiquant vos recherches sur le calcul différentiel. Ma réponse a été retardée par des occupations indispensables, qui ne m'ont pas permis de les lire plutôt. Je vous prie d'en recevoir mes sincères excuses. Votre manière d'envisager ce calcul a beaucoup de rapport à celle que Landen, géomètre Anglois, a donnée dans l'ouvrage intitulé: Residual analysis, imprimé à Londres en 1764; mais je dois vous avouer que ni l'une ni l'autre ne me paroissent tout-à-fait exemptes des difficultés qu'on rencontre dans les principes du calcul différentiel; cependant il est possible que votre analyse soit plus satisfaisante pour beaucoup de personnes que l'analyse ordinaire des infiniments petits et des limites, et sous ce point de vue elle peut être utile au progrès des sciences. Recevez les assurances des sentiments remplis d'estime et de considération que vous m'avez inspirés.

Signé Lagrange.

[3]) Opere mathematiche del marchese Giulio Carlo de' Toschi di Fagnano pubblicate sotto gli Auspici della società Italiana per il progresso delle scienze dai soci V. Volterra, G. Loria, D. Giamboli, 3 Vols. Milano-Roma-Napoli, Società editrice Dante Alghieri di Albrighi, Segati e. C. 1912.

[3a]) Außer unserm Exemplar kennen wir ein solches in der Berliner Königl. Bibliothek; eines befand sich in Chasles' Bibliothek (Enestrom).

Lagrange hat sich also hier ähnlich wie in dem von Genocchi (tome IX, pag. 760 der Atti de l'Académie des sciences de Turin) herausgegebenen Briefe an Odoardo Gherli („dominicain, mathématicien, né à Guastalla en 1730, mort à Parme en 1780") zu einem ihm übersandten Werke geäußert. Auch dieser zwanzig Jahre jüngere Brief war im VII. Bande der „Elementi delle mathematiche pure" Gherlis gedruckt worden. Vgl. S. 271 des genannten XIV. Bandes der „Oeuvres". Letzterer vergleichsweise herangezogene Brief ist datiert Berolino, 5. juglio 1776. — Wir analysieren im folgenden eingehend das etwas schwer lesbare, interessante Werkchen, auf das sich Lagranges Brief bezieht und dessen methodisch wertvollen Charakter er ausdrücklich anerkennt. Wir haben aber noch den sachlichen Rahmen zu fügen, in dem es erscheinen muß, um ganz gewürdigt werden zu können. Dafür aber liegen im 26. Abschnitt von Cantors IV. Bande, wo G. Vivanti die Grundlagen der Infinitesimalrechnung während des 18. Jahrhunderts bespricht, sowie im 7. Kapitel, § 3, „Der weitere Ausbau der Differential- und Integralrechnung" von H. Wieleitners Geschichte der Mathematik, II. Teil (Sammlung Schubert LXIII), sehr schätzbare Vorarbeiten vor. Die Veranlassung zur Entstehung des Werkchens von Ensheim gab, wie auch für Carnots Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal von 1797, wohl die von der mathematisch-physikalischen Klasse der Berliner Akademie für das Jahr 1784 gestellte Preisfrage, welche lautet[4]): „Man verlangt eine lichtvolle und strenge Theorie dessen, was man Unendlich in der Mathematik nennt. Die höhere Geometrie benützt häufig unendlichgroße und unendlichkleine Größen; jedoch haben die alten Gelehrten das Unendliche sorgfältig vermieden, und einige berühmte Analysten unserer Zeit bekennen, daß die Wörter unendliche Größe widerspruchsvoll sind. Die Akademie verlangt also, daß man erkläre, wie aus einer widersprechenden Annahme so viele richtige Sätze entstanden sind, und daß man einen sicheren und klaren Grundbegriff angebe, welcher das Unendliche ersetzen dürfe, ohne die Rechnungen zu schwierig oder zu lang zu machen."

Direktor der Berliner Akademie aber war damals eben Lagrange. Er beteiligte sich beginnend mit jener kurzen Note (Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal, Misc. Taur. II,

[4]) Nouv. Mém. Berl. 1784 (publ. 1786) p. 12—13.

1760—1761, P. III, p. 17—18, Oeuvres T. VII, Paris 1877, p. 597—599), welche durch den Aufsatz: De l'infini absolu considéré dans la grandeur, Misc. Taur., T. II, 1760—1761, P. III, p. 1—45 seines alten Lehrers GERDIL veranlaßt war, lebhaft an den Bestrebungen des Jahrhunderts zur strengen Begründung der höheren Analysis. LAGRANGE vertrat darin noch die Auffassung von der Ausgleichung der Fehler in der Infinitesimalmethode. Später aber kam er auf den Gedanken, diese Rechnung durch eine strengere zu ersetzen.[5]) Den Gedanken von der Zerstörung unexakter Voraussetzungen im Verlaufe der Rechnung hatte eine Generation früher schon BERKELEY in seiner Schrift: The Analyst von 1734 ausgesprochen. Ob LAGRANGE sie gekannt, weiß man nicht. Die Ideen seines neuen Standpunkts gab er in kurzem Exposé schon 1772 in dem Aufsatz: Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables, Oeuvres T. III, Paris 1869, p. 441—476). Aber erst 1797 entwickelte er sie in seiner berühmten Théorie des fonctions analytiques, wo er unter Vermeidung des Unendlichkleinen, aller Grenzbetrachtungen und des Geschwindigkeitsbegriffs der Fluxionsmethode, allein ausgehend von der TAYLORschen Reihe, aus deren Koeffizienten sich sämtliche Ableitungen ohne weiteres ablesen lassen, einen rein algebraischen Aufbau der Analysis gab. Der erste, der diesen neuen Weg versuchte, war aber der Engländer JOHN LANDEN gewesen, dessen Arbeiten LAGRANGE in unserm Briefe zum Vergleich mit der ENSHEIMS heranzieht. Seine (LAGRANGES) Stellung diesem Vorgänger gegenüber wird am besten durch die betreffende Stelle aus der Introduction zur Théorie des fonctions analytiques gekennzeichnet: „C'est pour prévenir ces difficultés qu'un habile géomètre anglais[6]) qui a fait dans l'Analyse des decouvertes importantes, a proposé dans ces derniers temps de substituer à la méthode des fluxions, jusqu'alors suivie scrupuleusement par tous les géomètres anglais, une autre méthode purement analytique, et analogue à la mé-

[5]) Über LAGRANGES Metaphysik siehe auch die Lezioni di calcolo sublime von BORDONI 1831 und die betreffenden Schriften von BRUNACCI und CONTI.

[6]) Für seine Entdeckungen in der Theorie der elliptischen Funktionen vgl. LEO KOENIGSBERGER „Zur Geschichte und Theorie der elliptischen Transzendenten in den Jahren 1826—1829“ (104 S.) gr. 8°, Leipzig 1879 und KOENIGSBERGERS große JACOBI-Biographie. Anm. d. Herausgebers.

thode différentielle, mais dans laquelle, au lieu de n'employer que les différences infiniment petites ou nulles des quantités variables, on emploie d'abord des valeurs différentes de ces quantités, qu'on égale ensuite, après avoir fait disparaître par la division le facteur que cette egalité rendrait nul. Par ce moyen, on évite à la vérité les infiniments petits et les quantités évanouissantes; mais les procédés et les applications du calcul sont embarassants et peu naturels, et l'on doit convenir que cette manière de rendre le Calcul différentiel plus rigoureux dans ses principes lui fait perdre ses principaux avantages, la simplicité de la méthode et la facilité des opérations. (Voir l'Ouvrage intitulé The residual analysis a new branche of the algebraic art, by JOHN LANDEN, London 1764, ainsi que le Discours publié par le même Auteur, en 1758, sur le même objet." [A discours concerning the residual analysis].

Nach diesen Worten scheint uns aber die Kritik VIVANTIS (CANTOR IV, p. 661) nicht zutreffend. Worauf es ankommt, ist, daß der verschwindende Faktor durch Division herausfällt, und nur der Mechanismus der Rechnung wird zu kompliziert. Hübsche Beispiele vom leicht noch Erreichbaren bietet uns ENSHEIM z. B. mit seiner Rektifikation von NEILS Parabel.

So sehen wir im 18. Jahrhundert zwei große Tendenzen deutlich hervortreten: einerseits, nachdem der Verschmelzungsprozeß zwischen Infinitesimalkalkul und Fluxionsmethode sich vollzogen, wobei BERNOULLIS „Anlagen der Variabeln" modern anmuten und EULERS und TORELLIS Nullen kühl lassen, das Festhalten an den Grenzmethoden, wie wir es bei D'ALEMBERT, CARNOT, KÄSTNER, SEGNER finden, andererseits das Suchen nach einer neuen Begründung, wie es uns bei LANDEN, LAGRANGE, ENSHEIM und dem Übersetzer von LAGRANGES Funktionenlehre GRÜSON entgegentritt, denn nicht alle tiefer dringenden Geister waren in ihren Zweifeln so leicht zu beruhigen wie etwa BOSSUT, der uns in seinem: Essai sur l'histoire générale des mathématiques, tome second, pag. 142, berichtet: „Je confiai mon embarras à un fameux géomètre (FONTAINE) qui me répondit: Admettez les infiniments petits comme hypothèse, étudiez la pratique du calcul, et la foi vous viendra." La foi est venue en effet: je me suis convaincue que la métaphysique de l'analyse infinitésimale est la même que celle de la méthode d'exhaustion des anciens géomètres."

Wenn auch, wie Wieleitner sich ausdrückt, in der späteren Entwicklungsgeschichte der Begründung des Differentialkalkuls nicht Lagranges algebraische Auffassung, sondern die Methode der Grenzen das Feld behauptete, so glauben wir doch in Ensheims Versuche eine noch heute lesenswerte Urkunde dieser Bestrebungen ans Licht zu bringen; hinsichtlich seines Algorithmus aber soll dadurch auch einige Aufhellung auf Fontaines Operationen geworfen werden, den er zitiert, und dessen von der herkömmlichen abweichende Bezeichnungsweisen noch recht wenig klargestellt sind (vgl. C. R. Wallner, Cantor IV, p. 899 und 588). Interessant aber werden für uns alle um Lagranges „Théorie des fonctions analytiques" sich gruppierenden Arbeiten immer deshalb bleiben, weil sie und die Kritik daran den Ausgangspunkt einer neuen Epoche bildeten. S. Dickstein in seiner Arbeit: „Zur Geschichte der Prinzipien der Infinitesimalrechnung" (Abhandl. zur Geschichte der Mathematik, 9. Heft, 1899: Die Kritiker der „Théorie des fonctions analytiques" von Lagrange sagt darüber (S. 78): „Das unmittelbare Ziel, welches Lagrange durch seine Methode zu erreichen suchte, wurde zwar nicht erreicht, aber die Potenzreihe, der Ausgangspunkt seiner Betrachtungen, wurde bekanntlich in einer neuen, durch Cauchys Vorarbeiten vorbereiteten präziseren Auffassung das Fundament der modernen Theorie der analytischen Funktionen, wie sie uns in den Schöpfungen von Weierstrass und Méray jetzt fertig dasteht".

Inhaltsübersicht der Schrift von Ensheim:

Recherches sur les calculs différentiel et intégral, A Paris De l'imprimerie d'Agasse, rue des Poitevins, No. 13, An VII.

Sein Programm entwickelt der Verfasser in den einleitenden Worten:

Si le calcul de l'infini a ouvert une carrière immense aux géomètres, on ne peut pas se dissimuler que les principes n'en ont point cette évidence sans laquelle les mathématiques ne seroient qu'un empirisme intellectuel. La theorie des fluxions a l'inconvénient qu'elle suppose là de l'espace, du mouvement et du temps, notions plus abstraites peut être que toute la science des quantités. Le systême de Leibnitz est une espèce d'hiérarchie d'infinis, dont

les inférieurs s'éclipsent en présence de ceux d'un rang plus élevé; ce qui ne peut que rebuter les commençans, quand au lieu de démonstrations rigoureuses, ils ne trouvent, pour ainsi dire, qu'une approximation. D'ailleurs, si l'analyse a l'avantage de faciliter les recherches, il faut que ses découvertes soient susceptibles d'être démontrées synthétiqement. La méthode suivante reduit tout aux principes simples de l'algèbre élémentaire, sans avoir jamais recours aux notions confuses de l'infini: elle embrasse le calcul des différences en général, et ce ne sont que des conditions particulières qui en constituent la branche des différences infinitésimales.

Für seine algebraische Begründung der Analysis geht Ensheim aus von der geometrischen Reihe: (Principe générale): $\frac{v^m - 1}{v - 1} = v^{m-1} + v^{m-2} + v^{m-3} + + \ldots v + 1$, wo m ganz und positiv ist. Die rechte Seite dieser Gleichung enthält m Terme, also hat man:

$$\left[\frac{v^m - 1}{v - 1}\right]_{v=1} = m.$$

Nun seien in nebenstehender Figur PM und pm zwei Ordinaten einer beliebigen Kurve, $pm = y$, $PM = y\dot{y}$, die Differenz dieser beiden Ordinaten mn oder d(y) ist $y(\dot{y} - 1)$. Der punktierte Buchstabe bedeutet einen Faktor, welcher je nach den Bedingungen der Aufgabe bestimmt werden soll.

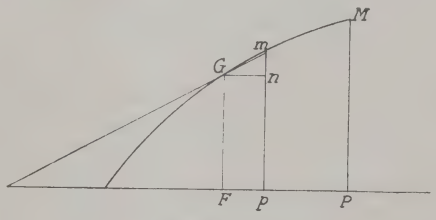


Fig. 1.

Diese einfache Definition wird zur Ableitung der ersten Differentialformeln benützt. Die Differenz von y^m ist

$$d(y^m) = y^m \cdot \dot{y}^m - y^m = y^m(\dot{y}^m - 1) = y^{m-1}(\dot{y}^{m-1} + \dot{y}^{m-2} + \ldots \dot{y} + 1) \times y(\dot{y} - 1).$$

Wenn nun die Problemstellung verlangt, daß $\dot{y} = 1$, so hat man:

$$d(y^m) = m y^{m-1}(\dot{y} - 1) y = m y^{m-1} d(y).$$

Es sei m gebrochen $= \frac{1}{n}$, dann wird $d(y^m) = d\left(y^{\frac{1}{n}}\right) = y^{\frac{1}{n}}\left(\dot{y}^{\frac{1}{n}} - 1\right)$

$$= \frac{y(\dot{y} - 1)}{y^{\frac{n-1}{n}}\left(\dot{y}^{\frac{n-1}{n}} + \dot{y}^{\frac{n-2}{n}} + \ldots \dot{y}^0\right)}.$$

Um aber letztere Gleichheit, die sich auf

$$\frac{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}{\dot{y}-1}=\frac{1}{\dot{y}^{\frac{n-1}{n}}+\dot{y}^{\frac{n-2}{n}}+\dot{y}^{\frac{n-3}{n}}\ldots\dot{y}^{\frac{n-n}{n}}}$$

reduziert, zu verifizieren, hat man nur zu bedenken, daß im Nenner eine geometrische Reihe steht, deren Quotient $\dot{y}^{\frac{1}{n}}$, deren Anfangsglied 1 ist, also ist deren Summe $\frac{\left(\dot{y}^{\frac{1}{n}}\right)^n-1}{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}=\frac{\dot{y}-1}{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}$, und man hat jetzt die Identität $\frac{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}{\dot{y}-1}=\frac{1}{\frac{\dot{y}-1}{\dot{y}^{\frac{1}{n}}-1}}$.

Die Differenz des Produktes ist $d(xy)=xy(\dot{x}\dot{y}-1)$, aber $\frac{xy(\dot{y}-1)}{xy(\dot{x}\dot{y}-1)}=\frac{\dot{y}-1}{\dot{x}\dot{y}-1}$ einerseits, $=\frac{x\,dy}{d(xy)}$ andererseits oder $d(xy)=x\,dy\,\frac{(\dot{x}\dot{y}-1)}{\dot{y}-1}=x\,dy\left(\dot{x}+\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1}\right)=\dot{x}\,x\,dy+y\,dx$, wenn man im zweiten Posten für dy seinen Wert einführt. Analog („en procedant de la même manière") gewinnt man für drei Faktoren: $d(xyz)=x\dot{x}\dot{y}\,y\,dz+\dot{x}\,x\,z\,dy+z\,y\,dx=xyz(\dot{x}\dot{y}\dot{z}-1)$; an Stelle von x tritt hier xy, an Stelle von y das z.

Die Differenz des Quotienten ergibt $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{x\dot{x}}{y\dot{y}}-\frac{x}{y}$ $=\frac{x(\dot{x}-\dot{y})}{y\dot{y}}$. Aber die Analogie $\frac{x(\dot{x}-1)}{y}:\frac{x(\dot{x}-\dot{y})}{y\dot{y}}=\dot{x}-1:\frac{\dot{x}-\dot{y}}{\dot{y}}$ $=\frac{dx}{y}:d\left(\frac{x}{y}\right)$ liefert $d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{dx}{y}\cdot\frac{\dot{x}-\dot{y}}{\dot{y}(\dot{x}-1)}=\frac{dx}{y\dot{y}}\left(1-\frac{(\dot{y}-1)}{(\dot{x}-1)}\right)=\frac{dx}{y\dot{y}}$ $-\frac{x\,dy}{y^2\dot{y}}=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2\dot{y}}$.

Differential des Logarithmus.[7]) Sei $x=Ly$, so hat man $dx=d(Ly)=Ly\dot{y}-Ly=L\dot{y}$. Ebenso $dL(y^n)=L(\dot{y}^n)=n\,L(\dot{y})$ $=n\,d(L\,y)$. Wenn man eine konstante Beziehung zwischen dem Faktor $\dot{y}$ und seinem Logarithmus voraussetzt, etwa $L\dot{y}=a(\dot{y}-1)$ so hat man $dL(y^n)=nL\dot{y}=na(\dot{y}-1)=nay\frac{(\dot{y}-1)}{y}=\frac{na\,dy}{y}$. Aber $d(y^n)=y^{n-1}(\dot{y}^{n-1}+\dot{y}^{n-2}+\ldots 1)\,dy$ und folglich, wenn

[7]) Vergl. dazu die Ableitung des Differentials eines Logarithmus in den Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen, welche G. A. Kästner 1761 herausgab. Reproduziert von Vivanti in Cantor, Vorlesungen IV, S. 672.

man $\dot{y} = 1$ setzt $d(y^n) = n\,y^{n-1}\,dy = y^n \cdot \frac{n\,a}{a\,y}\,dy = \frac{y^n}{a}\,d\,L\,y^n = y^n\,d\,L\,y^n$, wenn man $a = 1$ annimmt. So sieht man allgemein, wenn man den Differenzenfaktor einer Funktion von beliebigen Variabeln der Einheit gleichsetzt, man das Differential einer Funktion erhält, wenn man sie selbst multipliziert mit dem Differential ihres Logarithmus,

Logarithmische Differentiation: $\varphi'(x) = \varphi(x)\,d\log[\varphi(x)]$

z. B. $d(x\,y\,z) = x\,y\,z\,d\,L(x\,y\,z) = x\,y\,z\,d[L(x) + L(y) + L(z)] = x\,y\,z\left(\frac{d\,x}{x} + \frac{d\,y}{y} + \frac{d\,z}{z}\right) = y\,z\,d\,x + x\,z\,d\,y + x\,y\,d\,z$. Ferner $d(a^x) = a^x\,d\,L(a^x)$, aber $L(a^x) = x\,L\,a$, also $d(a^x) = a^x\,L\,a$.

Ebenso $d(x^y) = x^y\,d\,L\,x^y = x^y\,d(y\,L\,x) = x^y\left(d\,y\,L\,x + y\frac{d\,x}{x}\right)$.

Um die zweiten Differenzen zu finden, hat man nur drei konsecutive Ordinaten in Betracht zu ziehen, y, $y\,\dot{y}$, $y\,\dot{y}\,\ddot{y}$, zieht man die erste von der zweiten ab, so kommt $y(\dot{y} - 1)$ und durch Subtraktion der zweiten von der dritten $y\,\dot{y}(\ddot{y} - 1)$, somit ist die zweite Differenz $d^2\,y = y\,\dot{y}(\ddot{y} - 1) - y(\dot{y} - 1) = y(\dot{y}\,\ddot{y} - 2\,\dot{y} + 1)$. Allgemein wird die n-te Differenz von y oder

$$d^n\,y = y\left\{\left(y \cdot y^{n-1} \,..\, \ddot{y}\,\dot{y}\right) - \frac{n}{1}\left(y \cdot y^{n-2} \,..\, \ddot{y} \cdot \dot{y}\right) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}\left(y^{n-2} \,..\, \ddot{y}\,\dot{y}\right) - + \pm n\,y \mp 1\right\}.$$

Die n-te Differenz von y^m oder

$$d^n(y^m) = y^m\left\{\left(\bar{y}\,\bar{\bar{y}} \,..\, y^n\right)^m - \frac{n}{1}\left(\bar{y}\,\bar{\bar{y}} \,..\, y^{n-1}\right)^m + \frac{n}{1}\frac{(n-2)}{2}\left(\bar{y}\,\bar{\bar{y}} \,..\, y^{n-2}\right)^m - + \,..\, \pm n\,\bar{y} \mp 1\right\},$$

wo die Koeffizienten die der Newton'schen Binomialformel sind und die Zahl der Faktoren gemäß den Exponenten in dieser Formel abnimmt, sodaß man bei $x = 1$ und angenommener Gleichheit aller übrigen Faktoren $x.\,\dot{x}\,..$ erhalten würde: $d^n\,x = (\dot{x} - 1)^n$. Es handelt sich jetzt darum, die Anwendung und Berechtigung dieser Prinzipien zunächst am Tangentenproblem nachzuweisen, und zwar ist in der „Theorie des tangentes" zunächst die Subtangente TP zu bestimmen (Fig. 2). Es sei $PM = y$, $p\,m = \dot{y}\,\dot{y}$, zieht man $M\,n$ parallel zur Abszissenachse, so ist $m\,n = y(\dot{y} - 1)$, $M\,n = P\,p = x(\dot{x} - 1)$. In den beiden ähnlichen Dreiecken $M\,m\,n$ und $M\,P\,T$ hat man $y(\dot{y} - 1) : x(\dot{x} - 1) = y : PT$, also $PT = \frac{x(\dot{x} - 1)}{\dot{y} - 1}$, vermöge der Gleichung der Kurve

kann man aber immer den Differenzenausdruck $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1}$ eliminieren, so daß der Ausdruck von PT eine Funktion von x, y, $\dot{y}$ wird. Setzt man nun hierin $\dot{y}=1$ und zieht vom so gefundenen Punkte T die Gerade TM, so muß diese Kurventangente sein, denn wenn sie die Kurve noch in einem andern Punkte schnitte, so könnte $\dot{y} \neq 1$ sein; setzt man zur Abkürzung $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1}=p$, so ist die Subtangente $PT = p\,x$, also der Ausdruck der Subnormale unmittelbar $\frac{y^2}{p\,x}$. (Die Höhe im rechtwinkligen Dreieck ist mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.)

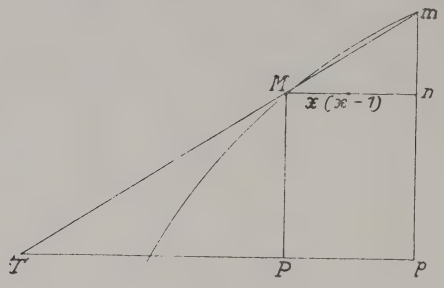


Fig. 2.

1. Beispiel: Die Parabel; ihre Gleichung $a\,x = y^2$ gibt $a\,x(\dot{x}-1) = y^2(\dot{y}^2-1)$ und $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1} = \frac{y^2(\dot{y}+1)}{a\,x} = \dot{y}+1$ also $TP = (\dot{y}+1)\,x$ für die Subsekante und für $\dot{y}=1$, $2\,x$ für die Subtangente und für die Subnormale $\frac{a\,x}{2\,x} = \frac{a}{2}$.

2. Die Kreisgl. ist $y^2 = r^2 - x^2$, also $y^2(\dot{y}^2-1) = -x^2(\dot{x}^2-1)$, $\frac{\dot{x}-1}{\dot{y}-1} = -\frac{y^2}{x^2}\frac{(\dot{y}+1)}{(\dot{x}+1)}$ und $\frac{x(\dot{x}-1)}{x-1}$ für die Subsekante $= -\frac{y^2}{x}\frac{(\dot{y}+1)}{(\dot{x}+1)}$ und für $\dot{y}=1$, $\dot{x}=1$ für die Subtangente der Ausdruck $-\frac{y^2}{x}$.

3. Die logarithmische Kurve hat die Gleichung $x = L\,y$, also $x(\dot{x}-1) = L\,\dot{y}$ und $PT = \frac{x(\dot{x}-1)}{\dot{y}-1} = \frac{L\,\dot{y}}{\dot{y}-1}$ („quantité qui n'est pas affecté des variables x et y"). Wenn also der Faktor $\dot{y}-1$ konstant ist, so wird es auch die Strecke PT, ganz abgesehen von den übrigen Eigenschaften des logarithmischen Systems. Setzen wir also die Subtangente an irgend einer Ordinate $= a$, so muß die Subsekante $\gtrless a$ sein, und da sie konstant ist, so wird sie nirgends $= a$ sein. Wo man also auch $PT = a$ macht, wird TM Tangente sein, da aber die Subtangente nicht gleichzeitig zwei verschiedene

Werte haben kann, so muß a ihr konstanter Wert sein. Diese Größe ist willkürlich, und im System der natürlichen Logarithmen macht man sie gleich 1. Wenn man also $\dot{y} - 1$ gleich einer sehr kleinen Größe nimmt, so wird die Subsekante sich von der Subtangente nicht merklich unterscheiden, was die Proportion veranlaßt $1 : y = x(\dot{x} - 1) : y(\dot{y} - 1) = dLy : y(\dot{y} - 1) = L\dot{y} : y(\dot{y} - 1)$ also $L\dot{y} = dx = \dot{y} - 1$. Dies gibt ein sehr einfaches Mittel, eine Zahl durch ihren Logarithmus und umgekehrt auszudrücken. Es sei $\dot{y} = m = (1 + b)$, b eine sehr kleine Größe, sei Logarithmus von m. Vermöge der Natur der Kurve kann man eine beliebige Ordinate durch die Größe $(1 + b)$ ausdrücken, erhoben zu einer gewissen Potenz. Es sei also $y = (1 + b)^p$, dann hat man $x = Ly = pL(1 + b) = pb$, da aber b sehr klein ist, muß p sehr groß sein, damit das Produkt pb gleich der endlichen Größe x wird. Nun ist aber $(1+b)^p = 1 + pb + \frac{p(p-1)}{1\cdot 2} b^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1\cdot 2\cdot 3} b^3 + \text{e. c. t.}$; da p sehr groß ist, so kann man im Verhältnis zu ihm alle endlichen Zahlen vernachlässigen und jeden Faktor $p - 1$, $p - 2$ e. c. t. als ihm gleich betrachten, also $y = (1 + b)^p = 1 + \frac{pb}{1} + \frac{p^2 b^2}{2} + \frac{p^3 b^3}{2\cdot 3} + \ldots \frac{p^q b^q}{2\cdot 3 \ldots q} + \text{e. c. t.} = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{2\cdot 3} + \ldots \frac{x^q}{2\cdot 3 \ldots q} + \text{e. c. t.}$ (Logarithmische Reihe.) Durch die umgekehrte Operation kann man auch einen Logarithmus ausdrücken, durch die Zahl, die ihm entspricht. Setzen wir $y = (1+b)^p = 1 + n$, so hat man $b = (1 + n)^{\frac{1}{p}} - 1$; und $x = pb = p(1 + n)^{\frac{1}{p}} - p$. Durch Entwicklung des Binoms kommt: $p(1 + n)^{\frac{1}{p}} = p\left\{1 + \frac{1}{p}n + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)}{1\cdot 2} n^2 + \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right)}{1\cdot 2\cdot 3} n^3 + \ldots \frac{\frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\left(\frac{1}{p} - 2\right)\ldots\left(\frac{1}{p} - m + 1\right) n^m}{1\cdot 2\cdot 3 \ldots m}\right\}$

$= p\left\{1 + \frac{n}{p} + \frac{1}{1}\left(\frac{1-p}{2p^2}\right) n^2 + \frac{1}{1}\frac{(1-p)(1-2p)}{1\cdot 2\cdot 3\, p^3} n^3 + \ldots + \frac{1}{1}\frac{(1-p)\ldots(1-mp+p)}{1\cdot 2 \ldots m\, p^m} n^m\right.$, da aber p sehr groß, so reduziert sich letzterer Ausdruck auf $p + n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \ldots - \frac{n^{2m}}{2m} + \frac{n^{2m+1}}{2m+1}$, also $x = p(1+n)^{\frac{1}{p}} - p = n - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} \ldots - \frac{n^{2m}}{2m} + \frac{n^{2m+1}}{2m+1} = y$ 1

$$-\frac{(y-1)^2}{2} \ldots + \frac{(y-1)^{2m-1}}{2m-1} - \frac{(y-1)^{2m}}{2m} + \ldots = (y-1)$$
$$\left\{\left(\frac{3-y}{1\cdot 2}\right) + \frac{(y-1)^2}{3\cdot 4}(7-3y) + \frac{(y-1)^4}{5\cdot 6}(11-5y) \ldots + \frac{(y-1)^{2m-2}}{2m(2m-1)}\right.$$
$$\left.[(4m-1)-(2m-1)y]\right\};$$

in dieser Form sind immer zwei Glieder zusammengenommen. Nun hat jede Zahl außer dem soeben gefundenen Logarithmus noch unendlich viele imaginäre. In der Tat, die Gleichung $(1+b)^p - y = o$ hat p-Wurzeln, darunter höchstens zwei reelle, also wenigstens $p-2$ imaginäre. Außerdem war $Ly = pb$, wenn also p reell und sehr groß ist, so ist der Logarithmus von y imaginär, wenn $(1+b)$ imaginär ist; es gibt also mindestens $p-2$ imaginäre Logarithmen.

Die imaginäre Größe $(a+b\sqrt{-1})^{c+d\sqrt{-1}}$ ist zurückführbar auf die Form $A+B\sqrt{-1}$. Sei nun $a+b\sqrt{-1} = m$, $c+d\sqrt{-1} = n$, ferner setzen wir $m-1 = p$; es ist $L(a+b\sqrt{-1})^{c+d\sqrt{-1}}$
$= (c+d\sqrt{-1})\,L(a+b\sqrt{-1}) = n\,Lm = np\left(1-\frac{p}{2}+\frac{p^2}{3}\ldots\right.$
$\left.-\frac{p^{2q-1}}{2q}+\frac{p^{2q}}{2q+1}\right.$, e. c. t. Setzen wir $x = n\,Lm$, so wird bei $x = n\,Lm = Ly$, die Größe $m^n = y = 1+\frac{n\,Lm}{1}+\frac{(n\,Lm)^2}{1\cdot 2}\ldots$
$+\frac{(n\,Lm)^\gamma}{\gamma}$ e. c. t. $= 1+np\left(1-\frac{p}{2}+\ldots\frac{p^{2q}}{2q+1}+\ldots\right)+\frac{n^2p^2}{2}\left(1-\frac{p}{2}\right.$
$\left.+\ldots\frac{p^{2q}}{2q+1}+\ldots\right)^2\ldots+\frac{n^n p^n}{1\cdot 2\ldots n}\left(1-\frac{p}{2}\ldots\frac{p^{2q}}{2q+1}+\text{e. c. t.}\right)^n+\ldots$
e. c. t., eine Formel, in der alle Exponenten reell sind. Man weiß andererseits, daß zwei Faktoren der Form $A'+B'\sqrt{-1}$ ein Produkt derselben Form geben; da nun np auf diese Form gebracht werden kann, so kann jeder Term unserer Reihe auf sie zurückgeführt werden, ebenso wie auch die Summe aller Terme.

Wir haben uns einen Augenblick bei den Logarithmen aufgehalten, um zu zeigen, daß (die) elementare Analyse genügt, um alle ihre Eigenschaften abzuleiten.

Wir bemerken noch, daß man die Differenz beliebiger Ordnung reduzieren kann, wenn man $dx = dLy$ konstant nimmt. In der Tat, wenn man die Abszissen in arithmetischer Progression nimmt, so stehen die Ordinaten in geometrischer y, $y\dot{y}$ und $y\dot{y}\ddot{y}$ und es ist $\dot{y} = \ddot{y}$ also $d^2y = y(\dot{y}\ddot{y} - 2\dot{y} + 1) = y(\dot{y}^2 - 2\dot{y} + 1) = y(\dot{y}-1)^2$, ebenso $d^n(y) = y(\dot{y}-1)^n$ und $d^n(y^m) = y^m(\dot{y}^m - 1)^n$, wenn man

also $x = L\,y$ nimmt, so wird $d(y) = y\,dx$, $d^2(y) = y\,(dx)^2$, $d^n(y) = y\,(dx)^n$ und wenn wir anstelle von y, y^m setzen $d^n(y^m) = [d\,(L\,(y^m)]^n \cdot y^m = y^m \cdot [d\,(m\,L\,y)]^n = m^n \cdot y^m \cdot (dx)^n$.

Es soll nun der allgemeine Ausdruck des Oskulationsradius aufgestellt werden. Es sei die Ordinate der Kurve im Punkte $M = MP$, der Oskulationsradius MK. In den ähnlichen Dreiecken MPm und MQK hat man $y : n = u : r$, da nun r konstant sein muß in zwei verschiedenen Lagen, und $d(u) = d(y)$, so hat man $d\left(\frac{u}{r}\right) = \frac{dy}{r} = d(y:n)$, also $r = \frac{dy}{d(y:n)}$ und $u = \frac{y\,dy}{n\,d(y:n)}$.

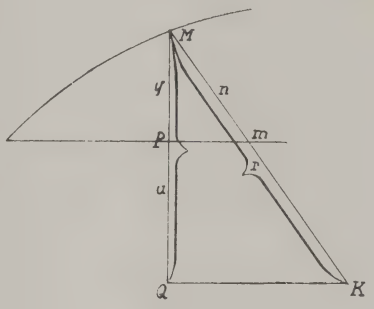


Fig. 3.

Wenn man im Resultat dieser Operationen die Differenzenfaktoren der Einheit gleichsetzt, so erhält man den Oskulationsradius; macht man nur $\dot{y} = 1$ und läßt $\dot{x}$ bestehen, wird ein Kreis erhalten des Radius r, Zentrum K, wo zwei gleiche Kreisordinaten in den Schnittpunkten mit der Kurve verschiedenen Abszissen entsprechen. Wenden wir unsere Methode an, so ergibt sich $r = \frac{d(y)\,n^2 \cdot \dot{n}}{n\,d(y) - y\,d(n)}$; nach Erweiterung mit $n\,(\dot{n}+1)$, $r = \frac{n^3\,(\dot{n}+1)\,\dot{n}\,d(y)}{n^2\,(\dot{n}+1)\,dy - y\,d(n^2)}$ (der zweite Posten im Nenner, weil $n \cdot n\,(\dot{n}+1)\,(\dot{n}-1) = d(n^2)$.

Vermöge der Kurvengleichung kann man aber immer n^2 und $d(n^2)$ in Funktion von y und $\dot{y}$ ausdrücken. Man wird d(y) eliminieren, um r in bestimmten Größen zu erhalten.

Die Gleichung der Apollon. Parabel ist $2ax = y^2$; die Subnormale (oben bestimmt) $= a$ und $n^2 = y^2 + a^2$, $d(n^2) = y\,(\dot{y}+1)\,dy$ (eigentlich ja $y^2\,(\dot{y}^2 - 1)$, also

$$r = \frac{n^3\,(\dot{n}+1)\,\dot{n} \cdot dy}{n^2\,(\dot{n}+1)\,dy - y^2\,(\dot{y}+1)\,dy} = \frac{n^3\,(\dot{n}+1)\,\dot{n}}{n^2\,(\dot{n}+1) - y^2\,(\dot{y}+1)}$$ und

wenn wir $\dot{y} = \dot{n} = 1$ setzen $r = \frac{n^3}{n^2 - y^2}$ und $u = \frac{n^2\,y}{a^2}$ (aus ähnlichen Dreiecken), also $u = \frac{(a^2+y^2)\,y}{a^2} = \frac{y}{a}\,(2x + a)$.

Die Mittelpunktsgleichung der Ellipse ist: $y^2 = pa - \frac{p\,x^2}{a}$, also die Subnormale: $[da,\ y^2\,(\dot{y}^2 - 1) = -\frac{p}{a}\,[x^2\,(\dot{x}^2 - 1)]$

$\frac{y^2(\dot{y}-1)}{x(\dot{x}-1)} = -\frac{p\,x}{a}$ und $n^2 = y^2 + \frac{p^2 x^2}{a^2} = y^2 - \frac{p}{a} y^2 + p^2$ (der letzte Posten aus der Ellipsengleichung), also $n^2 = p^2 + \left(\frac{a-p}{a}\right) y^2$ und $d(n^2) = \left(\frac{a-p}{a}\right) y\,(\dot{y}+1)\,dy$ also: $\frac{n^3(\dot{n}+1)\,\dot{n}\,dy}{n^2(\dot{n}+1)\,dy - y\,d(n^2)} = \frac{n^3(\dot{n}+1)\,\dot{n}\,a}{a\,n^2(\dot{n}+1) - y^2(\dot{y}+1)(a-p)}$, und wenn man $\dot{y} = \dot{n} = 1$ setzt, bekommt man den Krümmungsradius: $r = \frac{n^3}{n^2 - y^2\frac{(a-p)}{a}} = \frac{n^3}{p^2}$ und $u = \frac{r\,y}{n} = \frac{n^2 y}{p^2}$.

Bei der logarithmischen Kurve ist die Subnormale: (da hier $\frac{y^2(\dot{y}-1)}{x(\dot{x}-1)} = y^2$, wegen $\dot{y} - 1 = d\,x$, also $= y^2$ und $n^2 = y^4 + y^2$ und $d(n^2) = y\{\dot{y} + 1 + y^2(\dot{y}^3 + \dot{y}^2 + \dot{y} + 1\}\,dy$ (durch Zerlegung des vorkommenden Binoms), also $r = \frac{n^3(\dot{n}+1)\,\dot{n}}{n^2(\dot{n}+1) - y^4(\dot{y}^3 + \dot{y}^2 + \dot{y} + 1) - y^2(\dot{y}+1)} = \frac{n^3}{n^2 - 2y^4 - y^2}$ $= -\frac{n^3}{y^4} = -\frac{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}{y}$ nachdem man $\dot{y} = \dot{n} = 1$ gesetzt. Ist nun die Subtangente der Einheit gleich und wird die Tangentenstrecke mit t bezeichnet, so ist $t = (1 + y^2)^{\frac{1}{2}}$, also $r = -\frac{t^3}{y}$ und u (der Ausdruck von u war $\frac{y \cdot r}{n}$) $= -\frac{(y^2+1)^{\frac{3}{2}}}{n}$, da aber $n = y\sqrt{y^2+1}$, so wird $u = -\frac{y^2+1}{y} = -\frac{t^2}{y}$.

Hat man den allgemeinen Ausdruck für die Subtangente einmal aufgestellt, so ist es nicht schwer zu entscheiden, ob eine Kurve Inflexionspunkte und Asymptoten besitzt; denn ist S die Subtangente, so hat man $dy = \frac{y\,dx}{S}$; wenn man aber diesen Ausdruck von dy mit dem an der Kurvengleichung entnommenen vergleicht, kann man entscheiden, ob eine Tangente die Kurve in noch einem Punkte schneiden wird; wenn dies aber nur in unendlicher Ferne möglich ist, hat man eine Asymptote. Bei der Parabel ist $S = 2x$ also $dy = \frac{y\,dx}{2x}$. Wenn man aber die Differenzengleichung der Kurve bildet, wird $dy = \frac{a\,dx}{y(\dot{y}+1)}$ also $\frac{y\,dx}{2x} = \frac{a\,dx}{y(\dot{y}+1)}$, $y^2(\dot{y}+1) = 2ax$ und $\dot{y}$ immer $= 1$; die Kurve wird also von der

Tangente nur im Berührungspunkt begegnet und es findet sich weder Inflexion noch Asymptoten.

Die Hyperbel hat die Mittelpunktsgleichung $a^2 y^2 = b^2 (x^2 - a^2)$, also $S = \frac{a^2 y^2}{b^2 \cdot x}$ [wegen $a^2 y^2 (\dot{y}^2 - 1) = b^2 x^2 (\dot{x}^2 - 1)$] und mit Einführung des Zählerwertes aus der Kurvengleichung $S = \frac{x^2 - a^2}{x}$ und $d y = \frac{y\, d x}{S} = \frac{y x\, d x}{x^2 - a^2}$, andererseits liefert die Differenzengleichung der Kurve $d y = \frac{b^2 (\dot{x} + 1) x\, d x}{a^2 y (\dot{y} + 1)}$ und durch Vergleich der beiden Werte von $d y$ erhält man: $\frac{y x\, d x}{x^2 - a^2} = \frac{b^2 x\, d x}{a^2 y}$ für $\dot{y} = \dot{x}$, also für letztere Gleichheit auch aus der Kurvengleichung: $a^2 y^2 \dot{x}^2 = b^2 (x^2 \dot{x}^2 - a^2)$ und die Kurvengleichung abgezogen: $a^2 y^2 (\dot{x}^2 - 1) = b^2 x^2 (\dot{x}^2 - 1)$, also: $a^2 y^2 = b^2 x^2$, ein unmöglicher Ausdruck, falls nicht x^2 sehr groß ist, so daß a^2 in der Kurvengleichung dagegen vernachlässigt werden kann. Für diesen Fall aber wird sich die Kurve mit der Tangente identifizieren und man hat eine Asymptote.

Es sei ferner $y^3 = a^2 x$, dann hat man $y^3 \dot{y}^3 = a^2 x \dot{x}$ und $d y = \frac{a^2 d x}{y^2 (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)}$, verbindet man mit diesem Wert von $d y$ den mit Hilfe der Subtangente $d y = \frac{y\, d x}{S} = \frac{y\, d x}{3 x}$ [nach unserer Methode ist $y^3 (\dot{y} - 1)(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1) = a x (\dot{x} - 1)$, also $\frac{\dot{x} - 1}{\dot{y} - 1} = \frac{y^3}{a^2 x} \cdot [\dot{y}^2 + \dot{y} + 1]$, für $\dot{y} = 1$ wird die rechte Seite $= 3$, also $S = 3 x$] gefundenen, so hat man $y^3 (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1) = 3 a^2 x$, also $\dot{y}^2 + \dot{y} = 2$; die Wurzeln dieser Gleichung sind aber $\dot{y} = \frac{-1 \pm 3}{2}$, also $\dot{y} = 1$ und $\dot{y}_2 = -2$, also wird die Tangente in irgend einem Punkte der Kurve $y^3 = a^2 x$ den entgegengesetzten Ast der Kurve in einem Punkte schneiden, wo die Ordinate $-2 y$ ist. Wenn aber $\dot{y}$ unbestimmt ist, so ist klar, daß die Inflexion im Anfangspunkt der Koordinaten statt hat. Wenn eine Parallele zur Abszissenachse die Kurve in zwei verschiedenen Punkten trifft, so hat man gleiche Ordinaten, deren Abszissenunterschied $d (x)$ ist. Je mehr sich dieser Unterschied vermindert, wachsen oder nehmen die beiden gleichen Ordinaten ab, je nachdem die Kurve ihre konkave oder konvexe Seite der Abszissenachse zukehrt. Um also die Parallele zur Achse als Tangente zu erhalten, müßte $d x = 0$ sein, die beiden gleichen

Ordinaten fallen zusammen und man hat im ersteren Falle ein Maximum, im letzteren ein Minimum. Um aber die verschiedenen Abszissenwerte, welche gleichen Ordinaten entsprechen, zu erhalten, hat man nur $\frac{d\,y}{x\,(\dot{x}-1)} = 0$ zu setzen, und wenn man dann $\dot{x} = 1$ nimmt, wird man den Berührungspunkt finden, wo die Ordinate ein Maximum oder Minimum ist. Um z. B. die Funktion $y^2 = 2\,a\,x - x^2$ auf Maximum oder Minimum zu untersuchen wird man $\frac{d\,y}{d\,x} = 0 = 2\,a - x\,(\dot{x}+1)$ machen und $\dot{x} = \frac{2\,a}{x} - 1$. [Nun findet bei unserm Autor ein plötzlicher Übergang zur Mittelpunktsgleichung des Kreises statt, indem anstelle vou x, $a - x$ tritt], so bekommt man $\dot{x} = \frac{2\,a}{\sqrt{a^2 - y^2}} - 1$ und dergestalt erhält man zwei gleiche Ordinaten in den Abszissen $a \pm (a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}$. Setzen wir jetzt $d\,x = 2\,(a^2 - y^2)^{\frac{1}{2}} = 0$, so wird die Parallele zur Abszissenaxe Tangente an die Kurve und zwar im Punkte $y = (x) = a$. Würden wir anstelle von $\sqrt{a^2 - y^2}$ wieder $a - x$ rückwärts einsetzen, so wären ja wirklich $2\,a - x = x\,\overbrace{\left(\frac{2\,a}{x} - 1\right)}^{\dot{x}}$ und x: die beiden Abszissen gleicher Ordinaten. [Scharf tritt hier hervor, daß unser Autor durch seine Methode die Bedingung $\frac{d\,y}{d\,x} = 0$ spaltet in $y \cdot \frac{(\dot{y}-1)}{x\,(\dot{x}-1)} = 0$, also $\frac{\dot{y}-1}{x\,(\dot{x}-1)} = 0$, was nach seiner Darstellung die Subtangente und ihr Unendlichwerden im Fall eines Extrems der Ordinate bedeutet.] „Par ce procédé, on s'assure que la courbe a des ordonnnées égales répondantes à des abscisses réellement différentes, et entre ces extrêmes il y a nécessairement un maximum ou un minimum; au lieu que par la méthode ordinaire il faut préalablement examiner s'il n'y a pas un point d'inflexion où dy devient zéro, quoiqu'il n'y ait point de maximum".

Ein weiteres Beispiel ist $\frac{x^2 + a^2}{x} = y$. Man bildet zuerst die Gleichung für eine weitere Ordinate $(x\,\dot{x})$ also $\frac{x^2\,\dot{x}^2 + a^2}{x\,\dot{x}} = y\,\dot{y}$ und subtrahiert davon $\frac{x^2 + a^2}{x} = y$. Bringt man auf gleichen Nenner,

so kommt $\frac{x^2\dot{x}^2+a^2}{x\dot{x}} - \frac{x^2\dot{x}+a^2\dot{x}}{x\dot{x}} = y\dot{y} - y$ oder $\frac{x^2\dot{x}(\dot{x}-1)-a^2(\dot{x}-1)}{x\dot{x}}$ $= \frac{(\dot{x}-1)(x^2\dot{x}-a^2)}{x\dot{x}} = y(\dot{y}-1)$. Da nun bei $\frac{dy}{dx} = 0 = \frac{(\dot{x}-1)(x^2\dot{x}-a^2)}{x\dot{x}}$ im letzteren Ausdruck der Zähler verschwinden muß, so hat man $x^2\dot{x} = a^2$ oder $\dot{x} = \frac{a^2}{x^2}$. Die Ordinaten, welche den Abszissen x und $\frac{a^2}{x}$ entsprechen, sind also gleich. Setzt man $\dot{x} = 1$, so hat man $x = \pm a$, $y = \pm 2a$ und die Kurve hat zwei Minima, das eine positiv, das andre negativ.

Manche Fragen scheinen sich der Methode zuerst zu entziehen, sie fügen sich ihr aber doch, wenn man einige Kunstgriffe anwendet. So der Beweis des Satzes, daß unter allen ebenen Figuren gleichen Umfangs der Kreis die inhaltsgrößte sei; der auch für seine Segmente gilt. Zum Beweise zeigen wir:

1. Daß das Polygon vom Umfang m und der Seitenzahl n, wo jede Seite $\frac{m}{n}$ ist, unter allen Polygonen desselben Umfangs das inhaltsgrößte ist. Es sei $AB = a - y$, $BC = a + y$, $AC = p$, $Bd = u$, $Ad = z$, $dC = p - z$. Vermöge der Eigenschaften rechtwinkliger Dreiecke hat man $u^2 = (a-y)^2 - z^2 = (a+y)^2 - (p-z)^2$, $z = \frac{p^2 - 4ay}{2p}$, $u^2 = (a+y)^2 - \left(p - \frac{p^2-4ay}{2p}\right)^2 = a^2 + 2ay + y^2 - \frac{(p^4 + 8p^2ay + 16a^2y^2)}{4p^2} = (p^2 - 4y^2)\frac{(4a^2-p^2)}{4p^2}$, also $u = \frac{\sqrt{p^2-4y^2}\sqrt{4a^2-p^2}}{2p}$ und weiter die Fläche des Dreiecks $ABC = \frac{pu}{2} = \frac{\sqrt{p^2-4y^2}\sqrt{4a^2-p^2}}{4}$, ein Ausdruck, der um so größer wird, je kleiner y ist und dessen Maximum offenbar für $y = 0$ erreicht wird, wenn also $AB = BC = a$. Diese Überlegung angewandt auf

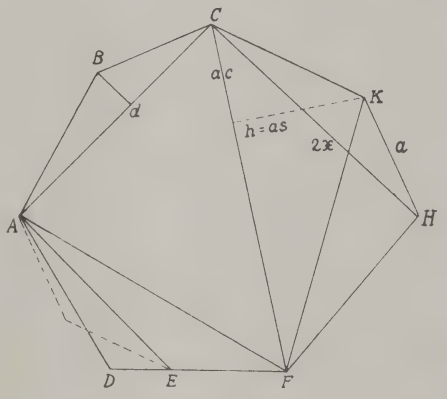


Fig. 4.

jedes Paar aneinanderstoßender Seiten des Polygons zeigt, daß das Polygon mit untereinander gleichen Seiten unter allen isoperimetrischen gleicher Seitenzahl das flächengrößte ist.

2. Daraus folgt, daß bei gleichem Umfang der Inhalt wächst, wenn man die Seitenzahl vergrößert. Denn betrachtet man wiederum das Polygon mit lauter unter sich gleichen Seiten, und macht man im Dreieck ADF die Strecke $DE = \frac{1}{3}\frac{m}{n}$ so hat man im Dreieck ADE die Seiten $AD = \frac{m}{n}$ und $DE = \frac{1}{3}\frac{m}{n}$. Man kann also nach dem ersteren Satze den Inhalt des Dreiecks ADE bei gleichem Umfang vergrößern, wenn man über der Grundlinie AE ein Dreieck zeichnet, dessen beide anderen Seiten je $\frac{2}{3}\frac{m}{n}$ sind, so daß anstelle des Dreieks ADF ein Viereck tritt, worin jede der drei äußeren Seiten $\frac{2m}{3n}$ ist. Auf jedes Paar benachbarter Seiten angewendet, wächst also der Inhalt des Polygons um so mehr, je größer n ist. Um das Maximum zu erhalten, muß man n ins Unbegrenzte wachsen lassen.

Bei Konstanz von m und n hat dasjenige Polygon die größte Fläche, dessen Seitenwinkel untereinander gleich sind. Es sei im Viereck CFHK die Seite $CF = 2p$ $CK = KH = HF = a$, $KF = 2x$, der Sinus des Winkels $KCF = s$, sein Kosinus $= c$, dann ist die Fläche des Dreiecks $KFH = x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, diejenige des Dreiecks $FCK = p\,a\,s = p\,a(1 - c^2)^{\frac{1}{2}}$, also die Fläche des Vierecks $CFHK = p\,a(1 - c^2)^{\frac{1}{2}} + x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}$, aber $4x^2 = (2p - ac)^2 + a^2 s^2 = 4p^2 + a^2 - 4pac$ also $x^2 = p^2 + \frac{a^2}{4} - pac$. Und $x(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{4a^2 - 4p^2 - a^2 + 4pac}{4}}\sqrt{\frac{4p^2 + a^2 - 4pac}{4}}$.

Also die Fläche des genannten Vierecks $CFHK = p\,a(1 - c^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{[-16a^2p^2c^2 + 8ap(4p^2 - a^2)c - 16p^4 + 8p^2a^2 + 3a^4]^{\frac{1}{2}}}{4}$. Damit diese Funktion ein Maximum sei, muß ihre Differenz $= 0$ sein. Nach Ausführung aller Reduktionen erhält man $(1-c^2)^{\frac{1}{2}}$

$(-4apc+4p^2-a^2)=c[-16a^2p^2c^2+8apc(4p^2-a^2)-16p^4+8a^2p^2+3a^4]^2$, wenn man einzig den Kosinus c als variabel betrachtet. Prüfen wir dies Resultat durch Differentiation nach c nach, so ergibt sich, wenn wir abkürzend $\{-16a^2p^2c^2+8apc(4p^2-a^2)-16p^4+8a^2p^2+3a^4\}=M$ setzen

$$0=-pa\frac{c}{(1-c^2)^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4\times 2M^{\frac{1}{2}}}[-32a^2p^2c+8ap(4p^2-a^2)]$$

und auf gleichen Nenner gebracht und mit ap dividiert kommt Ensheim's Ausdruck:

$$(1-c^2)^{\frac{1}{2}}(-4apc+4p^2-a^2)=cM^{\frac{1}{2}}.$$

Erhebt man diesen Ausdruck ins Quadrat, läßt auf beiden Seiten die gleichen Ausdrücke weg und dividiert mit $4p^2-a^2$, so kommt: $4p^2-8apc+4a^2c^2=a^2$. [Bei der Prüfung der Ausführung bleiben stehen von Gliedern mit c^2 diese $-4a^4c^2+16a^2p^2c^2$ und außerdem $16p^4+a^4-32ap^3c+8a^3pc-8a^2p^2$.] Löst man diese Gleichung nach c auf, so kommt: $c^2-\frac{2pc}{a}=\frac{1}{4}-\frac{p^2}{a^2}$ oder

$$c=\frac{p}{a}\pm\sqrt{\frac{4p^2}{4a^2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{p^2}{a^2}\right)}=\frac{p}{a}\pm\frac{1}{2}=\frac{2p\pm a}{2a}.$$

Da aber c als Kosinus stets kleiner als die Einheit und 2p größer als a vorausgesetzt wurde, so muß man von der negativen Wurzel Gebrauch machen, so daß $c=\frac{2p-a}{2a}$. Die Kosinus der Winkel FKH und KFH berechnen sich nach dem Kosinussatz; man hat

$$4x^2=4p^2+a^2-4pa\left[\frac{2p-a}{2a}\right]=\frac{8p^2a+2a^3-8p^2a+4pa^2}{2a}=\frac{4pa^2+2a^3}{2a}=2pa+a^2$$

$$2x=\sqrt{2pa+a^2}\text{ und}$$

$$a^2=[2pa+a^2]+a^2-4ax\cos\text{FKH}\text{ also}$$

$$\cos\text{FKH}=\frac{\sqrt{2pa+a^2}}{2a}.$$

Ferner der Kosinus von $\text{CFK}=\frac{2p-ac}{2x}$ und wenn man den aus der quadratischen Gleichung gefundenen Wert für c einsetzt, kommt $2p-a\left[\frac{2p-a}{2a}\right]$ also $\frac{4pa-2pa+a^2}{2a}=\frac{2pa+a^2}{2a}$ und $2x$ wie oben $=\sqrt{2pa+a^2}$ also $\cos\text{CFK}=\frac{\sqrt{2pa+a^2}}{2a}$. Da die

drei Kosinus gleich sind, so sind es auch die Winkel, also CF und KH parallel, also die Winkel bei K und H gleich und das Polygon ein reguläres. Da dieselbe Überlegung ja für sämtliche Seitenwinkel gilt, der Inhalt aber mit der Vergrößerung der Seitenzahl wächst, und diese unbegrenzt ist, so wird das reguläre Polygon schließlich in den Kreis übergehen, womit unser Theorem bewiesen ist.

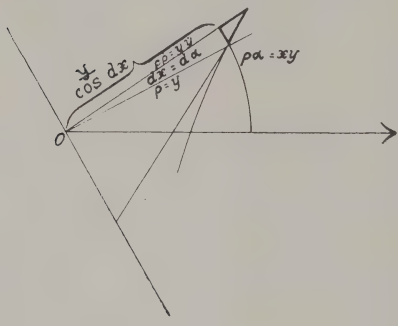


Fig. 5.

Um unsere Methode auf die Differenzen von Sinus, Kosinus und somit auf diejenigen Kurven anwenden zu können, deren Gleichung von irgendwelchen Winkelbeziehungen abhängt, muß man voraussetzen, daß für sehr kleine Winkel der Sinus sich nicht vom Bogen, der Kosinus sich nicht merklich vom Einheitsradius unterscheidet. Wenn man so die Spirale auf Polarkoordinaten (y, x) bezieht, so wird der allgemeine Ausdruck der Polarsubtangente $S_{\dot{y}=1} = \frac{y^2 \cdot \dot{y} \sin dx}{y \dot{y} \cos dx - y} = \frac{y \cdot \dot{y}\, dx}{\dot{y} - 1}$; denn man hat in ähnlichen Dreiecken $\frac{y \dot{y} - \frac{y}{\cos dx}}{y \operatorname{tg} dx} = \frac{y \dot{y}}{S}$ oder $\frac{y \dot{y} \cos dx - y}{y \sin dx} = \frac{y \dot{y}}{S}$ also $S = \frac{y^2 \dot{y} \sin dx}{y \dot{y} \cos dx - y}$ und für $\dot{y} = 1$, $S = \frac{y^2 \dot{y}\, dx}{y \dot{y} - y} = \frac{y^2\, dx}{dy}$ [in den modernen Lehrbüchern geschrieben $\varphi^2 : \frac{d\varphi}{d\omega}$.] Nimmt man die Gleichung der Archimed'schen Spirale in der Form an $ax = by$, so wird $S = \frac{y \dot{y}\, dx}{\dot{y} - 1} = \frac{b y^2 \dot{y}}{a} = x \dot{y}\, y$ oder für $\dot{y} = 1$, $S = x y$. Diese Beziehung drückt den Satz aus an der Archimed'schen Spirale, daß die Länge der Polarsubtangente gleich ist dem Bogen bis zur Polaraxe des mit dem Radius $\varphi = y$ durch den Kurvenpunkt (y, x) beschriebenen Kreises (Mittelpunkt O, Radius y).

Der Verfasser schließt den ersten der Differentialrechnung gewidmeten Teil seines Werkchens mit den Worten: „Les livres élémentaires supposent une courbe parallele à une ligne droite, ou une analogie entre des quantités innombrables, ce qui ne peut jamais satisfaire les commençans."

„Ces différentes solutions suffisent pour faire voir que les principes du calcul différentiel sont rigoureusement vrais, sans que l'on besoin de négliger certaines quantités, ni de considérer les courbes comme composées d'une infinité de lignes droites, supposition répugnante au bon sens, et démentie dans la mécanique."

Es folgt der „Calcul intégral" (pag. 13 des Werkchens), dessen Aufgabe dahin präzisiert wird die Funktion zu einer gegebenen Differenz aufzufinden. Ensheim polemisiert dabei gegen die Auffassung (Eulers) der Differenzen als absoluter Nullen: „vu qu'une infinité de zéro ne peut pas former une quantité finie, et qu'il ne peut y avoir aucun rapport entre le néant et la realité". Man muß also von sehr kleinen Differenzen ausgehen. Den ganzen Integralcalcul gründet er auf zwei fundamentale Sätze:

1. Wenn die Differenzen von zwei Variabeln in einer konstanten Beziehung stehen, so stehen die Variabeln selbst, von einer Konstanten (additiv) abgesehen, in derselben Beziehung.

2. Der erweiterte Gleichheitsbegriff wird hier eingeführt: „Si $p + q = R$ et que sans changer cette égalité q puisse devenir moindre que toute quantité assignable, on peut sans erreur négliger cette quantité inassignable, et supposer $p = R$." Wenn die differentielle Funktion komplett ist, hat die Integration keine Schwierigkeiten, man hat nur den durch die Differenzen hineingekommenen Faktor wieder herauszuschaffen. Ist sie nicht komplett, so handelt es sich darum, eine konstante Beziehung zu einer andern Differentiellen aufzufinden, deren Integral bekannt ist: „ce qui est quelquefois très difficile, et souvent même impossible", Es folgen die einfachsten Integralformeln: Das Integralzeichen wird konsequent durch ein S (Summe) ersetzt. Man hat so:

$$\text{S. } y^m (\dot{y}^m - 1) = y^m + c$$

$$\text{S. } y^m (\dot{y}^n - 1) = \frac{y^m (\dot{y}^{n-1} + \dot{y}^{n-2} + \ldots \dot{y} + 1)(\dot{y} - 1)(\dot{y}^m - 1)}{\dot{y}^{m-1} + \dot{y}^{m-2} + \ldots \dot{y} + 1)(\dot{y} - 1)}$$

$$= \text{S. d}(y^m) \times \frac{(\dot{y}^{n-1} + \dot{y}^{n-2} + \ldots \dot{y} + 1)}{(\dot{y}^{m-1} + \dot{y}^{m-2} + \ldots + 1)}$$

und für $\dot{y} = 1$, $\text{S. } y^m (\dot{y}^n - 1) = \frac{n\, y^m}{m} + c$

sodann: $\text{S. } x\, y\, (\dot{x}\, \dot{y} - 1) = \text{S. } (x\, \dot{x}\, d\, y + y\, d\, x) = x\, y$

und . . . . . $\text{S. } x \frac{(\dot{x} - \dot{y})}{y\, \dot{y}} = \text{S. } \frac{(y\, d\, x - x\, d\, y)}{y^2\, \dot{y}} = \frac{x}{y}$

weiter . . . a S. $(\dot{x} - 1) = a\, L.\, x + L.\, c = L.\, c\, x^a$. [Man vergl. dazu oben die Worte: „Si l'on suppose un rapport constant entre $\dot{y}$ et son logarithme e. c. t."]

Endlich $S.(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1) = n q \frac{(a + b x^m)^{\frac{p+q}{q}}}{m b (p+q)}$. Um diese letztere Gleichheit zu beweisen, setzt Ensheim: $(a + b x^m)^{\frac{1}{q}} = u$, dies gibt $x^m = \frac{u^q - a}{b}$, $d(x^m) = \frac{d(u^q)}{b}$; es ist aber $x^m (\dot{x}^n - 1) = d(x^m) \frac{(\dot{x}^{n-1} + \dot{x}^{n-2} + .. \dot{x} + 1)}{\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + .. \dot{x} + 1}$, also $(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1) = \frac{(\dot{x}^{n-1} + \dot{x}^{n-2} .. \dot{x} + 1) u^p d(u^q)}{(\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + .. x + 1) b}$. Sodann wird $d(u^q)$ ausgeführt $= u^q (\dot{u}^{q-1} + \dot{u}^{q-2} + .. \dot{u} + 1)(\dot{u} - 1)$ und anstelle von u^{p+q} eingeführt $\frac{d(u^{p+q})}{(\dot{u}^{q+p-1} + \dot{u}^{q+p-2} + .. \dot{u} + 1)(\dot{u} - 1)}$, also hat man:

$$(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1) = \frac{(\dot{u}^{q-1} + \dot{u}^{q-2} + .. \dot{u} + 1)(\dot{x}^{n-1} + \dot{x}^{n-2} + .. \dot{x} + 1) d(u^{p+q})}{(\dot{u}^{p+q-1} + \dot{u}^{p+q-2} + .. \dot{u} + 1)(\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + .. \dot{x} + 1) b}.$$

Bei Integration wird das Differenzenbildungszeichen vernichtet und somit $S.(a + b x^m)^{\frac{p}{q}} x^m (\dot{x}^n - 1) = \frac{n q (a + b x^m)^{\frac{p+q}{q}}}{m b (p + q)}$.

Um die Berechtigung dieser Prinzipien zu zeigen, wenden wir sie wieder auf die gewöhnlichen Probleme der Integralrechnung an. Es handle sich darum, den krummlinig begrenzten Flächenraum FGMP zu quadrieren. Das Element der Fläche ist aus zwei Teilen zusammengesetzt, dem Parallelogramm FpnG und den von den Koordinatendifferenzen gebildeten Dreieckchen. Die Summe dieser Dreieckchen ist aber offenbar kleiner als $x \cdot d y$, denn wenn man $d y$ unaufhörlich halbiert, kommt man zu dem Ausdruck $\frac{x d y}{2^m}$ kleiner als jede angebbare Größe. Der Flächenraum FPMG kann also sehr wohl $= S. y d x$ gesetzt werden. Damit aber $y d x$ sehr klein werde, muß $d x = x(\dot{x} - 1)$ nahe an o, also $\dot{x} = 1$ gesetzt werden. Die Differenz von $x y$ ist nun $x y (\dot{x} \dot{y} - 1)$. Wenn also die Gleichung der Kurve eine konstante Beziehung zwischen $\dot{x} \dot{y} - 1$ und $\dot{x} - 1$ liefert, so besteht dieselbe

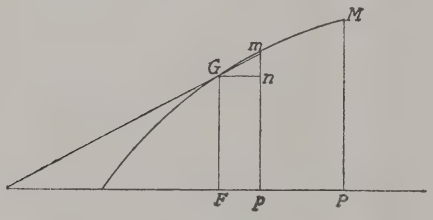


Fig. 6.

Beziehung zwischen der Summe der Parallelogramme und x y und die Kurve ist algebraisch quadrierbar; besteht aber eine solche Beziehung nicht, so muß man zu Approximationsmethoden greifen. Als Beispiel einer Quadratur dienen die Parabeln höherer Ordnung, welche eine interessante Geschichte besitzen.[8]) Durch Verallgemeinerung der Gleichung der Apollonischen Parabel $y^2 = p\,x$ erhält man diejenige dieser Kurven $y^{m+n} = a^m x^n$ oder bei Fermat $y^{m'} = k^{m'-n} x^n$ (vergl. Cantor Bd. III_1, pag. 869, also $m' = m + n$ und $m = m' - n$). Aus der Gleichung $y^{m+n} = a^m x^n$ erhält Ensheim $\dot{x}^n - 1 = \dot{y}^{m+n} - 1$ oder $\dot{x} - 1 = \dot{y}^{\frac{m+n}{n}} - 1$. Multipliziert man den ersten Summanden mit $\dot{y}$ und subtrahiert beiderseits wieder 1, so kommt $\dot{x}\,\dot{y} - 1 = \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}} - 1$. Außerdem ist:

$$(\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}} - 1) : (\dot{y}^{\frac{m+n}{n}} - 1) = (\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1) :$$

---

[8]) Wichtig für diese Geschichte sind folgende Dokumente: 1. der Brief Descartes' vom 13. Juli 1638 berührt Sätze, welche den Schwerpunkt und die durch Rotation erzeugten Volumina von diesen Kurven begrenzter Flächen betreffen (Oeuvres de Descartes ed. Adam et Tannery II, Paris 1898, S. 246. 2. Ein Schreiben Fermats an Cavalieri von 1644 durch Vermittlung P. Mersennes (zuerst veröffentlicht in den Oeuvres de Fermat ed. Tannery et Henry I, S. 195—198), worin ein Ausdruck für die Fläche eines Parabelsegments sowie für das von ihr durch Rotation um die Achse erzeugte Volumen, ebenso für die Schwerpunkte jener Fläche und dieses Körpers angegeben werden. 3. Verbreitet wurden diese Resultate durch Mersenne in der Praefatio ad mechanicam seiner Cogitata physico-mathematica 1644. Fermats Bemühungen reichen aber bis 1636 zurück. In einem Briefe an Roberval vom 22. Sept. 1636 (Oeuvres de Fermat II, S. 73) wird auf die von ihm ausgeführte Quadratur hingewiesen. Er kommt darauf in Briefen an Roberval vom 16. Dez. 1636 und an Mersenne vom 10. Aug. 1638 (Oeuvres de Fermat II, S. 95 und ibid., S. 165) und mit aller nur wünschenswerten Ausführlichkeit in der berühmten Arbeit De aequationum localium transmutatione et emendatione, die erst 1679 in den Opera varia erschienen ist (Fermat Oeuvres I, S. 255—285 und III, S. 216—237). Dem Datum der Publikation nach kommt für die Priorität einiger dieser Resultate in Betracht: 1. Bonaventura Cavalieri in der vierten seiner Exercitationes sex Bonon. 1647. 2. Stefano degli Angeli, der Verfasser einer wichtigen Arbeit: De infinitis Parabolis infinitisque solidis, Venetiis 1654. 3. John Wallis, der sich in seiner Arithmetica infinitorum 1655 und in seinem Lehrbuch der Kegelschnitte eingehend mit den höheren Parabeln beschäftigt hat. Im 18. Jahrhundert schrieb M. Knutzen, der bekannte Lehrer Kants, über die „parabolae parametrales" eine Abhandlung: Theoremata nova de parabolis infinitis eodem parametro et circa eandem axem descriptis (Acta eruditorum Lips. 1737). (Nach Loria „Spezielle ebene höhere Kurven".)

$(\dot{y}^{\frac{m+n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1) = d(x\,y) : x\,y\,(\dot{x} - 1)$; also das kleine Parallelogramm: $GF\,p\,n = x\,(\dot{x} - 1) \cdot y$

$$= \left\{ \frac{\dot{y}^{\frac{m+n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1}{\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1} \right\} d(x\,y),$$

dessen allgemeines Integral:

$$\left\{ \frac{\dot{y}^{\frac{m+n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1}{\dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-1} + \dot{y}^{\frac{m+2n}{n}-2} + \ldots \dot{y} + 1} \right\} x\,y$$

und für $\dot{y} = 1$ erhält man die ganze krummlinig begrenzte Fläche: $\frac{m+n}{m+2n}\,x\,y$ (bei Cantor l. c. $\int_0^a y\,dx = \left(\frac{m'}{m'+n}\,x\,y\right)_{x=a}$ da ja die Gleichung der Kurven war $y^{m'} = k^{m'-n}\,x^n$).

Wie man durch Verallgemeinerung der kanon. Gleichung der Parabel zum Begriff der Parabeln höherer Ordnung gelangt, so durch Verallgemeinerung der Gleichung einer auf ihre Asymptoten bezogenen Hyperbel $x\,y = a^2$ zu den Kurven, die durch eine Gleichung vom Typus $y^m\,x^n = a^{m+n}$ dargestellt werden, den Hyperbeln höherer Ordnung. Setzt man in der Gleichung der Parabeln anstelle von m die Größe $m + n$ und anstelle von n ein $-n$, so erscheint die Gleichung der Hyperbeln höherer Ordnung, eine Analogie, die Auguste Comte 1843 veranlaßte, aus den Parabeln und Hyperbeln höherer Ordnung eine einzige Klasse zu bilden, die er binomische Kurven nannte. Im Resultat der Quadratur wird aus $\int y\,dx = \frac{m+n}{m+2n}\,x\,y$ für die Hyperbeln jetzt $\frac{m}{m-n}\,x\,y$, was Ensheim wiederum so ableitet: Aus $a^{m+n} = y^m\,x^n$ folgt $y = a^{\frac{m+n}{m}}\,x^{-\frac{n}{m}}$; $y\,dx = a^{\frac{m+n}{m}}\,x^{-\frac{n}{m}+1}\,(\dot{x} - 1) = a^{\frac{m+n}{m}}\,x^{\frac{m-n}{m}}\,(\dot{x} - 1)$ und $x\,y = a^{\frac{m+n}{n}}\,x^{\frac{m-n}{n}}$,

$$\text{also } \frac{y\,dx}{d(x\,y)} = \frac{a^{\frac{m+n}{m}}\,x^{\frac{m-n}{m}}\,(\dot{x} - 1)}{a^{\frac{m+n}{m}}\,x^{\frac{m-n}{m}}\,(\dot{x}^{\frac{m-n}{m}} - 1)} = \frac{\dot{x} - 1}{\dot{x}^{\frac{m-n}{m}} - 1}$$

$$= \frac{1}{(\dot{x}^{\frac{m-n}{m}-1} + \dot{x}^{\frac{m-n}{m}-2} + \ldots \dot{x} + 1)}$$

und für die Integration, nachdem $\dot{x} = 1$ gesetzt wurde:

$$S.\, y\, d\, x = \frac{1}{\frac{m-n}{m}}\, x\, y = \frac{m}{m-n}\, x\, y.$$

Auszunehmen ist der Fall, wo $m = n = [1]$, derjenige der gewöhnlichen Hyperbel. In der Tat, da $x\, y = a^2$, so ist $d\,(x\, y) = o$, also existiert keine Beziehung zwischen der reellen Größe $y\, d\, x$ und $d\,(x\, y)$. Andererseits aber ist $y\, d\, x = \frac{a^2\, d\, x}{x} = a^2\,(\dot{x} - 1)$, eine Funktion, aus der die Variable verschwindet und deren Zuwächse also eine arithmetische Reihe bilden, während die x in geometrischer Progression stehen. Man kann also die krummlinig von der Hyperbel begrenzten Flächenräume auffassen als die Logarithmen der bezüglichen Abszissen und $S.\, y\, d\, x = L.\, x$.

Bei der logarithmischen Kurve hat man $S.\, y\, d\, x = S.\, y\,(\dot{y} - 1) = y + C$. Man kann dies Resultat auch durch elementare Algebra beweisen. Denn setzt man $y = m^p$ und $L\, y = p\,(m - 1) = x$ [also $L\, y = p\, L\, m = p\,(m - 1)$ und somit $L\, m = m - 1$], so wird $y\, d\, x = m^p\,(m - 1)$. [Logarithm. Differentiation.] Die Ordinaten wachsen also in geometrischer Progression und sind dargestellt durch 1, m, m^2 e. c. t., die krummlinig begrenzten Flächen sind repräsentiert durch $(m - 1)$, $m\,(m - 1)$, $m^2\,(m - 1)$ e. c. t. Die Summe dieser Reihe ist aber $\frac{(m^{p+1} - 1)\,(m - 1)}{m - 1} = m^{p+1} - 1 = S.\, m^p\,(m - 1) = S.\, y\, d\, x$. Bedenkt man aber, daß m von der Einheit nur sehr wenig verschieden ist (um die sehr kleine Größe n, so ist $m^{p+1} = m^p\,(1 + n)$ nur sehr wenig unterschieden von m^p, also hat man auch $S.\, y\, d\, x = m^p - 1 = y - 1$.

Beim Kreise hat man $y\, d\, x = (r^2 - x^2)^{\frac{1}{2}}\, d\, x$. Da dieser Ausdruck sich nicht auf eine geschlossene Form zurückführen läßt, die integrierbar ist, so entwickelt man das Radikal nach der Binomialformel in eine unendliche Reihe: $y = r\,(1 - \frac{x^2}{2\,r^2} - \frac{x^4}{8\,r^4} - \frac{x^6}{16\,r^6} - \text{e. c. t.})$ und gewinnt so näherungsweise

$$S.\, y\, d\, x = r^2\left(\frac{x}{r} - \frac{x^3}{2 \cdot 3\, r^3} - \frac{x^5}{8 \cdot 5\, r^5} - \frac{x^7}{16 \cdot 7\, r^7} - \text{e. c. t.}\right)$$

Zur Rektifikation der Kurven faßt man sie hier in der Integralrechnung in gewohnter Weise als Grenze ihres Sehnenzuges auf. Die Sehne ist $(d\, x + d\, y)^{\frac{1}{2}}$ und durch

Integration dieses Ausdrucks erhält man bis auf eine Konstante die Peripherie des Polygons, die zuletzt in die Kurvenlänge übergehen wird.

Als Beispiel dient die Neil'sche Parabel: $a x^2 = y^3$, daraus $a x^2 (\dot{x}^2 - 1) = y^3 (\dot{y}^3 - 1)$, also $\dot{x}^2 - 1 = \dot{y}^3 - 1$ und $\dot{x} = \dot{y}^{\frac{3}{2}}$, will man, nachdem in $a x^2 (\dot{x} + 1)(\dot{x} - 1) = y^2 (\dot{y} - 1) \times y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)$ zerlegt, auf $(d x)^2$ kommen, so ist die linke Seite mit $\frac{\dot{x} - 1}{\dot{x} + 1}$ zu multiplizieren oder nach Erweiterung mit $\dot{x} + 1$ mit $\frac{\dot{x}^2 - 1}{(\dot{x} + 1)^2} = \frac{(\dot{y} - 1)(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)}{(\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2}$, also $(d x)^2 = (d y)^2 \frac{y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2}$

und $(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \left\{ \frac{y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2} + 1 \right\}^{\frac{1}{2}} d y$. Setzen wir

$\left[\frac{y (\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2} + 1 \right] = z^2$, so hat man $d y = \frac{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 z^2 (\dot{z}^2 - 1)}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2}$

und $(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = a \frac{(\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 z^3 (\dot{z}^2 - 1)}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2} = a \frac{(\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 (\dot{z} + 1) d (\dot{z}^3)}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2 (\dot{z}^2 + \dot{z} + 1)}$,

also das Integral: $S. (d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{a (\dot{y}^{\frac{3}{2}} + 1)^2 (\dot{z} + 1) z^3}{(\dot{y}^2 + \dot{y} + 1)^2 (\dot{z}^2 + \dot{z} + 1)}$ und wenn man $\dot{y} = \dot{z} = 1$ setzt, so wird unter Restitution von z das Integral, das den Bogen der Neil'schen Parabel darstellt:

$$S. (d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{8 a}{27} \left(\frac{9 y}{4 a} + 1 \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Beim Kreise hat man $(d x^2 + d y^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{r d x}{(r^2 - y^2)^{\frac{1}{2}}}$; da sich hier keine konstante Beziehung aufstellen läßt, so entwickelt man die Wurzel im Nenner und findet so näherungsweise das Integral, das den Kreisumfang darstellt.

Mit der Wendung „On peut d'ailleurs trouver la valeur approchée de la circonférence du cercle d'une manière plus élégante" geht unser Autor zu einer ganz andern Methode über, die wir hier in etwas modifizierter Transskription folgen lassen, da die Reihe des Dreiecks unseres Wissens sonst nirgends abgeleitet ist. In den Einheitskreis sei das reguläre n-Eck einbeschrieben, das aus soviel Dreiecken besteht, als der Centriwinkel $2 m = \frac{360^0}{n}$ angibt.

Die Fläche jenes Teildreiecks ist aber im Einheitskreis $\sin m \cdot \cos m$ und diejenige des ganzen n-Ecks: $\frac{180^0}{m} \sin m \cos m$, da $n = \frac{360^0}{2m} = \frac{180^0}{m}$. Macht man nun $m = 2p$, so findet man für die Fläche des 2^1 n-Ecks mit dem Centriwinkel $2p$, des neuen Polygons, den Ausdruck $\frac{180^0}{\frac{m}{2}} \sin p \times \cos p$, aber $\cos m = \cos^2 p - \sin^2 p$ und $\sin m = 2 \sin p \cos p$, also $\frac{1}{2} \sin m = \sin p \cos p$ und die Fläche des 2^1 n-Ecks $= \frac{180^0}{\frac{m}{2}} \cdot \frac{1}{2} \sin m = \frac{180^0}{m} \sin m$ und nach Erweiterung mit $\cos m$ wird die Fläche $\frac{180}{m} \times \frac{\sin m \cos m}{\cos m} = \frac{P}{\cos m}$, wenn P die Fläche des Polygons der Seitenzahl n bezeichnet. Macht man nun $p = 2q$, so findet man für die Fläche des Polygons der Seitenzahl $2^2 n$ den Ausdruck $\frac{180^0}{\frac{m}{4}} \cos q \sin q = \frac{180^0}{\frac{m}{4}} \cdot \frac{\sin m}{4 \cos p}$ $\left(\text{da } \frac{\sin m}{2} = \sin p \cos p, \text{ also } \frac{1}{2} \sin p = \frac{\sin m}{4 \cos p}\right), = \frac{P}{\cos m \cos \frac{m}{2}} = \frac{P}{\cos m \cos \frac{m}{2^1}}$, allgemein geht also der Ausdruck über in:

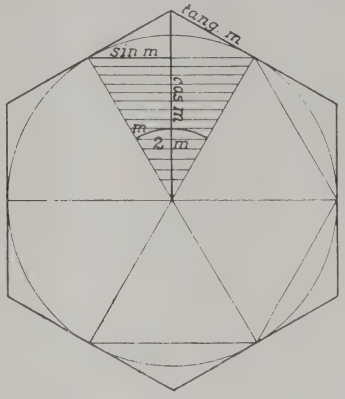


Fig. 7.

$\frac{P}{\cos m \cos \frac{m}{2} \ldots . \cos \frac{m}{2^{k-1}}}$, indem man für das 2^k n-Eck hat $\frac{180^0}{\frac{m}{2^k}} \times \sin \frac{m}{2^k} \cos \frac{m}{2^k}$; hier ersetzt man wieder $\sin \frac{m}{2^k}$ durch $\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{m}{2^{k-1}}}{\cos \frac{m}{2^k}}$ und dann wieder $\sin \frac{m}{2^{k-1}}$ durch $\frac{1}{2} \frac{\sin \frac{m}{2^{k-2}}}{\cos \frac{m}{2^{k-1}}}$, bis im Zähler $\sin m$ erscheint und im Nenner $\cos \frac{m}{2}$, also nach k-Substitutionen. Der

Verfasser ersetzt diese allgemeinere Betrachtung durch die Worte: „en continuant de la même manière on trouve la surface d'un polygon d'un nombre $2^k n$ de côtés égale à $P \times \frac{1}{\cos m \cos \frac{m}{2} \ldots \cos \frac{m}{2^{k-1}}}$.“

Wenn k hinlänglich groß ist, so unterscheidet sich die Fläche des Polygons um keine angebbare Größe mehr von der Fläche des Einheitskreises. Um den Umfang zu bekommen, haben wir diese Größe noch mit dem Faktor 2 zu multiplizieren. Bezeichnen wir mit Ensheim die Peripherie durch ω, so hat man

$$\frac{2}{2\pi} = \frac{\text{Durchmesser}}{\text{Peripherie}} = \frac{1}{\frac{180^0 \sin m}{m \cos \frac{m}{2} \cos \frac{m}{4} \ldots \cos \frac{m}{2^{k-1}}} \text{ e. c. t.}}$$

Das e. c. t. erweitert hier das Nennerprodukt zu einem unendlichen!

„En procedant de même par rapport au Polygone circonscrit on trouve: $\frac{180^0 \cdot \sin m}{m \cos \left(\frac{m}{2}\right) \cos \left(\frac{m}{4}\right) \ldots \left(\cos \left(\frac{m}{2^k}\right)\right)^2 \text{ e. c. t.}}$.

Und wirklich, wenn man das umgeschriebene Polygon berechnet $= \frac{180}{m} \operatorname{tang} m$, so findet man:

$$\frac{180^0}{2^0 m} \times \frac{\sin \frac{m}{2^0}}{\cos \frac{m}{2^0}} \text{ für das } 2^0 \text{ n-Eck}$$

$$\frac{180^0 \sin \frac{m}{2^1}}{\frac{m}{2^1} \cos \frac{m}{2^1}} \text{ für das } 2^1 \text{ n-Eck}$$

. . . . . .

. . . . . .

$$\frac{180^0 \sin \frac{m}{2^k}}{\frac{m}{2^k} \cos \frac{m}{2^k}} \text{ für das } 2^k \text{ n-Eck; da nun } \sin \frac{m}{2^{k-1}}$$

$= 2 \sin \frac{m}{2^k} \cos \frac{m}{2^k}$, also $\sin \frac{m}{2^k} = \frac{1}{2} \sin \frac{m}{2^{k-1}} : \cos \frac{m}{2^k}$, so hat man nach dieser Formel k Substitutionen vorzunehmen, bis im Zähler

sin m und im Nenner $\cos\frac{m}{2}$ als erster Faktor erscheint, und man gewinnt so für das umgeschriebene 2^k n-Eck den obenstehenden Ausdruck. Setzen wir $\frac{360^0 \sin m}{m} = C$, so folgt die Ungleichung

$$\frac{C}{\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos\left(\frac{m}{4}\right)..\left(\cos\left(\frac{m}{2^k}\right)\right)^2} > \omega > \frac{C}{\cos\left(\frac{m}{2}\right)\cos\left(\frac{m}{2}\right)..\cos\left(\frac{m}{2^{k-1}}\right)}$$

Aber $\cos\frac{m}{2} = \left(\frac{1+\cos m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\cos\frac{m}{4} = \left(\frac{1+\cos\frac{m}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\cos\frac{m}{8} = \left(\frac{1+\cos\frac{m}{4}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos\frac{m}{2}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1+\left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos m}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Geht man vom Sechseck aus, so ist $\frac{360^0}{6} = 60^0 = 2\,m$, also $m = 30^0$ und $C = \frac{360^0}{30^0}\sin 30^0 = 12 \cdot \frac{1}{2} = 6$, und unsere Formel gibt

$$\omega > \frac{6}{\left(\frac{1+\cos 30^0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1+\left(\frac{1+\cos 30^0}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{6}{\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{2+(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}}{2}\right)^{\frac{1}{2}}} \text{ e. c. t.}$$

Jetzt wird mit den komplementären Faktoren in Zähler und Nenner multipliziert, so daß aus:

$$\frac{6}{\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}{2}}\sqrt{\frac{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{2}}\}q} \text{ wird:}$$

$$6 \cdot 2^q$$

$$\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}\sqrt{2-\sqrt{3}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}{1 \qquad \sqrt{2-\sqrt{3}} \qquad \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$$

$$\frac{1}{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} \qquad \frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+}}}}}}$$

Anstelle von $k-1$ setzt unser Autor q „en designant par q le nombre d'extractions des racines quarrées binomes" so daß im Nenner nur ein Faktor stehen bleibt, der mit q Extraktionen in den Zähler tritt; im Ausdruck des umschriebenen Polygons steigt die Zahl der Extraktionen auf $q+1$, wovon aber die letzte im Quadrat von $\left(\cos\frac{m}{2^k}\right)^2$ zerstört wird, so daß auch hier die Zahl der Extraktionen in Zähler und Nenner endgültig q wird. Ausgehend vom regulären Dreieck kann man so die Reihe aufstellen:

Reguläres Dreieck = 2^0 3-Eck
„ 6-Eck = 2^1 3-Eck
„ 12-Eck = 2^2 3-Eck
„ 24-Eck = 2^3 3-Eck
„ 48-Eck = 2^4 3-Eck
„ 96-Eck = 2^5 3-Eck
. . . . . .

beim regulären 96-Eck ist also $k=5$, q (vier Extraktionen) $=4$ und $q+1=5$.

Man kann also die Vergrößerung der Seitenzahl der Polygone und damit der Extraktionen soweit treiben bis der Zähler „devienne une quantité inassignable et que le dénominateur approche en même temps de plus en plus du nombre 2 sans l'atteindre jamais tout à fait;" denn $\sqrt{2+\sqrt{3}} < 2$ also auch $\left(2+(2+\sqrt{3})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} < 2$. [Der Radikand wird immer vergrößert, jedoch so, daß (da der Radikand ein unechter Bruch) das Radikal wachsend sich der 2 nähert.] Ensheim fügt hinzu: „Il est étonnant que nos mathematiciens ne traittent guerre de cette espèce d'infini radical qui peut si bien occuper leur sagacité." Er wußte also nicht, daß Euler für das 2^5 3-Eck = 96-Eck in dem Aufsatz: „De variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi (Comment. Acad. Petrop. IX 1737. ersch. 1744, pag. 222, s. pag. 234) die Ungleichung aufgestellt hatte

$$96\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}} > \pi > 192\frac{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}}.$$

In den Opuscula analytica, Petropoli 1783, pag. 345 geht Euler auf die geometrische Bedeutung dieser Formeln nicht ein, „alio loco demonstravimus". (Vergl. Cantor, Vorlesungen IV, pag. 445 und Rudio, Geschichte der Kreisquadratur, pag. 51.) In der ersten Abhandlung hat Euler die Faktorenfolge aufgestellt: $\frac{2\varphi}{\sin 2\varphi} = 1 : \left(\cos\varphi \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{4} \cdot \cos\frac{\varphi}{8} \ldots\right)$, die das Reziprok unserer oben aufgeführten ist, wenn man $2\varphi = m$ setzt, und welche für $\varphi = \frac{\pi}{4}$ jene schon Vieta (Opera mathematica ed. Schooten. Lugd. Batav. 1646, pag. 398—400) Rudio, l. c., pag. 33, sowie Cantor II². S. 595 bekannte Beziehung liefert:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt{2}}}\ldots \text{ in inf.}},$$

welche als das erste unendliche Produkt gilt. —

Zu den Problemen der Integralrechnung kehrt unser Autor zurück mit der Aufgabe: „Resoudre l'équation: $a\,y\,d^2y + b\,dy\,dx + p\,(dx)^2 = 0$, p étant une fonction de x sans y." Er setzt $x = L\,y$ und $dx = L\,\dot{y} = \dot{y} - 1$, also $d^2 L\,y = 0$, dann hat man $d^2 y = y\,(\dot{y} - 1)^2$ und damit geht die Differentialgleichung über in $a\,y^2(\dot{y} - 1)^2 + b\,dx \cdot y\,(\dot{y} - 1) + p\,(dx)^2 = 0$ und als Gleichung II. Grades mit der Unbekannten dy: $(dy)^2 + \frac{b}{a}\,dx\,dy = -\frac{p}{a}(dx)^2$,

$$dy = -\frac{b}{2a}dx \pm \sqrt{\frac{b^2(dx)^2}{4a^2} - \frac{p\,(dx)^2}{a}} = \frac{dx}{2a}\left[\left(b^2 - 4ap\right)^{\frac{1}{2}} - b\right]$$

also $2a\,dy = dx\left\{\left(b^2 - 4ap\right)^{\frac{1}{2}} - b\right\}$ und $2ay = -bx \pm$

$S.\,dx\left(b^2 - 4ap\right)^{\frac{1}{2}} + C.$

Das nächste Thema der Betrachtung ist Eulers Satz von den homogenen Funktionen. Bekanntlich wird eine solche durch die Gleichung definiert:

$$f(t\,x,\ t\,y,\ t\,z\ldots) = t^n f(x, y, z\ldots),$$

wo t jede beliebige von Null verschiedene, endliche Zahl bedeuten kann und der Satz selbst lautet: „Multipliziert man die partiellen Differentialquotienten einer homogenen Funktion nach den einzelnen Variabeln mit diesen Variabeln selbst, so ist die Summe der so gebildeten Produkte die mit dem Homogenitätsgrade vervielfachte Funktion selbst.

$$\frac{\delta f}{\delta x}x + \frac{\delta f}{\delta y}y + \frac{\delta f}{d z}z + \ldots = n \cdot f.$$

„Euler hatte den Satz schon 1736 für den Fall einer Funktion von zwei Veränderlichen in Besitz und deutete ihn damals in seiner Mechanik (T. II, Prop. 14, § 106) soweit an, daß, als derselbe von Fontaine nachentdeckt wurde, Eulers Früherecht Anerkennung fand", (vergl. die Fußnote, pag. 322 von Clairauts Abhandlungen: Sur l'intégration ou la construction des équations différentielles du premier ordre, Histoire de l'Académie des sciences de Paris, Année 1740, pag. 293—323) sagt Cantor im III. Bande der „Vorlesungen", pag. 734. Ensheim aber bemerkt hier: „Le profond Fontaine, dans son calcul intégral, première methode[9]), suppose que dans

[9]) Alexis Fontaine, Traité de calcul différentiel et intégrale, Paris 1770 in 4°. Pour servir de suite aux mémoires de l'Académie Royale des sciences 4 maj. 588 S. „Dies ist, nach Fr. Wilh. Aug. Murhard, Litteratur der mathematischen Wissenschaften, Leipzig, Zweyter Band, enthaltend die Litteratur der Geometrie und der Analysis (Breitkopf und Härtel) 1798, S. 382, „eigentlich nur ein neuer Titel zu folgender Sammlung: Mémoires donnés à l'Académie Royale des sciences non imprimés dans leur temps par M. Fontaine de cette Académie, à Paris de l'imprimerie Royale 1764, gr. 4°, 588 S. mit Kupfert. „Die darin enthaltenen Abhandlungen gehören nicht insgesamt zur Infinitesimal-Rechnung, daher der letzte Titel richtiger ist. Sie sind: 1. Nouvelle méthode de maximis et minimis. 2. Détermination de la courbe de la moindre action. 3. Détermination de la courbe qui doit embrasser un angle donné pour que l'embrassant toujours par son sommet puisse tracer une autre courbe donnée. 4. Détermination des courbes, qui développent elles-mêmes. 5. Solution du problême des tautochrones. 6. Le calcul intégral. Première méthode. 7. — Seconde méthode. 8. Table pour intégrer les éléments qu'on nomme rationels c'est à dire dans l'expression desquels il n'entre aucun radical. 9. Principes de l'art de résoudre les Problêmes sur le mouvement des corps. 10. Nouvelle méthode d'approximation pour la solution des problêmes qui se reduisent aux quadratures. 11. Sur les logarithmes. 12. Doutes sur la méthode d'approximation, dont M. Clairaut s'est servi pour déterminer le mouvement de la lune autour de la terre et autre route pour la solution de ce problême. 13. Sur le mouvement de la lune autour de la terre d'aprés le système de la pesanteur. 14. Analyse du problême où il s'agit par le moyen de trois observations de déterminer dans le système de M. Newton la

toute fonction différentielle homogène, on peut admettre l'analogie $dx : x = dy : y$. Ce principe, outre qu'il n'est pas évident, paroit être sujet à de grandes difficultés. En effet, si cette supposition étoit permise, on aurait généralement l'èquation $y\,dx = x\,dy$, $2y\,dx = y\,dx + x\,dy$ et $S.\frac{(x\,dy + y\,dx)}{2} = \frac{xy}{2} = S.\,y\,dx$. Or on sait, que cette dernière expression n'est qas intégrable, à moins que x ne soit égale à y. Comme l'esprit ne peut pas être satisfait, s'il ne trouve pas l'évidence, on a cru qu'il ne sera pas inutile de donner aux théorêmes fondamentaux de cet auteur une nouvelle démonstration, et la suivante paroît très-féconde. Voici de quoi il s'agit." Vergl. dafür auch den von Lagrange selbst gegebenen Beweis in dem Briefe an Condorcet vom 1. Dezember 1772, „Oeuvres tom. XIV, pag. 6. Es sei F die homogene Funktion von p, x, y, e. c. t., die Dimension sei e, „et qu'en faisant varier toutes les lignes qui entrent dans la composition"

$$dF = A\,dp + B\,dx + C\,dy + \text{e. c. t.}$$

Es ist zu beweisen, daß $eF = A\,p + B\,x + C\,y + \text{e. c. t.}$

Es sei F explizite $= p^a\,x^b\,y^c$ e. c. t., also $e = a + b + c + \text{e. c. t.}$, die Summe der Exponenten aller Variabeln. Mittelst der früher gelehrten logarithmischen Differentiation erhält man dann: $dF = A\,dp + B\,dx + C\,dy = F\,d(L\,F) = F\,d(a\,L\,p + b\,L\,x + c\,L\,y + \text{e. c. t.})$ $= F \cdot \left(\frac{a\,dp}{p} + \frac{b\,dx}{x} + \frac{c\,dy}{y} + \text{e. c. t.}\right)$. Wenn man nun jeden Summanden durch die bezügliche Differenz seines Logarithmus dividiert, so kommt als Resultat: $F \cdot (a + b + c + \text{e. c. t.}) = eF$ und folglich, wenn $A\,dp + B\,dx + C\,dy + \text{e. c. t.}$ ein vollständiges Differential ist, so wird sein Integral $= \frac{A\,p + B\,x + C\,y}{e}$ e. c. t.

[Einerseits ist ja $F = \int A\,dp + B\,dx + C\,dy + \text{e. t. c.}$ und andererseits $F = \frac{A\,p + B\,x + C\,y + \text{e. c. t.}}{e}$.]

Außerdem ist:

---

trajectoire d'une comète en suppossant quelle se meut dans une ellipse infiniment allongée ou dans une parabole. 15. Solution d'un problême sur les jeux de hasard. 16. L'art de résoudre les équations. Vergl. zu diesem selten gewordenen Sammelband Cantor, Vorlesungen III, pag. 856 und C. R. Wallner im XXVII. Abschnitte von Cantor IV, pag. 899.

1. $A = a F p^{-1}$, $B = b F x^{-1}$, $C = c F y^{-1}$, also A, B, C homogene Funktionen vom Grade $e - 1$ oder $a F p^{-1} d p = A d p$; $b F x^{-1} d x = B d x$; $C d y = c F y^{-1} d y$.

2. Wenn man $A d p$ nach x differenziert, d. h. x als einzig variabel annimmt, so kommt $d^x (A d p) = a p^{-1} d p d^x (F) = F a p^{-1} d p b x^{-1} d x$. Ebenso $d^p (B d x) = F b x^{-1} d x a p^{-1} d p$, $d^y (A d p) = F a p^{-1} d p c y^{-1} d y$, $d^p (C d y) = F c y^{-1} d y a p^{-1} d p$ usw. Man hat also allgemein $d^x (A d p) = d^p (B d x)$; $d^y (A d p) = d^p (C d y)$, die sogenannten Bedingungsgleichungen, oder anders ausgesprochen, in jedem vollständigen Differential ist $\frac{d(A)}{dx} = \frac{d(B)}{dp}$, $\frac{d(A)}{dy} = \frac{d(C)}{dx}$, $\frac{d(B)}{dy} = \frac{d(C)}{dx}$.

3. Bringt den Satz von der Umkehrung der Ordnung der Differentiationen, denn $d^y (d^x A d p) = a b p^{-1} x^{-1} d p d x F c y^{-1} d y$, $d^x (d^y A d p) = a c p^{-1} y^{-1} d p d y F b x^{-1} d x$ also $\frac{d(A)}{dx dy} = \frac{d(A)}{dx dy}$; wenn man nochmals nach z differenziert:

$$\frac{d(A)}{dx dy dz} = \frac{d(A)}{dy dx dz} = \frac{d(A)}{dz dy dx}.$$

4. Die bestimmten Koeffizienten A, B, C, sind nach der ersten Differentiation vom Grade $e - 1$, nach der zweiten vom Grade $e - 2$, nach der n-ten, vom Grade $e - n$.

5. Ist $n = e$, so sind diese Faktoren vom Grade Null und die Differenzen von der Dimension e. Wenn man also eine Funktion so oft differenziert als ihr Grad Einheiten hat, dann ist der Koeffizient nach der letzten Differentiation konstant, und das Differential selbst ist das Produkt so vieler partieller Differentiale als Variable in der Funktion enthalten sind, so daß also ihre Dimension = dem Grade e ist.

6. Nach der ersten Differentiation beträgt die Summe der konstanten Koeffizienten $a + b + c + \ldots = e$, nach der zweiten $a b + a c + b c + \ldots = e^{I}$, nach der dritten könnte man daraus bilden $a b c + a b d + b c d + \ldots = e^{II}$ und so fort, so daß die erste Differentiation die Summe der Koeffizienten, die zweite die Summe ihrer Kombinationen zu zweien, die n-te die Summe ihrer n-er Gruppen liefert. Treibt man also die Differentiationen so weit, bis die Möglichkeit, daß die konstanten Koeffizienten noch andere Werte annehmen, ausgeschlossen ist, so wird man für die Exponenten der primitiven Funktion eine Gleichung vom Grade $n =$ der Anzahl

der Differentiationen erhalten, z. B. Es sei $dF = 2A\,dx + 3B\,dy$, der konstante Koeffizient nach der zweiten Differentiation $\frac{d(2A)}{dy} = 6\ldots$, dann hat man für die Summe der Koeffizienten $m+n = 2+3$ und $mn = 6$, Bedingungen, welche die Gleichung II. Grades: $m^2+5m+6 = 0$ ergeben, woraus der Exponent e von $F = \frac{m}{n} = \frac{5\pm1}{2} = 2$ oder 3; nach der ersten Differentiation muß aber das Differential dx mit dem Exponenten von x (in der ursprünglichen Funktion) multipliziert sein, also $m = 2$, $n = 3$ und $F = x^2y^3$.

7. Differentiation unter dem Integralzeichen: $\frac{d^y S.(m\,dx)}{dy} = S.\frac{dm}{dy}dx$. Ist $S.m\,dx = F = n\,x^a\,y^b$, so hat man $\frac{d^y S.m\,dx}{dy} = n\,b\,x^a\,y^{b-1}$, aber der Koeffizient m von dx nach der ersten Differentiation ist $m = n\,a\,y^b\,x^{a-1}$, ferner $\frac{dm}{dy} =$

$$n\,a\,b\,y^{b-1}\,x^{a-1} \text{ und: } S.\,n\,a\,b\,y^{b-1}\,x^{a-1}\,dx = S.\frac{dm}{dy}dx = \frac{d^y(S.m\,dx)}{dy}.$$

Zum Schlusse müssen wir die Anwendung der Methode in der algebraischen Analysis (l'analyse des quantités finies) zeigen.

Es sei zunächst der binomische Satz zu beweisen:

$$(y+a)^m = y^m + \frac{m}{1}y^{m-1}a + \frac{m(m-1)}{1\cdot2}y^{m-2}a^2 + \ldots$$
$$\frac{m(m-1)\ldots(m+1-p)\,y^{m-p}\,a^p}{1\cdot2\quad\ldots\quad p} + \ldots + a^m$$

Es sei $y+a = y\dot{y}$, dann hat man $y(\dot{y}-1) = dy = a$. Es ist evident, daß: $(y+a)^2 = y^2+2ay+y^2$, also $d(y^2) = y^2(\dot{y}^2-1) = y(\dot{y}+1)\,dy = y\{2+(\dot{y}-1)\}\,dy = 2y\,dy + (dy)^2 = 2ay + a^2$. Ebenso für die dritte Potenz $d(y^3) = y^2(\dot{y}^2+\dot{y}+1)\,dy$. Aber man sieht sogleich, daß $\dot{y}^2 = 1+2(\dot{y}-1)+(\dot{y}-1)^2$ also $d(y^3) = y^2\{3+3(\dot{y}-1)+(\dot{y}-1)^2\}\,dy = 3y^2\,dy + 3y\,(dy)^2 + (dy)^3 = 3y^2a + 3ya^2 + a^3$. Wenn nun dieses Gesetz Giltigkeit hat für ein Binom zur n – ten-Potenz, so gilt es auch für die nächste, die $(n+1)$ te. In der Tat: $d(y^{n+1}) = y^n(\dot{y}^n + \dot{y}^{n-1} + \dot{y}^{n-2} + \ldots\dot{y}+1)\,dy = y^n\dot{y}^n\,dy + y\,d(y^n)$, denn $d(y^n) = y^{n-1}(\dot{y}^{n-1}+\dot{y}^{n-2}+\ldots\dot{y}+1)\,dy$.

Aber durch die Annahme der weiteren Giltigkeit unserer oben gefundenen Formel:

$$d(y^n) = y^{n-1}\left\{\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\dot{y}-1)^2 + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-p)}{1\cdot 2\ldots(p+1)}(\dot{y}-1)^p + \text{e. c. t.}\right\} dy \text{ und ebenso } y^n \dot{y}^n dy$$

$$= y^n dy\,\{1+(\dot{y}-1)\}^n = y^n dy\left\{1 + \frac{n}{1}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1)^2 + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p}(\dot{y}-1)^p \ldots\right\}.$$

Multipliziert man die erstere Gleichung mit y und schreibt zur Addition untereinander:

$$y\,d(y^n) = y^n\left\{\frac{n}{1} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}(\dot{y}-1)^2 + \ldots \frac{n(n-1)\ldots(n-p)(\dot{y}-1)^p\ldots}{1\cdot 2\ldots p+1}\right\} dy$$

$$y^n dy\,\{1+(\dot{y}-1)\}^n = y^n\left\{1 + \frac{n}{1}(\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}(\dot{y}-1)^2 + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-p+1)(\dot{y}-1)^p}{1\cdot 2\ldots p}\ldots\right\} dy$$

$$d(y^{n+1}) = y^n\left\{\frac{n+1}{1} + n\left[\frac{n-1}{1\cdot 2}+1\right](\dot{y}-1) + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left[\frac{n-2}{3}+1\right]((\dot{y}-1)^2) + \ldots \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots p}\left[\frac{n-p}{p+1}+1\right](\dot{y}-1)^p\ldots\right\} dy$$

$$= \frac{(n+1)}{1} y^n a + \frac{(n+1)\,n}{1\cdot 2} y^{n-1} a^2 + \frac{(n+1)\,n\,(n-1)}{1\cdot 2\cdot 3} y^{n-2} a^3 + \ldots \frac{(n+1)\,n\ldots(n-p+1)}{1\cdot 2\ldots p+1} y^{n-p} a^{p+1} + \ldots$$

Da der Satz für die zweite und dritte Potenz evident ist, so gilt vermöge vollständiger Induktion Newtons Theorem also allgemein.

Kettenbruchentwicklung der Quadratwurzel. Es sei verlangt, die Quadratwurzel von $1+y$, $y<1$, zu bestimmen. Es war $d(x^{\frac{1}{2}}) = x^{\frac{1}{2}}(\dot{x}^{\frac{1}{2}} - 1) = \frac{x(\dot{x}-1)}{x^{\frac{1}{2}}(\dot{x}^{\frac{1}{2}}+1)} = \frac{dx}{x^{\frac{1}{2}}(\dot{x}^{\frac{1}{2}}+1)}$. Betrachtet man nun die Variable y als Differenz und setzt dann $x=1$, so kommt, da $y = x(\dot{x}-1) = (\dot{x}-1)_{x=1}$ oder $\dot{x} = 1+y$, $d(1+y)^{\frac{1}{2}} =$

$\sqrt{1+y}-\sqrt{1}=\frac{y}{1^{\frac{1}{2}}(y+1)^{\frac{1}{2}}+1}=\frac{y}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}$. Schreibt man den Nenner

$\sqrt{1+y}+\sqrt{1}=\frac{(\sqrt{1+y}+\sqrt{1})^2}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}=\frac{1+y+2\sqrt{1+y}+1}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}=$

$\frac{2(\sqrt{1+y}+\sqrt{1})+y}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}=2+\frac{y}{\sqrt{1+y}+\sqrt{1}}$ („en continuant la même operation au dénominateur, cette difference devient $\cfrac{y}{2+\cfrac{y}{(y+1)^{\frac{1}{2}}+1}}$; par conséquent, en répétant le même procédé, que l'on peut pousser aussi loin que l'on voudra on aura la fraction continue $\cfrac{y}{2+\cfrac{y}{2+\cfrac{y}{\text{e. c. t.}}}}$") und $\sqrt{1+y}=1+\cfrac{y}{2+\cfrac{y}{2+\cfrac{y}{2+y\,\text{e. c. t.}}}}$. Ensheim erläutert dann das Gesetz der Näherungsbrüche: sei ein solcher $\frac{m}{n}$, so ist der folgende $\frac{m}{n+\frac{y}{2}}=\frac{2m}{2n+y}$ und berechnet als Musterbeispiel

$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=1+\frac{\frac{1}{27}+\frac{12}{9}+\frac{16}{3}}{32+\frac{32}{3}+\frac{6}{9}}=1+\frac{\frac{1+36+144}{27}}{\frac{864+288+18}{27}}=1+\frac{181}{1170}=$$

1,154700 („fraction, qui ne diffère pas d'un millionième de la véritable racine"). Er setzt also den Wert von $y=\frac{1}{3}$ in den sechsten Näherungsbruch ein, den er sich zu $1+\frac{16y+12y^2+y^3}{32+32y+6y^2}$ richtig berechnet hatte. (Vergl. hierzu die allgemeine Methode, die Lagrange in der Theorie des fonctions analytiques einschlug. Erläutert von Vivanti in Cantor IV pag. 665.)

Anwendung der Methode auf Gleichungen (pag. 23—27) der Schrift.

Die Gleichung II. Grades sei in der Form gegeben $x^2+px+q=o$. Die eine Wurzel sei mit x, die andere mit $x\dot{x}$ bezeichnet. Durch Differenzenbildung kommt $x^2(\dot{x}^2-1)+px(\dot{x}-1)=0$ und nach Division mit $x(\dot{x}-1)$, $x(\dot{x}+1)+p=o$ und $x\dot{x}=-p-x$. Daraus folgt:

1. Die Summe der Wurzeln in derGleichung II. Grades ist dem Koeffizienten der ersten Potenz der Unbekannten gleich genommen mit entgegengesetztem Zeichen.

2. Die Wurzeln sind entweder beide reell oder beide imaginär, sonst könnte ihre Summe nicht reell sein.

3. Wenn die Summe der beiden Wurzeln $-p$ ist, so sind diese $x+\frac{p}{2}+m$ und $x+\frac{p}{2}-m$, multipliziert man die beiden Faktoren miteinander und vergleicht mit der gegebenen Gleichungsform, so ist $\left(x+\frac{p}{2}+m\right)\left(x+\frac{p}{2}-m\right)=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-m^2$ oder $m=\left(\frac{p^2}{4}-q\right)^{\frac{1}{2}}$, also sind die beiden gesuchten Faktoren $x+\frac{p}{2}+\left(\frac{p^2}{4}-q\right)^{\frac{1}{2}}$ und $x+\frac{p}{2}-\left(\frac{p^2}{4}-q\right)^{\frac{1}{2}}$.

Eine Gleichung III. Grades habe die Form $x^3+px+q=0$. Durch Differenzenbildung kommt: $x^3(\dot{x}^3-1)+px(\dot{x}-1)=0$ und nach Division mit $x(\dot{x}-1)$ hat man: $x^2(\dot{x}^2+\dot{x}+1)=-p$; löst man letztere Gleichung zweiten Grades, so kommt: $x\dot{x}=-\frac{x}{2}\pm\sqrt{\frac{x^2-4x^2-4p}{4}}$, also sind die beiden andern Wurzeln $x\dot{x}=\frac{-x\pm\sqrt{-4p-3x^2}}{2}$ und die drei Werte der Unbekannten x, $\frac{-x+(-4p-3x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$, $\frac{-x-(-4p-3x^2)^{\frac{1}{2}}}{2}$. Daraus folgt:

1. Die Summe der drei Wurzeln ist Null = dem Koeffizienten des fehlenden quadratischen Gliedes.

2. Die Summe der Kombinationen der Wurzeln zu je zweien ist p, Koeffizient des dritten Terms der gegebenen Gleichungsform.

3. Das Produkt der drei Wurzeln ist $-q$, der Koeffizient des vierten Terms mit entgegengesetztem Zeichen in dieser Gleichungsform.

4. Die Gleichung III. Grades hat immer eine reelle Wurzel, die beiden andern werden reell sein, wenn $-4p-3x^2$ positiv ist (wenn x die reelle Wurzel bezeichnet); dazu ist erforderlich, daß p negativ ist und $>\frac{3x^2}{4}$. Wenn also p positiv ist, so wird die Gleichung zwei imaginäre Wurzeln aufweisen.

5. Löst man die Gleichung, indem man $x = 2a = (a + \sqrt{b}) + (a - \sqrt{b})$ annimmt und $(a + \sqrt{b})^3 + (a - \sqrt{b})^3 = -q$ voraussetzt und $a^2 - b = -\frac{p}{3}$, so hat man $x^2 = 4a^2$, also $3x^2 = 12a^2 = 12b^2 - 4p$, somit die beiden andern Wurzeln $\frac{-x \pm (-4p - 3x^2)^{\frac{1}{2}}}{2} = -a \pm b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-3}$. Damit diese reell seien, muß $b^{\frac{1}{2}}$ imaginär oder Null sein. Aber aus dem Produkt der drei Wurzeln $(a^2 + 3b)\,2a = -q$, also $4a^6 + 24a^4 b + 36a^2 b^2 = q^2$ oder $a^6 + 6a^4 b + 9a^2 b^2 = \frac{q^2}{4}$ und aus $a^2 - b = -\frac{p}{3}$, $a^6 - 3a^4 b + 3a^2 b^2 - b^3 = -\frac{p^3}{27}$ oder mit Zeichenwechsel $-a^6 + 3a^4 b - 3a^2 b^2 + b^3 = \frac{p^3}{27}$, also $9a^4 b + 6a^2 b^2 + b^3 = (3a^2\sqrt{b} + b\sqrt{b})^2 = \left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)$ oder $(3a^2 + b)\,b^{\frac{1}{2}} = \pm\left(\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}\right)^{\frac{1}{2}}$. Ist also letzterer Ausdruck weder Null noch negativ, so ist es b auch nicht, und die Gleichung hat zwei imaginäre Wurzeln. Ist aber $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ negativ, so ist $b^{\frac{1}{2}}$ imaginär, und die drei Wurzeln der Gleichung $2a$, $-a + b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-3}$ und $-a - b^{\frac{1}{2}}\sqrt{-3}$ sind alle drei reell. (Cardanische Formel!)

Die allgemeine Gleichung IV. Grades ist $x^4 + px^3 + qx^2 + \gamma x + s = 0$. Durch Differenzenbildung und Division mit $d(x)$ kommt wieder $x^3(\dot{x}^3 + \dot{x}^2 + \dot{x} + 1) + px^2(\dot{x}^2 + \dot{x} + 1) + qx(\dot{x} + 1) + \gamma = 0$ (A). Durch Differenzenbildung in (A), indem man einzig $\dot{x}$ als variabel betrachtet, und Division der neuen Differenz mit $x\,d(\dot{x})$ erhält man $x^2(1 + \dot{x} + \dot{x}^2 + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}^2 + px(1 + \dot{x} + \dot{x}\ddot{x}) + q = 0$ (B). Bildet man in (B) wieder die Differenz, indem man nur $\dot{x}$ variieren läßt, und teilt alsdann durch $x\dot{x}\,d(\ddot{x})$, so hat man $x(1 + \dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x}) + p = 0$ (C). Geht man zur Gleichung (B) zurück, so findet sich, indem man den Wert von p substituiert und möglichst reduziert: $x^2(\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}^2\dddot{x}) = q$. Substituiert man die Werte von p und q in der Gleichung (A) und reduziert, so hat man $x^3\dot{x}^2\ddot{x}(1 + \dddot{x} + \ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x}) = -\gamma$; endlich, führt man die Werte p, q, γ in die gegebene Gleichung ein, so entnimmt man ihr $x^4\dot{x}^3\ddot{x}^2\dddot{x} = s$. Es ist aber $x(1 + \dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x})$ die Summe der Wurzeln, der Ausdruck: $x^2(\dot{x} + \dot{x}\ddot{x} + \dot{x}\ddot{x}\dddot{x} + \dot{x}^2\ddot{x}$

$+\dot{x}^2\ddot{x}\dddot{x}+\dot{x}^2\ddot{x}^2\dddot{x}$) die Summe der Kombinationen der Wurzeln zu je zweien, der Ausdruck $x^3\dot{x}^2\ddot{x}(1+\dddot{x}+\ddot{x}\dddot{x}+\dot{x}\ddot{x}\dddot{x})$ die Summe ihrer Dreiergruppen; endlich $x^4\dot{x}^3\ddot{x}^2\dddot{x}$ das Produkt der vier Wurzeln unter sich; somit ist die Summe der Wurzeln einer Gleichung IV. Grades $= -p$, die Summe ihrer Produkte zu zweien $= q$, die Summe ihrer Dreiergruppen $= -r$ und das Produkt aller vier Wurzeln $= s$. — Ensheim fährt fort „C'est Descartes qui aperçut le premier les propriétés des coéfficiens des équations (folgt die Regel!); wir wissen aber heute, daß Descartes zuverlässig die Invention nouvelle en Algèbre von Albert Girard von 1629 kannte, wo der Satz schon ausgesprochen ist. (Vergl. Cantor, Vorlesungen Bd. II_2 pag. 795.) Und weiter bei Ensheim: „Comme les livres élémentaires ne démontrent pas ces verités dans toute la rigeur mathematique, il n'est pas inutile d'en faire voir l'évidence par la méthode que nous exposons ici." Bezeichnen wir die Summe irgendwelcher Größen durch ${}^1R$, die ihrer Kombinationen zu zweien durch ${}^2R\ldots$, die ihrer $n-$er Gruppen durch ${}^nR$ und gesellen wir unter diese Größen die Einheit („si à ces grandeurs on ajoute l'unité, et que l'on la fasse entrer dans toutes leurs combinaisons comme partie coopérante"), so wissen wir aus der Kombinationslehre, daß $1+a+b+c+\text{e. c. t.} = {}^1R$, die Summe ihrer Produkte zu zweien $= {}^1R+{}^2R$, die ihrer Dreiergruppen $= {}^2R+{}^3R$ usw. Nun betrachten wir die Gleichung $x^n+Ax^{n-1}+Bx^{n-2}+\ldots Kx^{n-2p}+\ldots Qx+S=0$ und nehmen an, daß der Satz über die Zusammensetzung der Koëffizienten für die Gleichung vom nächst niederen Grade $n-1$ gilt. Dann gilt er auch für die Gleichung $n-$ten Grades. In der Tat, nehmen wir die Differenzenbildung in der gegebenen Gleichung vor und dividieren durch $x^{n-1}\,d(x)$, so kommt die Gleichung:

$$\dot{x}^{n-1}+\dot{x}^{n-2}\left(1+\frac{A}{x}\right)+\dot{x}^{n-3}\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}\right)+\dot{x}^{n-4}\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}\right)+\ldots$$

$$\dot{x}^{n-2p-1}\left(1+\frac{A}{x}+\ldots\frac{K}{x^p}\right)+\text{e. c. t.}=0.$$

Nach unserer Annahme ist aber: $-1-\frac{A}{x}={}^1R(\dot{x}^{n-1})$, wo ${}^1R(\dot{x}^{n-1})$ die Summe der Wurzeln der Gleichung $n-1$ ten-Grades ist und die analogen Bezeichnungen gelten. Und seine weiteren Schlüsse sind: da ${}^1R(\dot{x}^n)=1+{}^1R(\dot{x}^{n-1})=-\frac{A}{x}$, so folgt ${}^1R(x^n)=-A$; ${}^2R(\dot{x}^{n-1})=1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}=-{}^1R(\dot{x}^{n-1})+\frac{B}{x^2}$; also ${}^1R(\dot{x}^{n-1})+{}^2R(\dot{x}^{n-1})={}^2R(\dot{x}^n)=\frac{B}{x^2}$ und ${}^2R(x^n)=B$; so-

dann $^3R(\dot{x}^{n-1}) = -\left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}\right) = -\,^2R(\dot{x}^{n-1}) - \frac{C}{x^3}$, also $^2R(\dot{x}^{n-1}) + {}^3R(\dot{x}^{n-1}) = -\frac{C}{x^3} = {}^3R(\dot{x}^n)$ und $^3R(x^n) = -C$. Ganz allgemein $^{2p}R(\dot{x}^{n-1}) = \left(1+\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\ldots\frac{K}{x^p}\right) = -\,^{2p-1}R(\dot{x}^{n-1}) + \frac{K}{x^{2p}}$, also $^{2p-1}R(\dot{x}^{n-1}) + {}^{2p}R(\dot{x}^{n-1}) = {}^{2p}R(\dot{x}^n) = \frac{K}{x^{2p}}$ und $^{2p}R(x^n) = K$. Da nun der Satz über die Zusammensetzung der Koëffizienten für die Gleichung IV. Grades erwiesen ist, so ist er durch dieses Verfahren der Methode vollständiger Induktion ganz allgemein erwiesen.

Endlich wird die Methode zur Auffindung einer Doppelwurzel und des Kriteriums dafür gebraucht. Die vorgelegte Gleichung sei $x^m + p\,x^{m-1} + \ldots q\,x + \gamma = 0$. Bildet man die Differenz und teilt durch $d(x)$, so findet sich $x^{m-1}(\dot{x}^{m-1} + \dot{x}^{m-2} + \ldots + 1) + p\,x^{m-2}(\dot{x}^{m-2} + \ldots \dot{x} + 1) + \ldots q = 0$. Aber für eine Doppelwurzel ist notwendig $\dot{x} = 1$, also wird die Differenzengleichung $m\,x^{m-1} + (m-1)\,p\,x^{m-2} + \ldots + q = 0$ und man hat zwei Gleichungen, aus welchen man x eliminieren kann und unter den Koëffizienten damit die Bedingungsgleichung für eine Doppelwurzel auffinden. Multipliziert man die gegebene Gleichung mit dem höchsten Koëffizienten m und subtrahiert davon die Differenzengleichung, nachdem man sie mit x multipliziert, so kommt man zur Gleichung $p\,x^{m-1} + 2\,p'\,x^{m-2} + 3\,p''\,x^{m-3} + \ldots (m-1)\,q\,x + m\,\gamma = 0$, in welcher die Zahlenkoëffizienten in derselben arithmetischen Progression abnehmen, in welcher die Exponenten wachsen. Die vorgelegte Gleichung sei $x^3 + p\,x^2 + q\,x + \gamma = 0$; bildet man die Differenz, teilt durch $d(x)$, so erhält man für $\dot{x} = 1$, $3\,x^2 + 2\,p\,x + q = 0$ (B). Die Elimination von x vollzieht sich in folgenden Schritten: Multipliziert man diese mit x und subtrahiert sie von der mit 3 multiplizierten ursprünglichen Gleichung, so kommt $p\,x^2 + 2\,q\,x + 3\,\gamma = 0$ (C). Nun gibt $3\,(C) - p \times (B) = (6\,q - 2\,p^2)\,x + 9\,\gamma - q\,p = 0$ (D) und $(6\,q - 2\,p^2)\,[(B)] - 3\,x\,[(D)] = (15\,p\,q - 4\,p^3 - 27\,\gamma)\,x + q\,(6\,q - 2\,p^2) = 0$ (E). Endlich $-(6\,q - 2\,p^2)\,[(E)] + (15\,p\,q - 4\,p^3 - 27\,\gamma\,[(D)] = 0 = q\,(6\,q - 2\,p^2)^2 - (9\,\gamma - q\,p)\,(15\,p\,q - 4\,p^3 - 27\,\gamma) = 0$, die Bedingungsgleichung, welche sich auf $27\,\gamma^2 + 4\,p^3\,\gamma - 18\,p\,q\,\gamma - p^2\,q^2 + 4\,q^3 = 0$ reduziert, und welche $x = \frac{q\,p - 9\,\gamma}{6\,q - 2\,p^2}$ involviert [zur Gewinnung der Bedingungsgleichung hätte man ja auch den Wert

von x aus (D) berechnen und in (E) einsetzen können]. Als Beispiel dient $x^3 + 8x^2 + 21x + 18 = 0$, man findet dann $x = \frac{pq - 9r}{6q - 2p^2}$ $= \frac{168 - 162}{126 - 128} = \frac{6}{-2} = -3$, und die ursprüngliche Gleichung wird $(x+3)^2(x+2) = 0$ mit der Doppelwurzel $x = -3$ und der einfachen $x = -2$.

Ensheim beschließt seine Schrift mit den Worten: „Ces exemples suffisent pour faire voir la facilité que nous donne cette méthode dans la solution des problêmes; c'est maintenant aux mathématiciens d'en juger."

Überblick über die Publikation von Lagranges Briefen.

Wir haben zu unterscheiden a) die in die „Oeuvres" verarbeiteten und b) die nach 1892 ans Licht getretenen Briefe. Unter a) wieder die großen Briefwechsel und die vereinzelten Stücke und kleineren Gruppen.

Den ganzen XIII. Band füllt die Korrespondenz mit D'ALEMBERT. Im XIV. hat die Korrespondenz mit CONDORCET (Geschenk von Mme O'CONNOR, Tochter CONDORCETS, an das Institut, worunter sich auch die an D'ALEMBERT gerichteten Originale befanden, welcher sie CONDORCET geliehen hatte), mit LAPLACE und EULER Platz gefunden. Von dem Briefwechsel mit CONDORCET sind aber nur noch LAGRANGES Briefe einseitig vorhanden, die CONDORCETS, des Girondisten, mußte LAGRANGE in den Stürmen der Revolution vernichten. Die Korrespondenz mit LAPLACE wurde von Mme DE COLBERT-LAPLACE, LAPLACES Enkelin, dem Institut geschenkt. Die zielbewußte Publikation setzte nach 1870 ein. So wurde der Brief an FAGNANO vom 24. Dezember 1755 publiziert von M. A. GENOCCHI in tom. IX der Atti de l'Académie des sciences de Turin (zuerst war er von MAMIANI in dessen „Elogi", p. 133 bis 135, gedruckt worden). Der in der Ausgabe der „Oeuvres" folgende Brief an ZANOTTI wurde von Prof. TEZA an BELTRAMI mitgeteilt und in den Comptes rendus der Akademie von Bologna gedruckt 1873/74, pag. 97, und in den Atti der Turiner Akademie reproduziert (mai-juin 1874, pag. 758). Von GENOCCHI wurde in

jenem IX. Bande der Turiner Atti auch der erste Brief an LORGNA vom 25. Juni 1770 und der an LORGNA vom 25. Mai 1781, ebenso der eingangs genannte an O. GHERLI vom 5. Juli 1776 herausgegeben, pag. 760 u. 761. Band XIV dieser Atti enthält auch einen interessanten Kommentar von M. A. GENOCCHI über den Brief an LAGARDE vom 25. nîvose an IX. Die Briefe an LORGNA wurden mit den andern an diesen Korrespondenten wiedergegeben vom Fürsten BONCOMPAGNI[10]) in tom. VI, mars 1873, seines „Bulletino delle scienze mathematiche et fisiche", Roma 1873, pag. 131: Dieci lettere inedite di Lagrange. Fürst B. BONCOMPAGNI gab außerdem noch drei selbständig erschienene Publikationen von LAGRANGE-Briefen:

1. Lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange à Léonard Euler tirées des Archives de la salle des Conférences de l'Académie impériale des Sciences de Petersbourg, Saint Petersbourg 1877, 52 pages in -4^0 (expédition pour la confection des papiers de l'État, atelier héliographique dirigé par G. Scamoni). (Die übrigen Briefe der Korrespondenz mit EULER entstammen dem 4. Manuskriptbande in -4^0, oder wurden von FUSS 1862 veröffentlicht in Opera posthuma mathematica et physica Euleri, 2 vol. in 4^0, par P. H. FUSS und N. FUSS.)

2. Deux lettres inédites de Joseph-Louis Lagrange tirées de la Bibliothèque royale de Berlin (Collection Meusebach portefeuille 21 et Collection Radowitz Nr. 4952), Berlin 1878, 8 pages in 4^0. (Im Catalogo della Bibliotheca BONCOMPAGNI Nr. 680 und 681 [letzte Seite], je 108 bzw. 114 Exemplare der Separatausgabe.)

Der eine in Photolithographie wiedergegebene ist der von Frau VON LAPLACE im Jahre 1843 an ALEXANDER VON HUMBOLDT geschenkte LAGRANGE-Brief an LAPLACE, s. d., der andere der an LAGARDE vom 25. nîvose an IX.

3. Lettera inedita di Gius. L. Lagrange pub. (in facs.) da B. BONCOMPAGNI, Firenze 1879 in -4^0 (im Catalogo della Bibliotheca BONCOMPAGNI, Roma 1898, Abteil. Autographie, Nr. 681, befanden sich noch 131 Kopien des Separatabzugs); auf ibid. Nr. 683: Lettera di L. DE LA GRANGE Tournier Torinese al Sign. Conte GIULIO CARLO DA FAGNANO March. de TOSCHI, Torino 1754 in 4^0 (noch 400 Kopien des Separatabzugs) bezieht sich die An-

[10]) Der Bearbeiter war GIAMBATTISTA BIADEGO.

gabe von Loria im III. Bande der neuen Fagnano-Ausgabe, S. 181, Note (3): „Questa lettera ebbe parrechie ristampe, che B. Boncompagni ha enumerate con la consueta sua scrupulosa diligenza nell'articolo: Intorno a dieci lettere in lingua italiana di G. L. Lagrange (Bullet. di bibl. e. stor., tomo VI, 1874, pag. 142—152 e 559—344). Più tardi fu riprodotta in Oeuvres de Lagrange, tome VII, pag. 1583, Paris 1877)." (Ersterer zu Florenz publizierte Brief ist an Canterzani, Sekretär der Akademie von Bologna, gerichtet und vom 6. April 1773 datiert.)[11])

Ch. Henry publizierte 1886 im tom. IX des Bulletino Boncompagni sechs Lagrange-Briefe, die ihm von Joseph Molinari, Joseph Campori von Modena, M. Borbonese, Sekretär am Stadtmuseum in Turin, mitgeteilt wurden. Den 4. an Grimaldi entnahm er der Storia dell'Accademia Luchese, Lucca 1881, tom. I, pag. 278, der 5. und 6. stammen wieder von M. Borbonese und Vinc. Promis, letztere beiden sind an Paroletti gerichtet.

Zwei Briefe, darunter der an Sophie Germain, wurden von Henry in der Revue philosophique publiziert.

Die beiden Briefe von Lagrange an Gauss vom 31. Mai 1804 und 17. April 1808 wurden von E. Schering an Ludovic Lalanne, den Herausgeber des XIV. Bandes der Oeuvres, mitgeteilt.

Wir haben nun die wichtigsten Vorarbeiten zu letztgenanntem Bande kennen gelernt.

b) Nach 1892 sind ans Licht gekommen:

1. Die in der Einleitung unserer Abhandlung genannten Briefe an Paoli, herausgegeben 1897 von Pietro Riccardi.

2. Die im Catalogo della Bibliotheca Boncompagni, Roma 1898 (Autografi), S. 15, aufgeführten Autographen: Nr. 356 an Lagranges Vater, vom 3. Dez. 1771, 3 pag., den Tod zweier Brüder und der Mutter betreffend. Nr. 357: Berlin, 24. Mai 1768, 3 pag., ein Thema für die Berliner Akademie betreffend. Nr. 358: Paris, 18. Mai 1792, Dank für Ernennung zum Mitglied der Münzkommission. Nr. 359: ein Blatt mit algebraischen Rechnungen. Nr. 360: sign. Quittung. Nr. 361: Brief an Proné, 3 pag. Nr. 362: Brief an Denon vom 24. August 1803, Privatbrief.

[11]) Vergl. zu 1. Cantors ausführliches Referat in der Zeitschrift für Mathem. u. Physik, Histor.-Literar. Abteilung, Bd. XXIII, S. 1—24. Zu 2. u. 3. sein Referat ebenda, Bd. XXIV, S. 182—184.

Nr. 363: Dankbrief vom 20. Dezember 1806 an Mr. Valant für die Ernennung zum Mitglied des Atheneums der franz. Sprache, 2 pag. Nr. 364: an Formey vom 9. Nov. 1775, Dank für einen übersandten Band. Nr. 365: Brief vom 5. Oktober 1806 in dritter Person an Prof. Aldini. Nr. 366: Brief, sign. L.G., an den Buchhändler Lagarde in Berlin, Paris 6. brumaire an X, 3 pag. Nr. 367: ist ediert Oeuvres XIV, pag. 289, 7. ventose an VI. Nr. 368: ähnl. Aktenstück mit Lagranges und Jos. Cheniers Unterschrift, Paris, 4. ventose an VII, Vorschlag von Prof. Bouillon-Lagrange zum Professor der Physik an der Polytechn. Schule und Vincent zum Professor der Pädagogik. Nr. 369: Paris, 20. pluviôse an VII, an die provisorische Regierung von Piémont, Dank für ein Dekret zugunsten seines Vaters, 1 pag. Nr. 370: Brief, Berlin, 27. Jan. 17?4, 2 pag., aus der Samml. Bovet. Nr. 371: Brief vom 9. Mai, Paris, 1 pag. in 12^0. Nr. 372: ist ediert Oeuvres XIV, pag. 285, 25. prairial an II. Nr. 372: ebenfalls Oeuvres XIV, pag. 301, vom 15. Jan. 1809. Nr. 374: an seinen Vater vom 24. März 1787 aus Berlin. Nr. 375: ebenfalls an seinen Vater, Berlin, 16. Jan. 1767. Nr. 376: al „Ministre de l'interieur", Paris, 15. nîvose an II, 1 pag.

3. Die in der Einleitung von uns erwähnten Briefe in der neuen Fagnano-Ausgabe.

4. Unser Brief an Ensheim.

5. Ein Brief im Auszug an Guyton de Morveau, den bekannten Chemiker und Mitarbeiter von Lavoisier und Bertholet, den Crelle im Auszug so übersetzt. Guyton hatte Lagrange auf einige Stunden das Chladnische Werk geliehen. Beim Zurücksenden schrieb ihm Lagrange: „Ich will versuchen, es mir zu verschaffen, um es mit Muße zu studieren und zu sehen, ob sich diese Versuche auf eine Art von Theorie bringen lassen. Die auf den kreisförmigen Scheiben sich bildenden Linien, welche durch die Gestalt bestimmt werden, welche der Sand, womit man die Scheiben bedeckt, ehe man sie mit Bogen streicht, annimmt, sind ebenso wie Ruheorte in den harmonischen Tönen der Violine und der Trompete; aber der Zusammenhang dieser Linien mit den zugehörigen Tönen ist eine ebenso sonderbare als theoretisch schwer zu erklärende Erscheinung." In einem Briefe vom 12. ventose an V beschäftigt er sich mit Huttons Lehrbuch der Artillerie und äußert sich (wieder nach Crelle) über dasselbe so: „Dieses Buch reizt meine Neugierde, weil die Versuche sehr

genau zu sein scheinen und wenigstens der Verfasser zu allgemeinen Resultaten gelangt ist. Besonders wünsche ich zu sehen, was er über die Länge der Geschütze gefunden hat. Das ist der Punkt, welchen DARCY untersuchen wollte, worüber er aber nichts Entschiedenes finden konnte." In einem andern Briefe sagt er: „Ich beschäftige mich, diese Versuche zu prüfen und zu sehen, inwiefern sie mit einer genaueren Theorie als die des Verfassers vereinbar sind".

Auch diese Briefe scheinen LUDOVIC LALANNE entgangen zu sein!

Von Biographien Lagranges sind uns bekannt geworden:

Aus dem Jahre seines Todes 1813:

1. LEMERCIER, L. J. N., Chant dithyrambique aux jeunes gens qui ont rendu les derniers honneurs à Delille. Considerations sur la mort de Lagrange et sur celle de Delille, Paris 1813.

2. VIREY, J. J., et POTEL, F. A., Précis historique sur la vie et la mort de J. L. Lagrange, Paris, Ve Courcier, 1813, 22 pag. in — 4°.

3. COSSALI, Elogio di Luigi Lagrange, Padova 1813, in 8°.

4. DELAMBRE, Éloge, gelesen am 3. Januar 1814 in der Pariser Akademie, deutsch von A. L. CRELLE, Nachricht von Lagranges Leben und Schriften im I. Bande seiner deutschen Übersetzung von Lagranges Mathematischen Werken, Berlin 1823; ebenda auch Notizen von GUYTON MORVEAU (s. oben!), ein verdeutschter Auszug aus der Schrift von VIREY und POTEL, und „Einige Zusätze zu vorstehenden Nachrichten von Lagranges Leben" von A. L. CRELLE.

5. GREGORY, DE, Necrologia dei tre Piemontese illustri Bodoni, Denina e Lagrange morti nel 1813 (letta dal praesidente De Gregory all'Academia in Roma, marzo 1814, e lo stesso anno stampata in Vercelli, in 8°.

6. MAGISTRINI, Discorso in lode di Luigi Lagrange, Bologna 1819.

7. MARTINI, LORENZO, Cenni biographici, Torino 1840, in 8°.

8. UGONI, CAMILLO, Della letteratura Italiana nella seconda metà del seculo XVII, opera posthuma Milano col tipi di Giuseppe di Gio 1856, Vol. II, pag. 243—364: Giuseppe-Luigi Lagrange, Sua Vita, Sue Opere, Sua Indole. UGONI, pag. 261, erwähnt ein

Elogium auf den jugendlichen LAGRANGE in Briefform von BOCCARDI. UGONI sagt: „Questa ed altre date della presente Vita tratte dalle note aggiunte ad un epistola diretta all'A., rectificano le date erronee di parecchi biografie di Lagrange. Quest'Epistola in versi sciolti, rara oggidì fu praesentata manoscritta all'A. la viglia della sua partenza da Torino ed elegantemente stampata l'anno appreso in Bologna col titolo: Al Chiarissimo signor Luigi de la Grange, Torinese, direttore della classe mathematica nella reale Academia delle scienze e belle lettere di Berlino. Epistola di un suo concittadino ed amico, Bologna, per Lelio della Volpe 1767, in 8°." (Vgl. dafür auch den Catalogo della Bibliotheca BONCOMPAGNI Nr. 733, pag. 110, Facsimile del vol presso la Bibl. Naz. di Brera segnato X. R. IV, 2, in 8° cart., und unter Nr. 696 ein Druckexemplar dieser seltenen Schrift.)

9. BRIANO, G., Contemporanei Italiani, Nr. 24, 1861, in 16°.

10. FORTI, A., Vita ed opere di Luigi Lagrange (discorso), Pisa 1868, 2. ed. 1869.

C. F. Wintersche Buchdruckerei.

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
515C126 C001 V001
CALCULUS [S.L.
3 0112 017225076